

ひょう 雹に当たってもケガをしないのは何故？

(「応用数理」の授業より)

高い所から物体を落下させると、物体の速度は時間とともに増加します。高校の物理の教科書によると、時刻 x における物体の速度 $v(x)$ と高さ $y(x)$ の関係は次の式で与えられます。

$$v(x) = -gx, \quad y(x) = y_0 - \frac{1}{2}gx^2 \quad \dots (1)$$

ただし y_0 は初期値、 g は重力加速度、初速度は0、上向きを正としています。ここで、落下速度は高さの時間に関する微分なので $y'(x) = v(x)$ 、また、**等加速度運動**のモデルなので次の関係式が成り立ちます：

$$v'(x) = y''(x) = -g \quad \dots (2)$$

(1)を用いると、**高さ1000m**から雹を落下させると、**約14秒後**に地表へ到達し、その時の速度はおよそ**秒速140m**(\approx **時速500km!!**)になるという計算結果が得られます。しかし、果たして雹は本当にこんな高速で落下しているのでしょうか？これが正しければ、雹が降るたびに地上は大惨事になってしまうところですが、実際には雹は空気抵抗を受けるため、上記のような等加速度運動をしているわけではありません。物体にかかる**空気抵抗は、速度が大きい場合は速度の2乗に比例する**ことがわかっているので、(2)に対応する運動方程式は次のようになります：

$$y'' = -g + \frac{b}{m}(y')^2 \quad \dots (3)$$

ここで m は落下する物体の質量、 b は物体の形状や大気密度によって定まる比例定数です。例えば、大気密度 1.2kg/m^3 、物体を直径1cm球体とした場合、 $b \approx 2.21 \times 10^{-5}$ となります。ここで、(2)を満たす関数 $y(x)$ が(1)であることは簡単にわかりますが、(3)を満たす関数を求めるのは、それほど簡単ではありません。しかし、ちょっとだけ頑張ると、(3)を満たす $v(x)$ 、 $y(x)$ は次で与えられることがわかります：

$$v(x) = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \frac{\sinh \sqrt{\frac{bg}{m}}x}{\cosh \sqrt{\frac{bg}{m}}x}, \quad y(x) = y_0 - \frac{m}{b} \log \left(\cosh \sqrt{\frac{bg}{m}}x \right) \quad \dots (4)$$

ここで $\sinh \theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2$ 、 $\cosh \theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2$ です。また、(4)に関して次の事実に注意しましょう。

- 物体の質量 m が大きくなると、落下速度の大きさ $|v(x)|$ は大きくなる。
- $\lim_{m \rightarrow \infty} v(x) = -\sqrt{mg/b}$ ；物体の速度は時間が経つにつれて一定の値に近づく。
- $\lim_{m \rightarrow \infty} v(x) = -gx$ 、 $\lim_{m \rightarrow \infty} y(x) = y_0 - \frac{1}{2}gx^2$ ； m が大きくなると(4)は自由落下運動(1)に近づく。
- $y(x) = 0$ とし、(4)を x について解くと、地表までの到達時間 x_0 は次で与えられる：

$$x_0 = \sqrt{\frac{m}{bg}} \cosh^{-1} e^{\frac{by_0}{m}} \quad \dots (5)$$

では、(5)を利用して雹の落下速度を求めてみましょう。雹を、比重0.9、直径1cmの氷の球とすると、 $m \approx 4.7 \times 10^{-4}\text{kg}$ となります。このとき、**高さ1000m**から地表までの到達時間は**約70秒**、地表到達時の速度は、およそ**秒速14m**(\approx **時速52km**)になります。この程度の速度で氷の粒が当たっても、多分ケガをすることはないでしょう。ちなみに、同じ大きさの**鉛(比重11.34)**が降ってきた場合、地表までの到達時間は**約23秒**、速度はおよそ**秒速51m**(\approx **時速184km**)となり、これが当たるとかなり危険です。(空に向かって銃を撃つのはやめましょう。)