

たのしもう、数理科学

ほしぞらシリーズ NO. 3

# 結び目の不思議 I

-- 解けている結び目

Web 版

宮澤 康行 著



山口数理科学出版会

## まえがき

# ”絵”は口ほどに物を言う

つたない文章など読み飛ばして構いません。

まずは絵を見て楽しんでください。

## 急がば触れ！

何が書いてあるか

知りたければ、

ひもを用意し、

実際に結び目を作り、

自らの手で変形してみましよう。

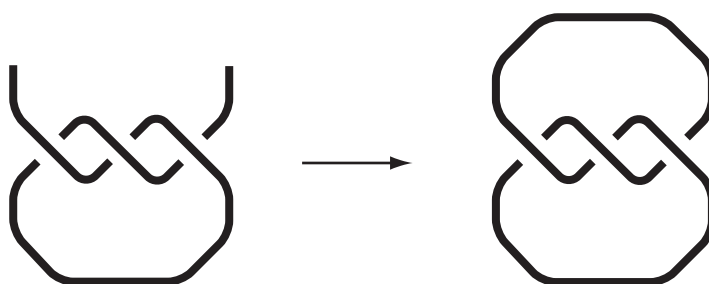
歌って踊れる「数学」ではありませんが、

触ってわかる「数学」を体験できることでしょう。

Web版(PDF)には、何箇所かに注釈(補足説明とか、役に立たない余計なこととか)がついています。どうぞ、併せてご覧下さい。

# 1 結び目とは？

適当な長さの1本のひもを想像します。  
そのひもを適当に結びます。  
そして、ひもの両端を素直につなげてしまいます。  
すると ”ひねくれた ”輪が出来上がります。  
この輪のことを**結び目**と呼びます。



端のある結ばれたひも

結び目

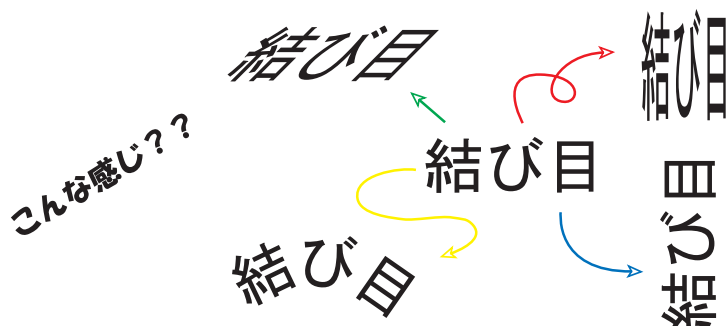
日常生活の中では、端のある結ばれたひもの状態、あるいは結ばれた部分のことを結び目と言うのが普通ですが、端のある状態の場合、理論的には、結んだときと逆の手順で結びをほどくことができるので、すべての結び目は一本のまっすぐなひもの状態と同じになり区別することができません。

これでは**数学の研究対象**として不適切なので、いろいろな結び目が出るように端を閉じて輪にしてしまうのです。

ここでは複雑な形の結び目を簡単な形に変形することに関して少しお話ししましょう。

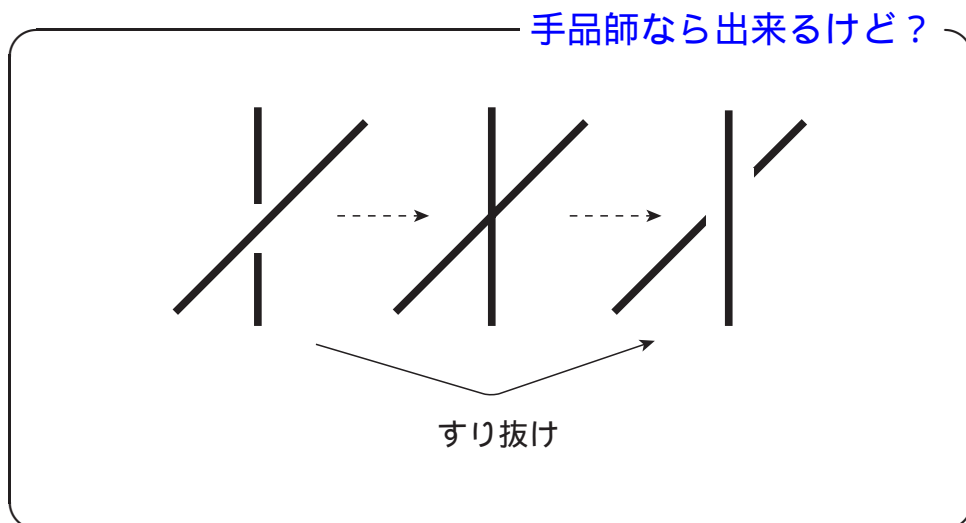
## 2 結び目の型

2つの結び目があったとき、一方の結び目（あるいはその一部）を曲げたり、伸ばしたり、縮めたり、動かしたりして、もう一方の結び目と同じ形にできるとき、2つの結び目は**同じ型**をもつといいます。結び目が**ゴムひも**で出来ていると考えて変形すると思えばよいでしょう。



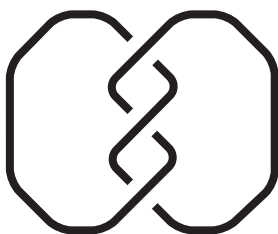
したがって、結び目を一度切断したあと適当に変形してまたつなぎ合わせるという操作や、手品師がするような、ひもがひもをすり抜けるような変形はできません。

同じ型をもつ結び目は同じ結び目だと考えます。



### 3 結び目の射影図（結び目図）

結び目を考えるときは、平面の上に絵を描いて考えると便利です。平面に描かれた結び目の絵（図）のことを**結び目の射影図（結び目図）**といいます。例えば、次のようなものです。



絵の中にはひもが交差するところがあります。

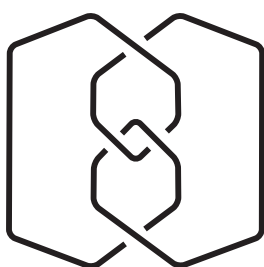
それを**交点**と呼びます。

交点の情報（すなわち、ひもの上下の情報）により、いろいろな結び目が表されます。

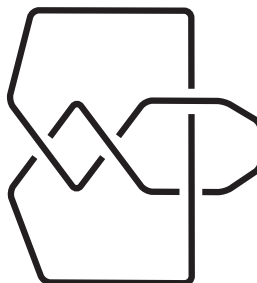


ある1つの結び目の射影図はただ1つではありません。

例えば、次の節で示すように




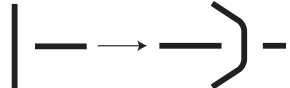
と



は同じ結び目の射影図を表します。

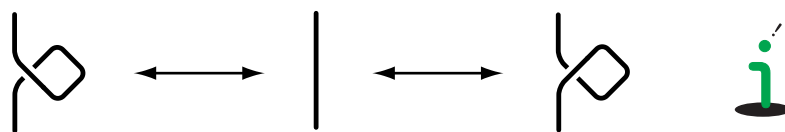
## 4 ライデマイスター移動

2つの射影図が同じ結び目の射影図ならば、たとえ違って見えたとしても、一方に**ライデマイスター移動**と呼ばれる変形を何回か施せば、もう一方の射影図になります。

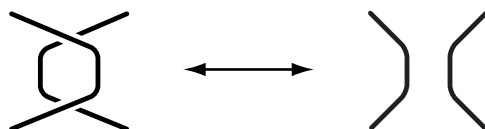
正確にはひもを伸ばしたり縮めたり (  ) や交点を少しスライドさせる (  ) などの変形も必要ですが、これらの変形は本質的なものではないので、ことさら言及しないのが普通です。

ライデマイスター移動とは、結び目の射影図に施す局所的な変形のことをいい、次の**3種類**があります。

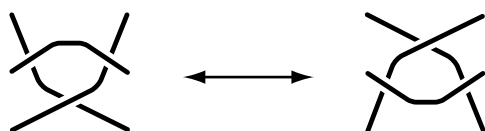
- ライデマイスター移動 I



- ライデマイスター移動 II

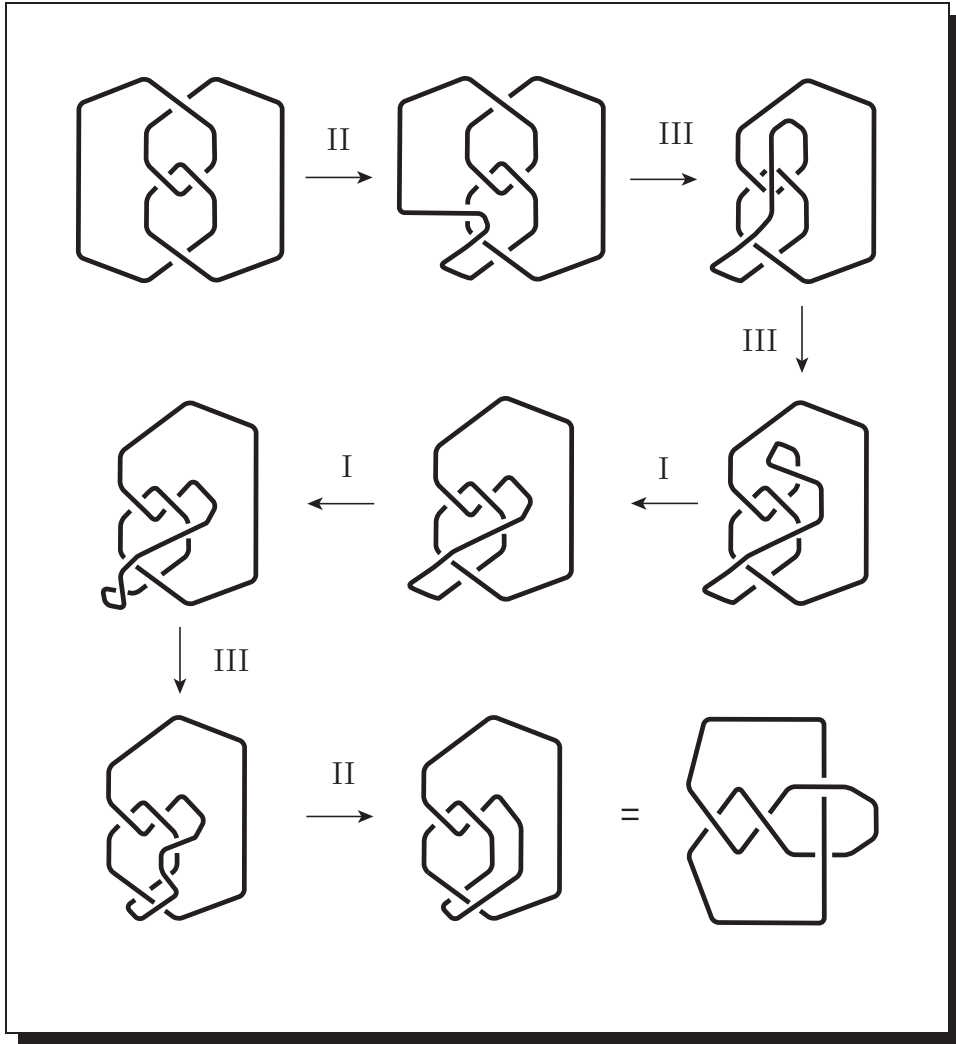


- ライデマイスター移動 III



ここで、図に描かれていない結び目の残りの部分は動かしません。

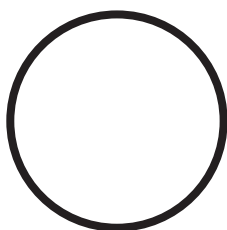
先ほどの違って見える射影図の一方をライデマイスター移動を用いて変形してみましょう。例えばこんな具合です。



ここで、I, II, III はそれぞれライデマイスター移動 I, II, III を表しています。

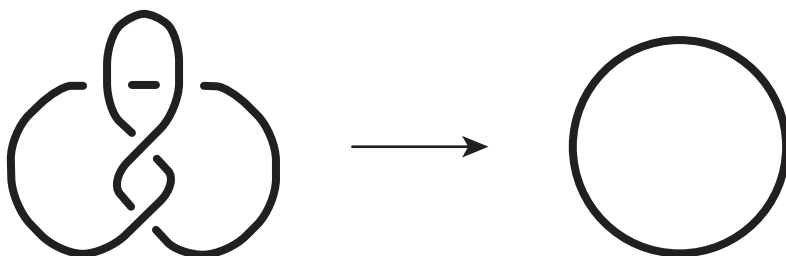
## 5 自明な結び目

ひもを結ばずにそのまま素直につなげてできた結び目（つまり何の「結び」もないただの輪）を**自明な結び目**と呼びます。  
自明な結び目の最も簡単な射影図は**単なる円**です。



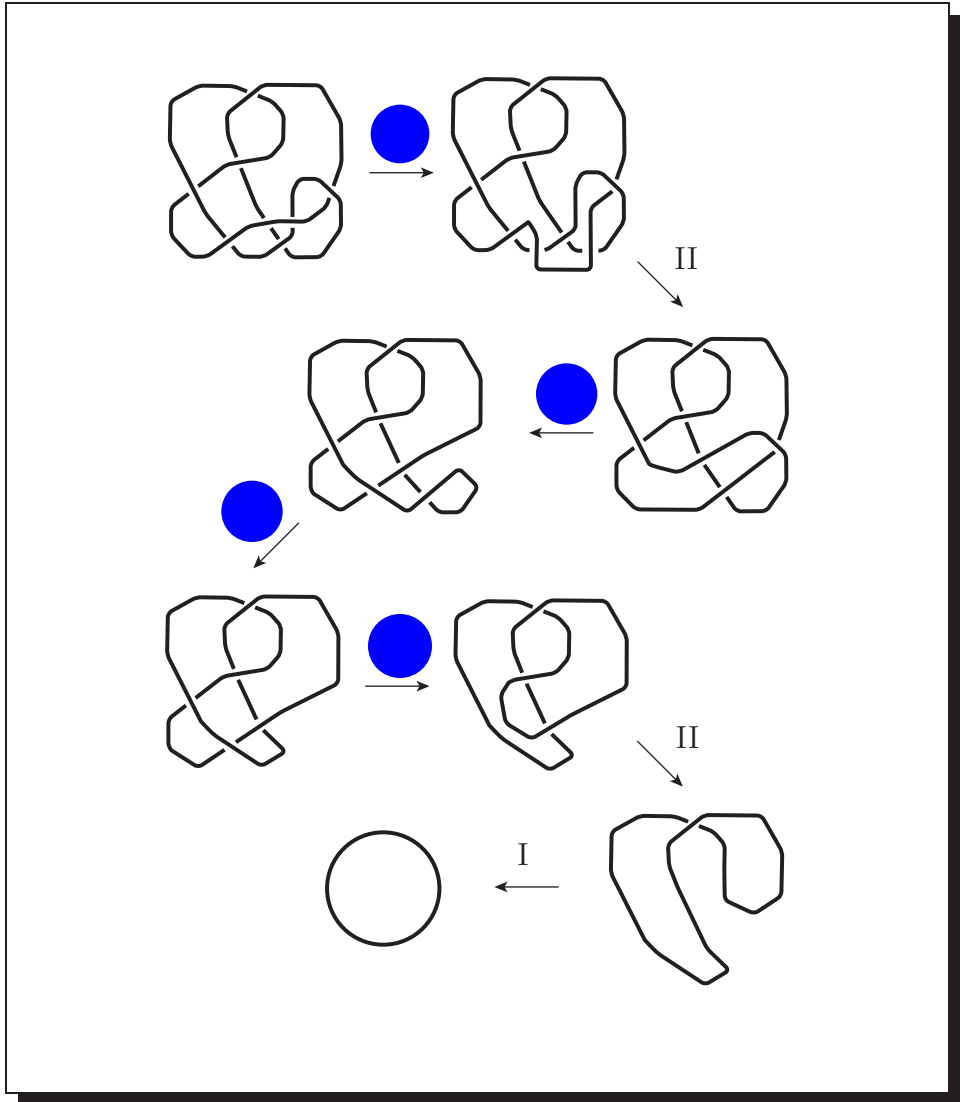
最も簡単な**自明な結び目**の射影図

たとえどんなに複雑な形をした射影図でも、それが表す結び目が自明な結び目（と同じ型をもつ）ならば、適当にライデマイスター移動を何回か使い変形することで「単なる円」にすることができます。





もう少し複雑な自明な結び目 (と同じ型をもつ結び目) の射影図と変形の例をあげておきましょう。



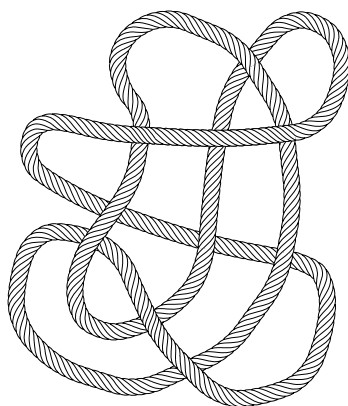
この例の場合は割と簡単に自明な結び目へ変形することができます。しかし、自明な結び目 (と同じ型をもつ結び目) の射影図の中には、一見ただけでは本当に自明な結び目なのかどうか分からないとても複雑なものもあります。

最後に、興味のある方へ演習問題を1つ用意しました。まずは紙と鉛筆で結果を予想し、次に ひも を使って予想が正しいかどうか実際に確かめてみてください。

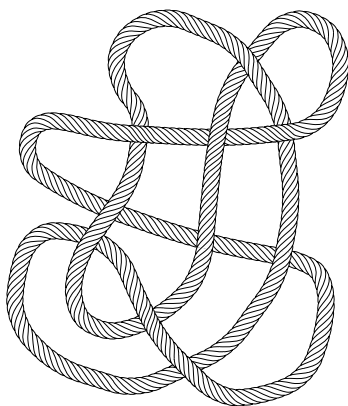
やってみよう！

次の2つの結び目のうち一方は自明な結び目(と同じ型をもつ結び目)です。どちらが自明な結び目でしょうか？

(1)



(2)



## あとがき

この冊子は、著者がサイエンスワールド 2003、おもしろサイエンス in ソラール 2002、第 8 回福岡湧源セミナー等で行なった演示、講演の資料・原稿をもとに今回新たに書き下ろしたものです。数学を専門とする学生のみならず、もっと広く一般の中・高校生までも読者の対象としました。”たのしもう、数理科学 ”という本シリーズの精神にのっとり、数学的に正確な記述をすることは犠牲にして、結び目理論の雰囲気伝えることに重点を置きました。「こんな数学もあるのだなあ」と、ちょっとだけ興味・関心を持っていただければ…。



---

結び目の不思議 I

2003 年 11 月 第 1 版

著者： 宮澤 康行

発行：  山口数理科学  
出版会

---

やてみよりの答え... 自明な結び目(と同一型の結び目)は(2)。(1)は交点数が3の三葉結び目と呼ばれる結び目(と同一型の結び目)。