## 第 1 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{6}}$〕　（配点 60 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ. ただし log は自然対数とする.

**問 1**　次の値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \boxed{\mathbf{1}}.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ **の解答群**

⓪ $-\infty$　① $\infty$　② $-3$　③ $-2$　④ $-1$
⑤ $0$　⑥ $1$　⑦ $2$　⑧ $3$

**解答**　分母 $\sin x$ と分子 $e^x - e^{-x}$ はともに $x \to 0$ の時 $0$ に収束するので, いわゆる $\frac{0}{0}$ の不定形である. 分母と分子はともに微分可能ゆえロピタルの定理が適用できるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{\frac{d}{dx}\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

従って答えは ⑦ である.

**問 2**　$(x,y) \to (0,0)$ のとき, 関数 $g(x,y) = \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ の極限は $\boxed{\mathbf{2}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

⓪ 0 である　① 1 である　② 2 である　③ 3 である
④ $\dfrac{1}{2}$ である　⑤ $\dfrac{1}{3}$ である　⑥ 存在しない

**解答**　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi)$ と置く. この時 $(x,y) \to 0$ とは $r \to +0$ を意味する. また

$$\begin{aligned} g(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{(r\cos\theta - r\sin\theta)^2}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} \\ &= \frac{(\cos\theta - \sin\theta)^2}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\ &= (\cos\theta - \sin\theta)^2 \\ &= 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 1 - \sin 2\theta \end{aligned}$$

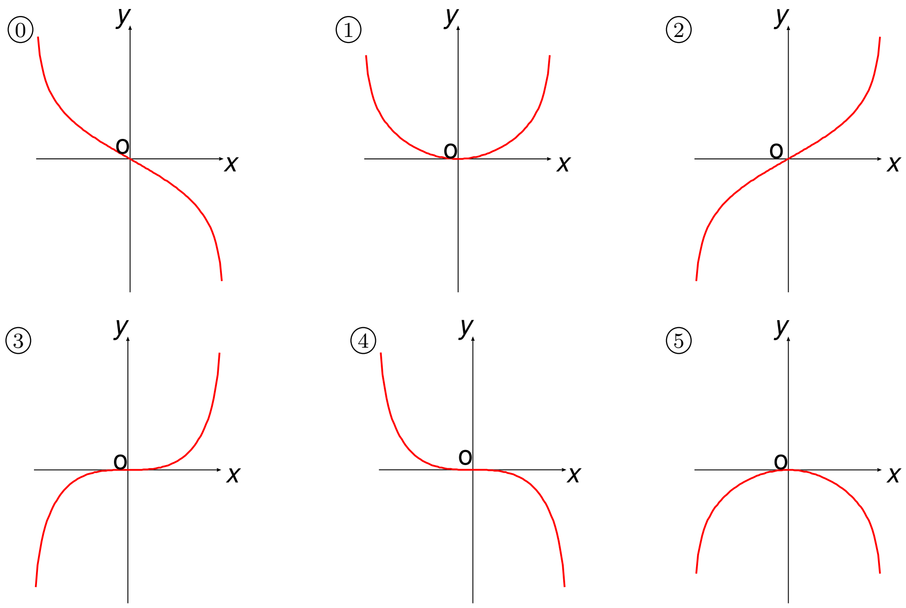
であるから, 近づく角度 $\theta$ を固定して $r \to +0$ とする時

$$\lim_{r \to +0} g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 1 - \sin 2\theta$$

となり, 極限値は $\theta$ により異なる. もし 2 変数関数としての極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ が存在するならば, 近づく方向 $\theta$ に無関係な共通な値に収束する筈であるから, これは 2 変数関数としての極限が存在しないことを示している. 以上より答は ⑥ である.

**問 3** 関数 $y = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$ のグラフの概形は $\boxed{\mathbf{3}}$ であり, マクローリン展開 ($x = 0$ におけるテイラー展開) は $\boxed{\mathbf{4}}$ である. ただし $x$ 軸, $y$ 軸の縮尺は適当に変更してある.

$\boxed{\mathbf{3}}$ の解答群




$\boxed{\mathbf{4}}$ の解答群

⓪ $2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$　① $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$　② $2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$　③ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n+1}$

④ $2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$　⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n}$　⑥ $2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$　⑦ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n}$

**解答**　$y = f(x) = \log(1+x)/(1-x)$ とおくと

$$f(-x) = \log(1-x)/(1+x) = -\log(1+x)/(1-x) = -f(x)$$

が成り立つので奇関数である．従ってそのグラフは原点に関して対称であるが，解答群の ①, ⑤ はそうなっていない．次に

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} > 0 \quad (-1 < x < 1)$$

ゆえ $f(x)$ は単調増加であるが，解答群の ⓪, ①, ④, ⑤ はそうなっていない．

以上より，正解は ② または ③ のどちらかである．ここで $f'(0) = 2$ ゆえグラフの $x = 0$ での接線の傾きは正である．従って答は ② である．

次に初項 $a$ 公比 $r(-1 < r < 1)$ の無限等比級数の和の公式

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

において，$a = 1$, $r = x^2$ と置けば

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} = 2\{1 + x^2 + x^4 + \cdots\} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

が成り立つ．これを項別に積分して $f(0) = 0$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) \\ &= \int_0^x f'(t)\,dt = 2\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\,dt = 2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\,dt = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

が成り立つ．従って答えは ④ である．

**問 4**　次の積分値を求めよ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin 5x \cos^4 2x\,dx = \boxed{\mathbf{5}}.$$

**$\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群**

⓪ $-2$　① $-1$　② $0$　③ $1$　④ $2$　⑤ $-2\pi$　⑥ $-\pi$　⑦ $\pi$　⑧ $2\pi$　⑨ $-\dfrac{\pi}{2}$　ⓐ $\dfrac{\pi}{2}$

**解答**　被積分関数 $|x|\sin 5x\cos^4 2x$ が奇関数, つまり $f(-x)=-f(x)$ を満たすことに注意しよう. そして積分区間が原点に関して対称であることより, その値は

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \int_{\pi}^{0} f(-y)\,(-dy) + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{\pi} f(y)\,dy + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

従って答えは ② である.

**問 5**　$xy$ 平面の集合 $\{(x,y):\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ を $D$ で表すとき,

$$\iint_D e^{2x-y}\,dxdy = \boxed{\mathbf{6}}.$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ **の解答群**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $e^2+e+1$ | ① $e^2-e+1$ | ② $e^2+e-1$ | ③ $e^2-e-1$ |
| ④ $-e^2-e-1$ | ⑤ $\frac{1}{2}e^2+e+1$ | ⑥ $e^2-\frac{1}{2}e+1$ | ⑦ $e^2+e-\frac{1}{2}$ |
| ⑧ $\frac{1}{2}e^2+e+\frac{1}{2}$ | ⑨ $\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e+1$ | ⓐ $\frac{1}{2}e^2-e+\frac{1}{2}$ | ⓑ $\frac{1}{2}e^2+e-\frac{1}{2}$ |

**解答**　重積分を累次積分に直して計算すると

$$
\begin{aligned}
&\iint_D e^{2x-y}\,dxdy \\
=\ & \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{2x-y}\,dy \right\} dx \\
=\ & \int_0^1 e^{2x} \left\{ \int_0^x e^{-y}\,dy \right\} dx \\
=\ & -\int_0^1 e^{2x} \left[ e^{-y} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
=\ & \int_0^1 e^{2x}(1-e^{-x})\,dx \\
=\ & \int_0^1 (e^{2x}-e^{x})\,dx \\
=\ & \left[ \frac{1}{2}e^{2x} - e^{x} \right]_0^1 \\
=\ & \frac{1}{2}(e^2-e^0) - (e^1-e^0) \\
=\ & \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

である．よって答は ⓐ である．

## 第 2 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{7}}$ ～ $\boxed{\mathbf{14}}$〕　（配点 40 点）

以下の空欄のうち $\boxed{\mathbf{10}}$ から $\boxed{\mathbf{13}}$ までには解答群から適当なものを選んでマークし，それ以外の空欄にはあてはまる数字をマークせよ．

$a, b, c$ を正の定数とする．点 $(x, y, z)$ が条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ を満たしながら動くとき，関数 $f(x,y,z)=xyz$ の最大値と最小値を求めるために，次のように考えた．

最大値または最小値をとる点を $(x_0, y_0, z_0)$ とおけば

$$\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}+\frac{{z_0}^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

が成り立つ．ここで

$$g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

とおく．このときラグランジュの未定乗数法によれば，点 $(x_0, y_0, z_0)$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\lambda\frac{\partial g}{\partial z}$$

を満たす実数 $\lambda$ が存在する．これらの式を実際に計算すると，それぞれ

$$y_0z_0=\boxed{\mathbf{7}}\,\lambda\frac{x_0}{a^2},\quad x_0z_0=\boxed{\mathbf{7}}\,\lambda\frac{y_0}{b^2},\quad x_0y_0=\boxed{\mathbf{7}}\,\lambda\frac{z_0}{c^2} \tag{2}$$

である．(2) の 3 つの等式の両辺をそれぞれ $x_0$, $y_0$, $z_0$ 倍した式と (1) より

$$\boxed{\mathbf{8}}\,x_0y_0z_0=2\lambda \tag{3}$$

が分かる．

(i) $\lambda\neq 0$ のときは，(2) と (3) を組み合わせて

$$(x_0, y_0, z_0)=\left(\pm\frac{\boxed{\mathbf{10}}}{\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}, \pm\frac{\boxed{\mathbf{11}}}{\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}, \pm\frac{\boxed{\mathbf{12}}}{\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}\right)$$

である．ただし複号 $(\pm)$ はすべての組み合わせをとる．このとき

$$f(x_0, y_0, z_0)=\pm\frac{\boxed{\mathbf{13}}}{\boxed{\mathbf{9}}\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}$$

が成り立つ．

(ii) $\lambda=0$ のときは，(1) と (2) を同時に満たす点 $(x_0, y_0, z_0)$ は $\boxed{\mathbf{14}}$ 個あり，これらすべての点で

$$f(x_0, y_0, z_0)=0$$

である．

(i), (ii) を合わせると最大値, 最小値はそれぞれ

$$\frac{\boxed{\mathbf{13}}}{\boxed{\mathbf{9}}\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}, \quad -\frac{\boxed{\mathbf{13}}}{\boxed{\mathbf{9}}\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}$$

である．

**$\boxed{10}$ ～ $\boxed{13}$ の解答群**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ $a$ | ① $b$ | ② $c$ | ③ $a^2$ | ④ $b^2$ | ⑤ $c^2$ | ⑥ $ab$ |
| ⑦ $bc$ | ⑧ $ac$ | ⑨ $a^2b^2$ | ⓐ $b^2c^2$ | ⓑ $a^2c^2$ | ⓒ $abc$ | ⓓ $a^2b^2c^2$ |

**解答** 点 $(x_0, y_0, z_0)$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda\frac{\partial g}{\partial z}$$

を実際に計算すると, それぞれ

$$y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0}{a^2}, \quad x_0z_0 = 2\lambda\frac{y_0}{b^2}, \quad x_0y_0 = 2\lambda\frac{z_0}{c^2}$$

である．従って $\boxed{\mathbf{7}}$ の答は ② 2 である．最初の等式の両辺を $x_0$ 倍し, 次は $y_0$ 倍, 最後は $z_0$ 倍してからすべてを辺々加えれば, (1) より

$$3x_0y_0z_0 = 2\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 2\lambda$$

が分かる．従って $\boxed{\mathbf{8}}$ の答は ③ 3 である．

(i) $\lambda \neq 0$ の時は上の等式より $x_0, y_0, z_0$ は 3 つとも 0 でないことに注意する．$2\lambda = 3x_0y_0z_0$ を (7) に代入して

$$y_0z_0 = \frac{3x_0^2y_0z_0}{a^2}, \quad x_0z_0 = \frac{3x_0y_0^2z_0}{b^2}, \quad x_0y_0 = \frac{3x_0y_0z_0^2}{c^2}$$

となるが, 各々の両辺を $y_0z_0$, $x_0z_0$, $x_0y_0$ で割ると $x_0^2 = \frac{a^2}{3}$, $y_0^2 = \frac{b^2}{3}$ $z_0^2 = \frac{c^2}{3}$ が分かる．従って $(x_0, y_0, z_0)$ の候補として

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\pm a}{\sqrt{3}}, \frac{\pm b}{\sqrt{3}}, \frac{\pm c}{\sqrt{3}}\right)$$

の 8 点が得られた．従って $\boxed{\mathbf{9}}$ の答は ③ 3 であり, $\boxed{\mathbf{10}}$, $\boxed{\mathbf{11}}$, $\boxed{\mathbf{12}}$ の答はそれぞれ ⓪ $a$, ① $b$, ② $c$ である．これらの点が本当に $2\lambda = 3x_0y_0z_0$ のもとで

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{y_0^2}{c^2} = 1$$

$$y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0}{a^2}, \quad x_0z_0 = 2\lambda\frac{y_0}{b^2}, \quad x_0y_0 = 2\lambda\frac{z_0}{c^2}$$

を満たすかどうかを実際に代入して検証すれば, 容易に 8 点すべてが満たすことが分かる. 従って複号 (±) は任意の組合せをとる.

またこの時

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\pm abc}{3\sqrt{3}}$$

ゆえ $\boxed{\textbf{13}}$ の答は ⑥$abc$ である.

(ii) $\lambda = 0$ の時は (7) は $y_0 z_0 = x_0 z_0 = x_0 y_0 = 0$ であるが, これは $x_0, y_0, z_0$ のうちの 2 つ以上が 0 であることを意味する. この事実を (1) と組み合わせれば

$$(x_0, y_0, z_0) = (-a, 0, 0), (a, 0, 0), (0, -b, 0), (0, b, 0), (0, 0, -c), (0, 0, c)$$

の 6 個の点が得られる. 従って $\boxed{\textbf{14}}$ の答は ⑥ 6 個である. これらすべての点において $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ である.

$a$, $b$, $c$ がすべて正であるこに注意して (i) と (ii) の場合で得られた極値の候補を並べると

$$-\frac{abc}{3\sqrt{3}} < 0 < \frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

となる. 従って関数 $f(x, y, z) = xyz$ は

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{-b}{\sqrt{3}}, \frac{-c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{-c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{-b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$$

の時, 最大値

$$\frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

をとり.

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{-b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{-c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{-b}{\sqrt{3}}, \frac{-c}{\sqrt{3}}\right)$$

の時に最小値

$$-\frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

をとる.