第５問，第６問

微分方程式

第５問の解答

問１　関数 y が微分方程式 $y'' + 4y = 0$ の解であれば, x の関数 $F(x) = 4y^2 + (y')^2$ に対して合成関数の微分法を用いると

$$F'(x) = \left\{4y^2 + (y')^2\right\}' = 8yy' + 2y'y'' = 2y'(y'' + 4y) = 0$$

となることがわかる．したがって, $F(x)$ は定数関数であり, 初期条件から

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = F(0) = 4(y(0))^2 + (y'(0))^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = 2$$

が得られる．

問２　微分方程式 $y'' - y' - 6y = 3e^{2x}$ に対して, 対応する同次方程式 $y'' - y' - 6y = 0$ の一般解は $y_h = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$（$c_1, c_2$ は任意定数）であり, $y_p = -\frac{3}{4}e^{2x}$ は特殊解の 1 つである．よって, 一般解は $y = y_h + y_p = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} - \frac{3}{4}e^{2x}$ である．したがって, 解答群のうちで解になるものは $\sqrt{3}e^{-2x} - \frac{3}{4}e^{2x}$ である．

問３　初期値問題 $x^2y' + 2y^2 = x^2, \quad y(1) = 2$ を（ $x = 1$ の十分近くで）解くために, $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ とおくと, z を未知関数とする初期値問題 $xz' = -2z^2 - z + 1, \quad z(1) = \dfrac{y(1)}{1} = 2$ が得られ, $\displaystyle\int_2^z \frac{dz}{-2z^2 - z + 1} = \int_1^x \frac{dx}{x}$ となる．ここで, 右辺については, $x = 1$ の十分近くでは x は正であることに注意すれば $\displaystyle\int_1^x \frac{dx}{x} = \log|x| = \log x$ であり, 左辺については被積分関数を部分分数に分解して計算すれば

$$\begin{aligned}
\int_2^z \frac{dz}{-2z^2 - z + 1} &= \int_2^z -\frac{1}{(2z-1)(z+1)}\,dz \\
&= \int_2^z \left\{-\frac{2}{3(2z-1)} + \frac{1}{3(z+1)}\right\} dz \\
&= \left[\frac{1}{3}\log\frac{z+1}{2z-1}\right]_2^z \quad = \frac{1}{3}\log\frac{z+1}{2z-1}
\end{aligned}$$

である（$x = 1$ の十分近くでは z は $z(1) = 2$ の近くを動くので, $\dfrac{z+1}{2z-1}$ は正であると考えてよい）．したがって, $\left(\dfrac{z+1}{2z-1}\right)^{\frac{1}{3}} = x$ であるから, これを z について解くと, $z = \dfrac{x^3+1}{2x^3-1}$ であり, $y = xz = \dfrac{(x^3+1)x}{2x^3-1}$ が得られる．

第６問の解答

微分方程式

$$y'' - 2xy' + x^2 y = (x^2-1)e^{\frac{x^2}{2}}$$

の一般解を求めるために $y(x) = p(x)z(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + x^2 y &= (pz)'' - 2x(pz)' + x^2 pz \\ &= pz'' + 2(p' - xp)z' + (p'' - 2xp' + x^2 p)z \end{aligned}$$

となる. ここで, 関数 p をうまく選んで z' の係数が 0 になるようにするためには, p として微分方程式 $2(p'-xp)=0$ の解のひとつである $p(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ をとればよい. すると,

$$p'' - 2xp' + x^2 p = (e^{\frac{x^2}{2}})'' - 2x(e^{\frac{x^2}{2}})' + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

であるから, z に関する微分方程式

$$e^{\frac{x^2}{2}} z'' + e^{\frac{x^2}{2}} z = (x^2-1)e^{\frac{x^2}{2}}$$

が得られる. $e^{\frac{x^2}{2}}$ は値として 0 をとらないので, この方程式は

$$z'' + z = x^2 - 1$$

となり, これを解けば, c_1, c_2 を任意定数として

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 3$$

が得られる. したがって, もとの微分方程式の一般解は

$$y = pz = e^{\frac{x^2}{2}}(c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 3)$$

である.