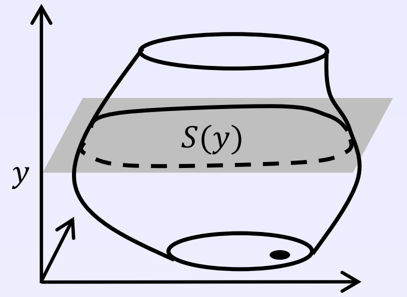
お風呂の水が無くなるまでの時間

（「応用数理」の授業より）

お風呂にたまった水を抜くとき，残りの水が少なくなるにつれて，水の減り方が遅くなるような気がしませんか？これは，早く水を抜き取りたいという心理が引き起こす「気のせい」なのでしょうか。「数学」を用いて，この問題を考察してみましょう。



左の絵のように，高さ y における断面積が $S(y)$ で与えられる浴槽の水を，高さ 0 の底の面積 μ の穴から排出するとき，排出時間 x，残りの水の体積 V，排出される水の流速 v との間には，次の関係式が成り立ちます：

$$\begin{cases} V = \displaystyle\int_0^y S(t)dt & \text{（残りの水の体積は断面積の底から水面までの積分）} \\ \dfrac{dV}{dx} = -\mu v & \text{（体積の減少速度は排水の流速と穴の断面積の積）} \\ \dfrac{1}{2}v^2 = gy & \text{（エネルギー保存則：「減少する水の位置エネルギー」＝「排出される水の運動エネルギー」）} \end{cases}$$

上の1式の両辺を x で微分し，2式，3式を用いて v を消去すると次の微分方程式が得られます。

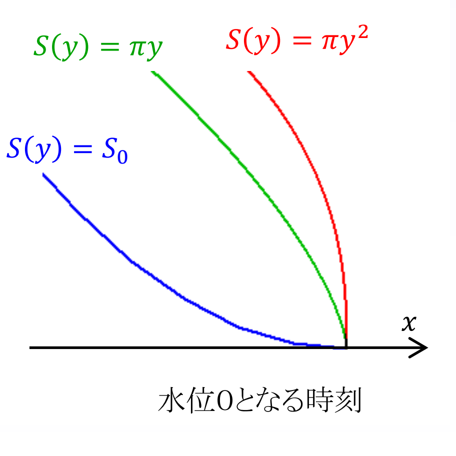
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu\sqrt{2gy}}{S(y)} \qquad \cdots (*)$$

この微分方程式を解く（$(*)$を満たす関数 $y(x)$ を求める）ことによって，水面の高さ y が時間 x によってどのように変化するかが分かります。実際，**断面積が一定の直方体の浴槽**の場合，断面積を$S(y) = S_0$（定数）として$(*)$の解を求めると次のようになります。

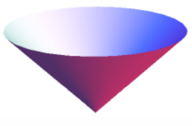
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\mu\sqrt{2gy}}{S_0} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\sqrt{y} = -\frac{\mu\sqrt{g}}{\sqrt{2}S_0} \Rightarrow y = \left(-\frac{\mu\sqrt{g}}{\sqrt{2}S_0}x + \sqrt{y_0}\right)^2$$

ここで，y_0 は $x = 0$ における水位，g は重力加速度です。上の式から，水位 y は経過時間 x に関する**2次関数**として表され，水位の変化率は $y = 0$ に近づくに従って小さくなることがわかります。つまり，お湯の量が少なくなにつれて水の減り方が遅くなるのは決して**気のせいではない**ことがわかりました。

ちなみに，断面積が一定でない浴槽の場合，y は次のようになります。

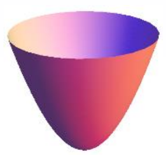


円錐の水槽（$S(y) = \pi y^2$：水位 y での水面が半径 y の円）



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu\sqrt{2gy}}{\pi y^2} \Rightarrow y = \left(-\frac{2\mu\sqrt{2g}}{5\pi}x + y_0^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$$

放物面の水槽（$S(y) = \pi y$：水位 y での水面が半径 $\sqrt{y}$ の円）



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu\sqrt{2gy}}{\pi y} \Rightarrow y = \left(-\frac{3\mu\sqrt{2g}}{2\pi}x + y_0^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

山口大学理学部数理科学科