EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2021年12月18日（土）
4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．

(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(8) 問題冊子は持ち帰ること．

(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\mathbf{23}}$ は（ $\boxed{\mathbf{23}}$ ）という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

(6) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$，$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

目次

第1分野　微分積分

〔問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{1}}$ 〜 $\boxed{\textbf{16}}$ 〕

問 1　次の 2 つの極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+\cos x)\cos x-3}{2x^2}=\boxed{\textbf{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(\sqrt{1+ex^2}-1\right)-\log x\right\}=\boxed{\textbf{2}}$$

$\boxed{\textbf{1}}$ ・ $\boxed{\textbf{2}}$ の解答群

⓪ 0	① ∞	② $-\infty$		
③ 1	④ 2	⑤ $\dfrac{1}{2}$	⑥ $\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{2}{3}$
⑧ -1	⑨ -2	ⓐ $-\dfrac{1}{2}$	ⓑ $-\dfrac{1}{3}$	ⓒ $-\dfrac{2}{3}$
ⓓ e	ⓔ e^2	ⓕ $\sqrt{e}$	ⓖ $\dfrac{1}{e}$	ⓗ $\dfrac{1}{e^2}$

解説

極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(2+\cos x)\cos x-3}{2x^2}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形なのでロピタルの定理を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(2+\cos x)\cos x-3}{2x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x-2\sin x\cos x}{4x}\\&=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}(1+\cos x)=-1\end{aligned}$$

となる．よって， $\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ⑧ である．

対数の性質 $\log\dfrac{A}{B}=\log A-\log B$ を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(\sqrt{1+ex^2}-1\right)-\log x\right\}&=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+e}-\frac{1}{x}\right)\right\}\\&=\log\sqrt{e}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる．よって， $\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ⑤ である．

問 2　関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\log(1+x^2)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}x$ を考える．

(1)　$f(x)$ の導関数を求めると

$$f'(x)=\boxed{\mathbf{3}}$$

となるので，$f'(x)=0$ の解は $x=\boxed{\mathbf{4}}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{x}{1+x^2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$　　① $\dfrac{x}{1+x^2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

② $\dfrac{1}{1+x^2}\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$　　③ $\dfrac{1}{1+x^2}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

④ $\dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$　　⑤ $\dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

⑥ $\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{\sqrt{3}(1+x^2)}$　　⑦ $\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{\sqrt{3}(1+x^2)}$

⑧ $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$　　⑨ $\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$

ⓐ $\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$　　ⓑ $\dfrac{x}{2(1+x^2)}-\dfrac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ **の解答群**

⓪ 0　　① 1　　② -1　　③ $\dfrac{1}{2}$　　④ $-\dfrac{1}{2}$

⑤ $\dfrac{1}{3}$　　⑥ $-\dfrac{1}{3}$　　⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　⑧ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　⑨ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ⓐ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　ⓑ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　　ⓒ $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　　ⓓ $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$　　ⓔ $-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

(2)　$x=\boxed{\mathbf{4}}$ において，$f(x)$ は $\boxed{\mathbf{5}}$．

$\boxed{\mathbf{5}}$ **の解答群**

⓪ 最大値をとる　① 最小値をとる　② 最小値も最大値もとらない

解説

(1)　$f(x)$ の導関数を求めると

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

となるので，$\boxed{\mathbf{3}}$ の答えは ③ である．また，$\dfrac{1}{1+x^2} \neq 0$ なので，$f'(x) = 0$ の解は $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．よって，$\boxed{\mathbf{4}}$ の答えは ⑨ である．

(2)　$\dfrac{1}{1+x^2} > 0$ なので，$f(x)$ の増減表を作ると

x	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\nearrow$

となる．これより，$f(x)$ は $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ において最小値 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をとることが分かる．よって，$\boxed{\mathbf{5}}$ の答えは ① である．

問 3　定積分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 1}$$

の値を求める．$t = \tan \dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \boxed{\mathbf{6}}$$

であり，$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $t = \boxed{\mathbf{7}}$ なので

$$I = \int_0^{\boxed{7}} \frac{dt}{\boxed{\mathbf{8}}} = \boxed{\mathbf{9}}.$$

$\boxed{6}$ ・ $\boxed{8}$ の解答群

⓪ $1+t$	① $1+2t$	② $2(1+t)$	③ $1+t^2$
④ $2(1+t^2)$	⑤ $(1+t)^2$	⑥ $2+t+t^2$	⑦ $\dfrac{2+t+2t^2}{2}$
⑧ $\dfrac{1}{1+t^2}$	⑨ $\dfrac{2}{1+t^2}$	ⓐ $\dfrac{1}{2(1+t)}$	ⓑ $\dfrac{1}{2(1+t^2)}$

$\boxed{7}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\sqrt{2}$	④ $\sqrt{3}$
⑤ $\dfrac{1}{2}$	⑥ $\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	⑨ ∞

$\boxed{9}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ $\dfrac{1}{3}$
⑤ $\dfrac{2}{9}$	⑥ $\dfrac{8}{9}$	⑦ $\dfrac{16}{9}$	⑧ $\log 2$	⑨ $\log 3$
ⓐ $2\log 2$	ⓑ $2\log 3$	ⓒ $\dfrac{1}{2}\log 2$	ⓓ $\dfrac{1}{2}\log 3$	ⓔ ∞

解説

変数変換 $t = \tan\dfrac{x}{2}$ を考えると

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \cdots \ (*)$$

であり，t を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1+t^2}{2}$$

なので

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{2}{1+t^2}$$

となる．これより，$\boxed{\mathbf{6}}$ の答えは ⑨ である．また $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$t = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ なので，$\boxed{\mathbf{7}}$ の答えは ① である．すると

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 1} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \frac{dx}{dt}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{1+t^2}{4t+1-t^2+1+t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{1+2t} = \left[\frac{1}{2}\log(1+2t)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\log 3
\end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{8}}$ の答えは ①，$\boxed{\mathbf{9}}$ の答えは ⓓ である．

$(*)$ $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と公式 $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2}$$

である．したがって，半角の公式より

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

となる．また 2 倍角の公式より

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

である．積分 I のように被積分関数に三角関数が含まれている場合，$t = \tan\dfrac{x}{2}$ は有用な変数変換なので覚えておこう．

問 4 $t>0$ において，関数 $f(t)$ は微分可能であるとし，正数 x, y に対して $u(x,y)=\dfrac{f(xy)}{x+y}$ とおく．このとき

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\boxed{\mathbf{10}}$$

および

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\boxed{\mathbf{11}}$$

が成り立つ．特に $f(t)=\sqrt{t}$ のとき

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\boxed{\mathbf{12}}$$

が成り立つ．

$\boxed{10}$ ・ $\boxed{11}$ の解答群

⓪ $\dfrac{f(xy)-xyf'(xy)}{x+y}$　① $\dfrac{xyf'(xy)-f(xy)}{x+y}$

② $\dfrac{f(xy)-2xyf'(xy)}{x+y}$　③ $\dfrac{2xyf'(xy)-f(xy)}{x+y}$

④ $\dfrac{f(xy)(1-2xyf'(xy))}{x+y}$　⑤ $\dfrac{f(xy)(2xyf'(xy)-1)}{x+y}$

⑥ $\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}-\dfrac{f'(xy)}{x+y}$　⑦ $\dfrac{f'(xy)}{x+y}-\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}$

⑧ $\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}-\dfrac{xf'(xy)}{x+y}$　⑨ $\dfrac{xf'(xy)}{x+y}-\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}$

ⓐ $\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}-\dfrac{yf'(xy)}{x+y}$　ⓑ $\dfrac{yf'(xy)}{x+y}-\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}$

$\boxed{12}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ u　④ $2u$

⑤ $\dfrac{u}{2}$　⑥ $-u$　⑦ $-2u$　⑧ $-\dfrac{u}{2}$

⑨ $(1-xy)u$　ⓐ $(1-2xy)u$　ⓑ $(xy-1)u$　ⓒ $(2xy-1)u$

解説

関数 $u(x,y)=\dfrac{f(xy)}{x+y}$ を x で偏微分すると，合成関数の偏微分公式から

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f'(xy)}{x+y}\frac{\partial}{\partial x}(xy)-\frac{f(xy)}{(x+y)^2}=\frac{yf'(xy)}{x+y}-\frac{f(xy)}{(x+y)^2}$$

となるので， $\boxed{\mathbf{10}}$ の答えは ⓑ である．同様に y で偏微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xf'(xy)}{x+y}-\frac{f(xy)}{(x+y)^2}$$

となるので

$$\begin{aligned}x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{xyf'(xy)}{x+y}-\frac{xf(xy)}{(x+y)^2}+\frac{xyf'(xy)}{x+y}-\frac{yf(xy)}{(x+y)^2}\\&=\frac{2xyf'(xy)-f(xy)}{x+y}\end{aligned}$$

となる．よって， $\boxed{\mathbf{11}}$ の答えは ③ である．特に $f(t)=\sqrt{t}$ のとき，

$$2tf'(t)-f(t)=2t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}=0$$

となるので，$t=xy$ を代入すると

$$2xyf'(xy)-f(xy)=0$$

である．したがって，$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ となるので， $\boxed{\mathbf{12}}$ の答えは ⓪ である．

問 5　xy 平面上の集合 D が

$$D = \{\, (x,\, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1 \,\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D \frac{y+1}{x+y+1}\, dxdy$$

の値を求める．

(1)　I は

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\boxed{\mathbf{13}}} \frac{y+1}{x+y+1}\, dx \right) dy$$

と表される．

(2)　$I_1(y) = \displaystyle\int_0^{\boxed{\mathbf{13}}} \frac{1}{x+y+1}\, dx$ とおく．変数変換 $z = x + y + 1$ を行うと

$$I_1(y) = \int_{y+1}^{\boxed{\mathbf{14}}} \frac{1}{z}\, dz \ = \ \Big[\log z \Big]_{y+1}^{\boxed{\mathbf{14}}} \ = \ \log \boxed{\mathbf{14}} - \log(y+1)$$

となる．

$\boxed{\mathbf{13}}$ ・ $\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2
③ x	④ $x+1$	⑤ $1-x$
⑥ y	⑦ $y+1$	⑧ $1-y$
⑨ $x+y$	ⓐ $x+y+1$	ⓑ $1-x-y$

(3) 部分積分法を用いると

$$\int_0^1 (y+1)\log(y+1)\,dy = \boxed{\textbf{15}}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (y+1) I_1(y)\,dy \\ &= \int_0^1 (y+1)[\log \boxed{\textbf{14}} - \log(y+1)]\,dy = \boxed{\textbf{16}} \end{aligned}$$

を得る.

15 ・ 16 の解答群

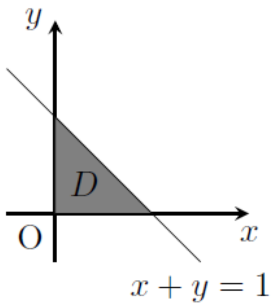
⓪ 0	① $\dfrac{1}{4}$	② $\dfrac{14}{3}$
③ $2\log 2 + 1$	④ $2\log 2 - 1$	⑤ $2\log 2 - \dfrac{3}{4}$
⑥ $3\log 2 + 4$	⑦ $3\log 2 - \dfrac{2}{3}$	⑧ $\dfrac{3\log 2}{2} + \dfrac{1}{4}$
⑨ $\dfrac{7\log 2}{2} - \dfrac{3}{4}$	ⓐ $\dfrac{2\log 2}{3} - \dfrac{16}{9}$	ⓑ $-\log 2 + 3$
ⓒ $-5\log 2 + \dfrac{19}{3}$	ⓓ $-\dfrac{\log 2}{2} + \dfrac{3}{4}$	ⓔ $-\dfrac{\log 2}{3} + \dfrac{1}{9}$

解説

集合 D は

$$D = \{\, (x,\, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1 \,\} = \{\, (x,\, y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1-y \,\}$$

と表せて，図示すると以下のようになる．



(1) 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{y+1}{x+y+1}\,dxdy$ は累次積分によって

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \frac{y+1}{x+y+1}\,dx \right) dy$$

と表すことができる．よって，$\boxed{\textbf{13}}$ の答えは ⑧ である．

(2) 変数変換 $z = x+y+1$ を行うと，$x=0$ のとき $z = y+1$, $x = 1-y$ のとき $z=2$ なので

$$I_1(y) = \int_0^{1-y} \frac{dx}{x+y+1} = \int_{y+1}^{2} \frac{dz}{z} = \Big[\log z \Big]_{y+1}^{2} = \log 2 - \log(y+1)$$

となる．よって，$\boxed{\textbf{14}}$ の答えは ② である．

(3) 部分積分法より

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (y+1)\log(y+1)\,dy &= \int_0^1 \left\{ \frac{(y+1)^2}{2} \right\}' \log(y+1)\,dy \\
&= \left[\frac{(y+1)^2}{2} \log(y+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y+1}{2}\,dy \\
&= 2\log 2 - \left[\frac{(y+1)^2}{4} \right]_0^1 \\
&= 2\log 2 - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

となるので， $\boxed{\mathbf{15}}$ の答えは ⑤ である．したがって，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (y+1) I_1(y)\, dy \\
&= \int_0^1 (y+1)[\log 2 - \log(y+1)]\, dy \\
&= \log 2 \left[\frac{(y+1)^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (y+1) \log(y+1)\, dy \\
&= -\frac{\log 2}{2} + \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

となるので， $\boxed{\mathbf{16}}$ の答えは ⓓ である．

第2分野　線形代数

〔問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{17}}$ 〜 $\boxed{\textbf{35}}$ 〕

問 1　行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とする．

(1)　A の行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\textbf{17}}$ であるので，A は逆行列 A^{-1} をもつ．

(2)　逆行列 A^{-1} の $(2,3)$ 成分は $\boxed{\textbf{18}}$ であり，A^{-1} の行列式の値は $\boxed{\textbf{19}}$ である．

$\boxed{\textbf{17}}$ 〜 $\boxed{\textbf{19}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② -1　③ 3　④ -3　⑤ 5　⑥ -5

⑦ $\dfrac{1}{3}$　⑧ $-\dfrac{1}{3}$　⑨ $\dfrac{1}{5}$　ⓐ $-\dfrac{1}{5}$　ⓑ $\dfrac{1}{7}$　ⓒ $-\dfrac{1}{7}$

解説

(1) A は 4 次正方行列なので，行列式の計算においてサラスの方法をそのまま適用することはできない．そこで行列式の第 2 行と第 4 行から第 1 行をそれぞれ引くと

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

となるので，第 1 列で余因子展開すると 3 次行列式に帰着できる．ここでサラスの方法を使うこともできるが，さらに第 3 行に第 2 行を加え，第 1 列で余因子展開すると

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

となり，より楽に計算ができた．よって， $\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ⑥ である．

(2) 正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，i 行と j 列を取り除いた $n-1$ 次の小行列より作った行列式を D_{ij} で表すとき

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

とおき，これを A の (i,j) 余因子という．$|A| \neq 0$ のとき，逆行列 A^{-1} について

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{ji}\right)$$

が成り立つ．よって，A^{-1} の $(2,3)$ 成分は

$$\frac{A_{32}}{|A|} = \frac{1}{|A|}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{-5} \cdot (-1) \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

なので， $\boxed{\mathbf{18}}$ の答えは ⑨ である．

また，正方行列の積の行列式は各々の行列式の積に等しいことから

$$|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1 \quad (\text{ただし } E \text{ は単位行列})$$

なので

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{5}$$

である．すなわち $\boxed{\mathbf{19}}$ の答えは ⓐ である．

問 2 座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(2, a, 1)$, $\mathrm{B}(1, -1, 1)$, $\mathrm{C}(3, -1, 2)$ がある．ただし，a は定数とする．

(1) $a = \boxed{\mathbf{20}}$ のとき，ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \boxed{\mathbf{21}} \end{pmatrix}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のどちらにも直交する．

(2) $a = \boxed{\mathbf{20}}$ のとき，3 点 A, B, C を含む平面上の任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ は $\boxed{\mathbf{22}}$ を満たす．

$\boxed{\mathbf{20}}$ ・ $\boxed{\mathbf{21}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

$\boxed{\mathbf{22}}$ の解答群

⓪ $x + 2y = 0$　① $2x + y = 1$

② $x + 2y - z = 0$　③ $2x + y - 2z = 3$

④ $x + 2y - z = 2$　⑤ $2x + y - 2z = -1$

⑥ $x + 2y - 3z = 4$　⑦ $2x + y - 4z = 0$

⑧ $x + 2y - 3z = -2$　⑨ $2x + y - 4z = -3$

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}-1\\-1-a\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\-1-a\\1\end{pmatrix}$ である．考えているベクトルを $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\b\end{pmatrix}$ とおく．ベクトル $\boldsymbol{n}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のどちらとも直交するのは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\boldsymbol{n}=-2-1-a=0$ より $a=-3$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\boldsymbol{n}=2-1-a+b=0$ より $b=a-1=-4$ のときである．よって，$\boxed{\mathbf{20}}$，$\boxed{\mathbf{21}}$ の答えは順に ⑨, ⓐ である．

これらは外積を用いても容易に求められる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-1-a\\1\\2(1+a)\end{pmatrix}$$

なので $-1-a=2, b=2(1+a)$ より，$a=-3, b=-4$ を得る．

(2) $a=-3$ のとき，3 点 A, B, C を含む平面を Π とすると，(1) で求めたベクトル $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$ は Π と垂直である．よって，平面 Π 上の任意の点を $P(x,y,z)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}=2(x-1)+(y+1)-4(z-1)=0$$

が成り立ち，これは平面 Π のベクトル方程式である．これより，平面 Π の方程式は $2x+y-4z=-3$ であるから，$\boxed{\mathbf{22}}$ の答えは ⑨ である．

問 3　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ における 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

について考える．ただし，s は定数とする．

(1)　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属になるのは $s = \boxed{\textbf{23}}$ のときである．

(2)　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を並べてできる正方行列を $A = (\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{a}_3)$ と表し，集合 V を

$$V = \left\{ A\boldsymbol{x} \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

とおく． $s = \boxed{\textbf{23}}$ のとき，V は $\boxed{\textbf{24}}$ 次元ベクトル空間であり，$s \neq \boxed{\textbf{23}}$ のとき，V は $\boxed{\textbf{25}}$ 次元ベクトル空間である．

$\boxed{\textbf{23}}$ ～ $\boxed{\textbf{25}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ −1　⑦ −2　⑧ −3　⑨ −4　ⓐ −5

解説

(1) 3次元列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属になるのは

$$|A| = |\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{a}_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & s \end{vmatrix} = -s + 4 = 0$$

のときである．よって，$s = 4$ なので，$\boxed{\mathbf{23}}$ の答えは ④ となる．

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$ なので，V はベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が生成する線形空間である．したがって，V の次元は 行列 A のランク（rank$A$）に等しい．行列 A に対し，行基本変形を行い階段行列にすることにより rank$A$ を計算する．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & s \end{pmatrix} \overset{(T1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & s \end{pmatrix} \overset{(T2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & s-10 \end{pmatrix}$$
$$\overset{(T3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & s-4 \end{pmatrix}$$

(T1) から (T3) に対応する操作はそれぞれ以下の通りである：

(T1) 第 1 行に第 2 行を加える．
(T2) 第 2 行に第 1 行を加え，第 3 行に第 1 行を -5 倍したものを加える．
(T3) 第 3 行に第 2 行を 2 倍したものを加える．

この行基本変形より，$s = 4$ のとき dim$V$ = rank$A = 2$ なので，$\boxed{\mathbf{24}}$ の答えは ② である．また，$s \neq 4$ のとき dim$V$ = rank$A = 3$ なので，$\boxed{\mathbf{25}}$ の答えは ③ である．

(1) で $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属になる s を求める際に，A が正方行列であることから行列式を用いた．しかし，rank$A < 3$ のときこれらは 1 次従属であるので，最初から A を階段行列に変形して rank$A$ を考えたほうが実は効率がよかったといえる．

問 4　4 元連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

を考える．方程式 $(*)$ の拡大係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，行列 A の階数（ランク）は $\boxed{\mathbf{26}}$ であり，方程式 $(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ \boxed{\mathbf{27}} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ \boxed{\mathbf{28}} \\ \boxed{\mathbf{29}} \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (\ t \text{ は任意定数})$$

と表すことができる．

$\boxed{26}$ 〜 $\boxed{29}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ −1　⑧ −2　⑨ −3　ⓐ −4　ⓑ −5　ⓒ −6

解説

拡大係数行列 A に対し，行基本変形を行い階段行列にすることにより $\mathrm{rank}A$ を計算する．この際，連立方程式の解を求めることも考慮して簡約行列になるまで変形する：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \overset{(T1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(T2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(T3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(T4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(T1) から (T4) に対応する操作はそれぞれ以下の通りである：

(T1) 第 2 行に第 1 行の -1 倍を加え，第 3 行に第 1 行の -2 倍を加える．

(T2) 第 3 行に第 2 行の -1 倍を加え，第 2 行を $\frac{1}{2}$ 倍する．

(T3) 第 1 行に第 2 行を 3 倍したものを加える．

(T4) 第 2 行に第 3 行の $\frac{1}{3}$ 倍を加え，第 1 行に第 3 行の $\frac{4}{3}$ 倍を加える．さらに，第 3 行を $-\frac{1}{3}$ 倍する．

これより，$\mathrm{rank}A = 3$ なので， **26** の答えは ③ である．また，方程式 $(*)$ は

$$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{3}x_4 = \frac{4}{3} \\ x_2 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_3 - \frac{1}{3}x_4 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

と同値であることがわかる．すると，その解は $x_4 = 3t$ (t は任意定数）とおけば

$$x_1 = \frac{4}{3} - 4t, \quad x_2 = \frac{1}{3} + 2t, \quad x_3 = -\frac{1}{3} + t$$

と表すことができる．よって， **27** , **28** , **29** の答えは順に⓪, ②, ① となる．

問 5　2 次方程式

$$(*)\qquad x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = 8$$

について考える．

(1)　方程式 $(*)$ は，対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & \boxed{\textbf{30}} \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8$$

と表すことができる．

(2)　(1) で定めた行列 A の固有値は $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \boxed{\textbf{31}}$ である．

λ_1 に対応する固有ベクトルとして　$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \boxed{\textbf{32}} \end{pmatrix}$,

λ_2 に対応する固有ベクトルとして　$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{33}} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

がとれる．

(3)　ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$|\boldsymbol{x}|$ はその長さ（大きさ）を表すものとする．(2) で求めたベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を用いて，正方行列 $P = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{p}_1}{|\boldsymbol{p}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{p}_2}{|\boldsymbol{p}_2|} \end{pmatrix}$ を定める．すると P は $\boxed{\textbf{34}}$ であり，変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

により，方程式 $(*)$ は $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 8$ となる．この方程式が表す図形は $\boxed{\textbf{35}}$ である．

$\boxed{\textbf{30}}$ 〜 $\boxed{\textbf{33}}$ の解答群

⓪ 0							
① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8
⑨ −1	ⓐ −2	ⓑ −3	ⓒ −4	ⓓ −5	ⓔ −6	ⓕ −7	ⓖ −8

$\boxed{\mathbf{34}}$ **の解答群**

⓪ 単位行列　① 対角行列　② 対称行列

③ 交代行列　④ 直交行列　⑤ 上三角行列

$\boxed{\mathbf{35}}$ **の解答群**

⓪ 直線　① 楕円　② 放物線　③ 双曲線

解説

(1) 2 次形式は対称行列を用いて表すことができる．

$$x^2+6\sqrt{3}xy-5y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=ax^2+2bxy+cy^2$$

より，$a=1,\ b=3\sqrt{3},\ c=-5$ となるので， **30** の答えは ⓓ である．

(2) 行列 A の固有方程式 $|\lambda E-A|=0$ (E は単位ベクトル) を考える．

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & \lambda+5 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+5)-27$$

$$=(\lambda+8)(\lambda-4)=0$$

なので，行列 A の固有値は $\lambda_1=4$ と $\lambda_2=-8$ である．よって， **31** の答えは ⓖ である．

各固有値 λ_i $(i=1,2)$ に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めるには，連立方程式

$$(*) \qquad (\lambda_i E-A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (i=1,2)$$

の解 $x,\ y$ を求めればよい．

$\lambda_1=4$ のとき

$$4E-A=\begin{pmatrix} 3 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行変形できる．これは，連立方程式 $(*)$ が $x-\sqrt{3}y=0$ と同値であることを意味している．よって，$x=\sqrt{3}$ のとき $y=1$ となり

$$\lambda_1=4 \text{ に対応する固有ベクトルとして} \quad \boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる．また，$\lambda_2=-8$ のときは

$$-8E-A=\begin{pmatrix} -9 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行変形できるので，同様に，$\sqrt{3}x+y=0$ より $y=\sqrt{3}$ のとき $x=-1$ となり

$$\lambda_2=-8 \text{ に対応する固有ベクトルとして} \quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

がとれることがわかる．よって， **32** , **33** の答えは順に ①, ⑨ となる．

(3) (2) で求めたベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ をその長さ（大きさ）で割って正規化して得られる正方行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{p}_1}{|\boldsymbol{p}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{p}_2}{|\boldsymbol{p}_2|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

である．行列 P の第 1 列と第 2 列のベクトルは，対称行列 A の相異なる固有値に対応する固有ベクトルなので直交しており，作り方からともに大きさは 1 である．よって，行列 P は直交行列であり，$\boxed{\textbf{34}}$ の答えは ④となる．特に，この場合は

$$P = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

と表せるので，P は回転を表している．また，P は A の固有ベクトルを並べた行列なので

$$AP = \begin{pmatrix} 4\dfrac{\boldsymbol{p}_1}{|\boldsymbol{p}_1|} & -8\dfrac{\boldsymbol{p}_2}{|\boldsymbol{p}_2|} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

となり，P は直交行列なので $P^{-1} = {}^tP$ であることから

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

を用いると

$$8 = x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^tPAP \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$
$$= 4X^2 - 8Y^2$$

が成り立つ．つまり，2 次曲線 $x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = 8$ は

$$\frac{X^2}{2} - Y^2 = 1$$

すなわち双曲線を表している．よって，$\boxed{\textbf{35}}$ の答えは ③ である．

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{36}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{52}}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．すべての微分方程式は関数が定義される範囲で考える．また，特殊解は特解ともいう．

問 1　微分方程式

$$(*) \qquad 2x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$$

について考える．

(1)　$y = x \cdot u(x)$ を $(*)$ に代入すると，$u(x)$ に関する微分方程式

$$(**) \qquad u' = \boxed{\mathbf{36}}$$

が導かれる．

$\boxed{\mathbf{36}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{2-u}{2u}$	① $-\dfrac{2-u}{2u}$	② $\dfrac{2+u^2}{xu}$	③ $-\dfrac{2+u^2}{xu}$
④ $\dfrac{2+u^2}{2xu}$	⑤ $-\dfrac{2+u^2}{2xu}$	⑥ $\dfrac{2-u^2}{2xu}$	⑦ $-\dfrac{2-u^2}{2xu}$

(2)　$(**)$ の一般解は

$$(***) \qquad \boxed{\mathbf{37}} = C \quad (C \text{ は } 0 \text{ でない任意定数})$$

と表される．

$\boxed{\mathbf{37}}$ **の解答群**

⓪ $2u + x$	① $x(2+u^2)$	② $\dfrac{2+u^2}{x}$	③ $\dfrac{2+u^2}{e^x}$
④ $2u - x$	⑤ $x(2-u^2)$	⑥ $\dfrac{2-u^2}{x}$	⑦ $\dfrac{2-u^2}{e^x}$

(3)　(∗∗∗) に $u = \dfrac{y}{x}$ を代入すれば，(∗) の一般解が導かれる．これは，xy 平面上の $\boxed{\textbf{38}}$ を表す．特に，$\boxed{\textbf{38}}$ が点 $(-1, 1)$ を通るとき $C = \boxed{\textbf{39}}$ である．

38 の解答群

⓪ 直線　① 円　② 楕円　③ 双曲線
④ 放物線　⑤ サイクロイド　⑥ 懸垂線

39 の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5
⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ -4　ⓐ -5

解説

(1) $(*)$ は同次形と呼ばれる微分方程式である．このタイプの方程式の解法は，$y = x \cdot u(x)$ と置いて変数分離形の場合に帰着させることである．このとき

$$y' = u(x) + xu'(x)$$

であることを用いると，微分方程式 $(*)$ は

$$2x^2 + x^2u^2 + 2x^3uu' = 0$$

と変形され，未知関数 u に関する微分方程式

$$u' = -\frac{2+u^2}{2xu}$$

が導かれる．よって，$\boxed{\textbf{36}}$ の答えは ⑤ である．

(2) 微分方程式 $(**)$ は変数分離形である．

$$\frac{2u}{2+u^2}u' = -\frac{1}{x}$$

と変形して両辺を x で積分すると

$$\log(2+u^2) = -\log|x| + C_1$$

となる．ただし，C_1 は任意定数である．したがって

$$x(2+u^2) = \pm e^{C_1}$$

を得る．ここで，$C = \pm e^{C_1}$ とおけば，C は 0 以外の任意の値をとる．よって，微分方程式 $(**)$ の一般解

$$x(2+u^2) = C$$

が得られ，$\boxed{\textbf{37}}$ の答えは ① となる．

(3) $(***)$ に $u = \dfrac{y}{x}$ を代入すると

$$2x^2 + y^2 = Cx$$

を得る．これは，xy 平面上の楕円を表すので，$\boxed{\textbf{38}}$ の答えは ② となる．さらに，この楕円が点 $(-1, 1)$ を通るとき

$$2(-1)^2 + 1^2 = 3 = -C$$

であるから $C = -3$ となる．よって，$\boxed{\textbf{39}}$ の答えは ⑧ である．

問 2　微分方程式

$$(*) \qquad y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x}$$

について考える．

(1)　対応する同次方程式

$$y' + y\tan x = 0$$

の一般解は，C を任意定数とすると

$$(**) \qquad y = C\,\boxed{\mathbf{40}}$$

と表される．

(2)　$(**)$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x)\cdot\boxed{\mathbf{40}}$ を $(*)$ に代入すると

$$u' = \boxed{\mathbf{41}}$$

が得られる．この方程式の一般解を求めると

$$u(x) = \boxed{\mathbf{42}}$$

であるので，$(*)$ の一般解は $y = \boxed{\mathbf{42}}\cdot\boxed{\mathbf{40}}$ である．

$\boxed{40}$ ・ $\boxed{41}$ の解答群

⓪ x	① $\sin x$	② $\cos x$	③ $\tan x$
	④ $\sin^2 x$	⑤ $\cos^2 x$	⑥ $\tan^2 x$
⑦ $\dfrac{1}{x}$	⑧ $\dfrac{1}{\sin x}$	⑨ $\dfrac{1}{\cos x}$	ⓐ $\dfrac{1}{\tan x}$
	ⓑ $\dfrac{1}{\sin^2 x}$	ⓒ $\dfrac{1}{\cos^2 x}$	ⓓ $\dfrac{1}{\tan^2 x}$

$\boxed{42}$ の解答群

⓪ $\sin x + \tilde{C}$	① $\cos x + \tilde{C}$	② $\tan x + \tilde{C}$
③ $-\sin x + \tilde{C}$	④ $-\cos x + \tilde{C}$	⑤ $-\tan x + \tilde{C}$
⑥ $\dfrac{1}{\sin x} + \tilde{C}$	⑦ $\dfrac{1}{\cos x} + \tilde{C}$	⑧ $\dfrac{1}{\tan x} + \tilde{C}$
⑨ $-\dfrac{1}{\sin x} + \tilde{C}$	ⓐ $-\dfrac{1}{\cos x} + \tilde{C}$	ⓑ $-\dfrac{1}{\tan x} + \tilde{C}$

($\tilde{C}$ は任意定数)

(3) 初期条件 $y(0) = 2$ を満たす方程式 $(*)$ の解は $y = \boxed{43}$ である.

$\boxed{43}$ の解答群

⓪ $\sin x$	① $\cos x$	② $\tan x$
③ $\cos x + \sin x$	④ $2\cos x + \sin x$	⑤ $\cos x + 2\sin x$
⑥ $\cos x - \sin x$	⑦ $2\cos x - \sin x$	⑧ $\cos x - 2\sin x$
⑨ $-\cos x + \sin x$	ⓐ $-2\cos x + \sin x$	ⓑ $-\cos x + 2\sin x$

解説

(1) $(*)$ に対応する同次方程式 $y' + y\tan x = 0$ は変数分離形である．

$$\frac{y'}{y} = -\tan x$$

と変形して両辺を x で積分すると

$$\log|y| = \log|\cos x| + C_1$$

となるので

$$y = \pm e^{C_1}\cos x$$

を得る．ただし， C_1 は任意定数である．ここで，$C = \pm e^{C_1}$ とおけば，C は 0 以外の任意の値をとる．よって，対応する同次方程式の一般解

$$y = C\cos x$$

が得られる．また，定数関数 $y \equiv 0$ も同次方程式の解であることに注意すれば，C は（0 を含む）任意定数となる．よって， $\boxed{\textbf{40}}$ の答えは ② となる．

(2) ここでは定数変化法を用いる．$(**)$ における定数 C を x の関数 $u(x)$ で置き換えて $y = u(x)\cdot\cos x$ を $(*)$ に代入すると

$$u'\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

すなわち

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

が得られる．よって， $\boxed{\textbf{41}}$ の答えは ⓒ である．これを解けば

$$u(x) = \tan x + \tilde{C}$$

を得る．ただし， $\tilde{C}$ は任意定数である．よって， $\boxed{\textbf{42}}$ の答えは ② である．以上より，$(*)$ の一般解は

$$y = (\tan x + \tilde{C})\cos x = \sin x + \tilde{C}\cos x$$

である．

(3) 初期条件 $y(0) = 2$ を満たす方程式 $(*)$ の解は

$$2 = y(0) = 0 + \tilde{C}\cdot 1 = \tilde{C}$$

より

$$y = 2\cos x + \sin x$$

である．よって， $\boxed{\textbf{43}}$ の答えは ④ である．

問 3 微分方程式

$$(*) \qquad y'' - (y')^2 = 1$$

について考える．

(1) $z = y'$ とおくと，$(*)$ は z に関する微分方程式

$$\frac{dz}{dx} - z^2 = 1$$

となる．これを解いて

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$$

より

$$\boxed{\mathbf{44}} = x + C_1 \qquad (C_1 \text{ は任意定数})$$

を得る．

$\boxed{44}$ の解答群

⓪ $\dfrac{2z}{(z^2+1)^2}$	① $\dfrac{-2z}{(z^2+1)^2}$	② $\log(z^2+1)$
③ $\sin z$	④ $\cos z$	⑤ $\tan z$
⑥ $\dfrac{1}{\sin z}$	⑦ $\dfrac{1}{\cos z}$	⑧ $\dfrac{1}{\tan z}$
⑨ $\sin^{-1} z$	ⓐ $\cos^{-1} z$	ⓑ $\tan^{-1} z$

(2) さらに

$$y' = z = \boxed{\mathbf{45}}$$

であることから $(*)$ の一般解は

$$y = \int \boxed{\mathbf{45}}\, dx = \boxed{\mathbf{46}} + C_2 \qquad (C_2 \text{ は任意定数})$$

である．

$\boxed{45}$ ・ $\boxed{46}$ の解答群

⓪ $\sin(x + C_1)$	① $\cos(x + C_1)$	② $\tan(x + C_1)$
③ $-\sin(x + C_1)$	④ $-\cos(x + C_1)$	⑤ $-\tan(x + C_1)$
⑥ $\sin^{-1}(x + C_1)$	⑦ $\cos^{-1}(x + C_1)$	⑧ $\tan^{-1}(x + C_1)$
⑨ $\log\lvert\cos(x + C_1)\rvert$	ⓐ $-\log\lvert\cos(x + C_1)\rvert$	

解説

(1) 微分方程式 (∗) は，$z = y'$ とおくと $\dfrac{dz}{dx} - z^2 = 1$ と表せて，これは z に関する 1 階の変数分離形微分方程式である．これを

$$\frac{1}{z^2+1}\frac{dz}{dx} = 1$$

と変形して両辺を x で積分すると

$$\tan^{-1} z = x + C_1$$

となる．ここで，C_1 は任意定数である．よって，$\boxed{\textbf{44}}$ の答えは ⓑ である．

(2) 逆三角関数の定義から $\tan^{-1} z = x + C_1$ は

$$z = \tan(x + C_1)$$

と表せるので，$\boxed{\textbf{45}}$ の答えは ② である．また，$y' = z$ であることから，上式の両辺を x で積分すると

$$y = -\log|\cos(x + C_1)| + C_2$$

が得られる．ここで，C_2 は任意定数である．よって，$\boxed{\textbf{46}}$ の答えは ⓐ である．

問 4　微分方程式

$$(*) \qquad 2y'' + y' - y = 3e^{-x}$$

について考える．

(1)　対応する同次方程式

$$2y'' + y' - y = 0$$

の一般解を y_h とすれば，$y_h = \boxed{\textbf{47}}$ である．

$\boxed{\textbf{47}}$ **の解答群**

⓪ $C_1e^{x} + C_2e^{-x}$　① $C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2e^{-x}$　② $C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2e^{-x}$

③ $C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2e^{x}$　④ $C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2e^{x}$　⑤ $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$

⑥ $C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$　⑦ $C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$　⑧ $C_1e^{x} + C_2e^{2x}$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2)　一方，$y_p = \boxed{\textbf{48}} \cdot e^{-x}$ は $(*)$ の特殊解の 1 つであるので，$(*)$ の一般解は $y = y_h + y_p = \boxed{\textbf{47}} + \boxed{\textbf{48}} \cdot e^{-x}$ である．

$\boxed{\textbf{48}}$ **の解答群**

⓪ 1　① -1　② 3　③ -3　④ x　⑤ $-x$

⑥ $3x$　⑦ $-3x$　⑧ x^2　⑨ $-x^2$　ⓐ $3x^2$　ⓑ $-3x^2$

(3)　初期条件 $y(0) = 0$，$y'(0) = 0$ を満たす方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ は $x \to \infty$ のとき $\boxed{\textbf{49}}$．

$\boxed{\textbf{49}}$ **の解答群**

⓪ 0 に収束する　① 1 に収束する

② $+\infty$ に発散する　③ $-\infty$ に発散する

④ 振動する

解説

(1) 同次方程式 $2y'' + y' - y = 0$ の特性方程式

$$2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

の解は $\lambda = \frac{1}{2}$, -1 である．すると，同次方程式の一般解 y_h は

$$y_h = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x} \qquad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{47}}$ の答えは ② である．

(2) 対応する同次方程式の特性方程式が 2 つの実数解を持ち，$(*)$ の右辺（非同次項）$3e^{-x}$ が同次方程式の解であるから，$(*)$ の特殊解 y_p として，$y_p = axe^{-x}$ （ a は定数）という形のものがとれる．このとき，a の値を求めるために y_p を $(*)$ に代入すれば

$$y_p' = ae^{-x} - axe^{-x}, \quad y_p'' = -2ae^{-x} + axe^{-x}$$

より

$$2(-2ae^{-x} + axe^{-x}) + (ae^{-x} - axe^{-x}) - axe^{-x} = -3ae^{-x} = 3e^{-x}$$

となるから，$a = -1$ である．よって，$y_p = -xe^{-x}$ は $(*)$ の特殊解の 1 つであり，$\boxed{\mathbf{48}}$ の答えは ⑤ である．以上より，$(*)$ の一般解は

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x} - xe^{-x}$$

である．

(3) 初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ を満たす方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ は

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} - C_2 e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$$

であることを用いると

$$0 = C_1 + C_2, \quad 0 = \frac{1}{2} C_1 - C_2 - 1$$

となるので，$C_1 = \frac{2}{3}$, $C_2 = -\frac{2}{3}$ を得る．すると，与えられた初期条件を満たす解 $y(x)$ は

$$y(x) = \frac{2}{3} e^{\frac{1}{2}x} - \frac{2}{3} e^{-x} - xe^{-x}$$

である．$x \to \infty$ のとき，上式の右辺の第 2 項と第 3 項は 0 に収束するが，第 1 項が $+\infty$ に発散するので，解 $y(x)$ は $+\infty$ に発散する．よって，$\boxed{\mathbf{49}}$ の答えは ② である．

問 5　k を正の定数とする．微分方程式

$$(*) \qquad y'' + k^2 y = 0$$

について考える．

(1)　微分方程式 $(*)$ の一般解

$$y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

は $(f_1(x), f_2(x)) = \left(\boxed{\mathbf{50}} \right)$ で与えられる．このとき $f_1(x), f_2(x)$ のロンスキー行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{51}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{50}}$ の解答群

⓪ $1,\ x$	① $x,\ x^2$	
② $e^{kx},\ e^{-kx}$	③ $e^{\sqrt{k}x},\ e^{-\sqrt{k}x}$	④ $e^{k^2x},\ e^{-k^2x}$
⑤ $\cos kx,\ \sin kx$	⑥ $\cos\sqrt{k}x,\ \sin\sqrt{k}x$	⑦ $\cos k^2x,\ \cos k^2x$

$\boxed{\mathbf{51}}$ の解答群

⓪ 0	① x	② x^2	③ $k\cos^2 x$	④ $k\sin^2 x$	⑤ ke^{kx}
⑥ k	⑦ $\sqrt{k}$	⑧ k^2	⑨ $-2k$	ⓐ $-2\sqrt{k}$	ⓑ $-2k^2$

(2)　ℓ を正の定数とする．微分方程式 $(*)$ が，$y(0) = 0,\ y(\ell) = 0$ を満たし，定数関数ではない解をもつための必要十分条件は，$k\ell = \boxed{\mathbf{52}}$ である．

$\boxed{\mathbf{52}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3
④ $\dfrac{e}{n}$	⑤ e	⑥ ne	⑦ n^2e
⑧ $\dfrac{\pi}{n}$	⑨ $\dfrac{n\pi}{2}$	ⓐ $n\pi$	ⓑ $2n\pi$

(n は自然数)

解説

(1) $(*)$ の特性方程式

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \quad (k \text{ は正定数})$$

の解は $\lambda = \pm ki$ (i は虚数単位) であるので，$(*)$ の一般解は

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

である．よって，$\boxed{\mathbf{50}}$ の答えは ⑤ である．

次に，$f_1(x) = \cos kx$，$f_2(x) = \sin kx$ のロンスキー行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -k\sin kx & k\cos kx \end{vmatrix} = k\cos^2 kx + k\sin^2 kx = k$$

であるから，$\boxed{\mathbf{51}}$ の答えは ⑥ である．

(2) 微分方程式 $(*)$ の解が条件 $y(0) = 0,\ y(\ell) = 0$ （これを境界条件という）を満たすとき

$$0 = C_1, \quad 0 = C_1 \cos k\ell + C_2 \sin k\ell$$

が成り立つことから，$C_1 = C_2 = 0$ または $C_1 = 0,\ \sin k\ell = 0$ を得る．$C_1 = C_2 = 0$ のとき，微分方程式 $(*)$ の解は $y \equiv 0$ となるので，定数関数ではないという条件に反する．

$C_1 = 0,\ \sin k\ell = 0$ のとき，第 2 の関係式 $\sin k\ell = 0$ より $k\ell = n\pi$ を得る．ここで，n は整数であるが， $k > 0, \ell > 0$ より正の整数，つまり自然数である．よって，$\boxed{\mathbf{52}}$ の答えは ⓐ である．このとき，微分方程式 $(*)$ の解は

$$y = C_2 \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

である．

第4分野　確率・統計

〔問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{53}}$ 〜 $\boxed{\textbf{72}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$，$V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1　(1)　確率変数 X, Y の確率分布がそれぞれ

X の値	1	2	3
確率	$\frac{1}{10}$	a	b

Y の値	4	5	6
確率	$\frac{2}{5}$	a	c

(a, b, c は定数)

で与えられていて，$E(Y) = 5$ が成り立つとする．このとき $c = \boxed{\textbf{53}}$ であり，

$$E\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \boxed{\textbf{54}}, \qquad V(Y) = \boxed{\textbf{55}}$$

である．

$\boxed{\textbf{53}}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{3}{10}$　④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{1}{2}$
⑥ $\frac{3}{5}$　⑦ $\frac{7}{10}$　⑧ $\frac{9}{10}$　⑨ 1

$\boxed{\textbf{54}}$ ・ $\boxed{\textbf{55}}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ 1
⑥ 2　⑦ $\frac{11}{5}$　⑧ $\frac{13}{5}$　⑨ 3　ⓐ $\frac{17}{5}$　ⓑ $\frac{19}{5}$
ⓒ $\frac{7}{2}$　ⓓ $\frac{39}{10}$　ⓔ $\frac{14}{25}$　ⓕ $\frac{41}{100}$

(2) 確率変数 X がパラメータ λ をもつポアソン分布に従っている．すなわち

$$P\left(X=n\right)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},\qquad n=0,1,2,\ldots$$

とする．また，$E(X)=3$ であるとする．このとき $\lambda=$ **56** であり，

$$P(X\geqq 1)=\boxed{\mathbf{57}}$$

となる．

56 **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ $\frac{1}{2}$　⑦ $\frac{1}{3}$　⑧ $\frac{1}{4}$　⑨ $\frac{1}{5}$　ⓐ $\frac{1}{6}$

57 **の解答群**

⓪ 0

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{1}{4}$　⑥ $\frac{3}{4}$

⑦ e　⑧ e^2　⑨ e^3　ⓐ e^{-1}　ⓑ e^{-2}　ⓒ e^{-3}

ⓓ $1-e^{-1}$　ⓔ $1-e^{-2}$　ⓕ $1-e^{-3}$

解説

(1) 全事象の確率は 1 であるから

$$1 = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = \frac{1}{10}+a+b,$$
$$1 = P(Y=4)+P(Y=5)+P(Y=6) = \frac{2}{5}+a+c$$

であり，Y の期待値について

$$5 = E(Y) = \sum_{k=4}^{6} k\cdot P(Y=k) = 4\cdot\frac{2}{5}+5a+6c = \frac{8}{5}+5a+6c$$

が成り立つ．これら 3 つの式から a,b,c の値を求めると

$$a=\frac{1}{5},\quad b=\frac{7}{10},\quad c=\frac{2}{5}$$

である．よって，$\boxed{\mathbf{53}}$ の答えは ④ である．

一方，X の期待値は

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{3} k\cdot P(X=k) \\ &= 1\cdot\frac{1}{10}+2a+3b = \frac{1}{10}+\frac{2}{5}+\frac{21}{10} = \frac{13}{5} \end{aligned}$$

であるから

$$E\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(X)+E(Y)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{13}{5}+5\right) = \frac{19}{5}$$

を得る．よって，$\boxed{\mathbf{54}}$ の答えは ⓑ である．

また，Y の分散は

$$\begin{aligned} V(Y) = E[(Y-E(Y))^2)] &= \sum_{k=4}^{6}(k-E(Y))^2\cdot P(Y=k) \\ &= (4-5)^2\cdot\frac{2}{5}+(5-5)^2\cdot a+(6-5)^2\cdot c \\ &= \frac{2}{5}+0+\frac{2}{5} \quad = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

である．よって，$\boxed{\mathbf{55}}$ の答えは ④ である．

(2) パラメータ λ をもつポアソン分布に従う確率変数 X の期待値は $E(X)=\lambda$ である．実際に，指数関数のマクローリン展開の公式 $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ より

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot P(X=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{\lambda\cdot\lambda^{n-1}}{n!} \qquad (\because\ n=0 \text{ に対応する項は } 0 \text{ なので和から取り除いた}) \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (\because\ k=n-1 \text{ と置いた}) \\
&= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} \qquad = \lambda.
\end{aligned}
$$

したがって，$E(X)=3$ であれば，$\lambda=3$ である．よって， $\boxed{\mathbf{56}}$ の答えは ③ である．さらに， 全事象の確率は 1 であるから

$$
P(X\geqq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}=1-e^{-3}
$$

となる．よって， $\boxed{\mathbf{57}}$ の答えは ⓕ である．

問 2　確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が，正の定数 a を用いて

$$f(x) = \begin{cases} a\,|\sin x \cos x|, & |x| \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

で与えられている．このとき $a = \boxed{\mathbf{58}}$ であり，$P\left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq X \leqq \dfrac{\pi}{4}\right) = \boxed{\mathbf{59}}$ である．また X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とすると，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 0$ においては $F(x) = \boxed{\mathbf{60}} \cdot \cos^2 x$ である．

$\boxed{58}$ 〜 $\boxed{60}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ $\dfrac{1}{4}$	
⑤ $\dfrac{3}{4}$	⑥ $\dfrac{1}{8}$	⑦ $\dfrac{3}{8}$	⑧ $\dfrac{5}{8}$	⑨ $\dfrac{7}{8}$	
ⓐ π	ⓑ $\dfrac{\pi}{2}$	ⓒ $\dfrac{\pi}{4}$	ⓓ $\dfrac{3\pi}{4}$	ⓔ $-\sin x$	ⓕ $\dfrac{\sin^2 x}{2}$

解説

全事象の確率は 1 であるから

$$\begin{aligned}1 = P(-\infty < X < \infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\,|\sin x\cos x|\,dx \\ &= 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx \qquad (\because\ |\sin x\cos x| \text{ は偶関数}) \\ &= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx \quad = a\end{aligned}$$

が成り立つ．よって， $a = 1$ であるから， $\boxed{\textbf{58}}$ の答えは ① である．また，同様の計算により

$$\begin{aligned}P(-\frac{\pi}{4} \leqq X \leqq \frac{\pi}{4}) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\,|\sin x\cos x|\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx \quad = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから， $\boxed{\textbf{59}}$ の答えは ③ である．

さらに，分布関数 $F(x)$ について， $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned}F(x) = P(X \leqq x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} a\,|\sin t\cos t|\,dt \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t\cos t\,dt \qquad (\because\ \text{積分区間において } \sin x\cos x < 0\ ) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin 2t\,dt \\ &= \frac{1}{4}(\cos 2x + 1) \quad = \frac{1}{2}\cos^2 x\end{aligned}$$

が成り立つ．よって， $\boxed{\textbf{60}}$ の答えは ③ である．

問 3 (1) 2 つの事象 A, B に対し，事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す．

$$P(A) = \frac{1}{2}P(B), \qquad P(A|B) = \frac{1}{6}$$

のとき，$P(B|A) =$ **61** である．さらに事象 A, B が独立であるとき，$P(A) =$ **62** , $P(A \cup B) =$ **63** である．

61 〜 **63** **の解答群**

⓪ 0 ① 1

② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{6}$ ⑥ $\frac{4}{9}$ ⑦ $\frac{5}{9}$ ⑧ $\frac{1}{12}$ ⑨ $\frac{1}{18}$

(2) m, σ, p を定数とし $\sigma > 0$, $0 < p < 1$ とする．確率変数 X は $E(X) = m$, $V(X) = \sigma^2$ を満たし，確率変数 Y のとりうる値は 0 と 1 のみで $P(Y = 1) = p$ であるとする．X と Y が独立のとき，積 XY の期待値と分散を求める．まず X と Y は独立なので $E(XY) =$ **64** である．また Y のとりうる値が 0 と 1 なので $Y^2 =$ **65** である．したがって

$$E((XY)^2) = E(X^2)E(Y^2) = \boxed{\textbf{66}}$$

が成り立つので $V(XY) =$ **67** である．

64 **の解答群**

⓪ 0 ① 1 ② p ③ $1-p$ ④ $m+p$ ⑤ $m-p$

⑥ mp ⑦ $m(1-p)$ ⑧ $mp(1-p)$

65 **の解答群**

⓪ 0 ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ Y ④ $-Y$ ⑤ $2Y$ ⑥ pY

66 ・ **67** の解答群

⓪ 0　① 1　② $p\sigma + m$　③ $\sigma^2 + m^2$

④ $p(\sigma^2 + m^2)$　⑤ $p\sigma^2 + p(1-p)m^2$　⑥ $mp(1-p)$　⑦ $p^2\sigma^2$

解説

(1) 条件付き確率の定義より

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{2}P(B)} \\ &= \frac{2P(A\cap B)}{P(B)} = 2P(A|B) = 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である．よって，$\boxed{\textbf{61}}$ の答えは ③ である．

また，事象 A, B が独立であるとき，$P(A|B) = P(A)$ が成り立つ．実際に，

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

である．したがって，

$$P(A) = P(A|B) = \frac{1}{6}$$

であるから，$\boxed{\textbf{62}}$ の答えは ④ である．さらに，

$$P(B) = 2P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(A\cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

より

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{4}{9}$$

を得る．よって，$\boxed{\textbf{63}}$ の答えは ⑥ である．

(2) Y のとりうる値は $0, 1$ であり，全事象の確率は 1 なので

$$P(Y=0) = 1 - P(Y=0) = 1 - p$$

となるから

$$E(Y) = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$$

が成り立つ．X, Y が独立のとき，積 XY の期待値は

$$E(XY) = E(X)E(Y) = mp$$

である．よって，$\boxed{\textbf{64}}$ の答えは ⑥ である．また，Y のとりうる値 $0, 1$ は 2 乗しても変わらない，つまり $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ であるから，$Y^2 = Y$ が成り立つ．よって，$\boxed{\textbf{65}}$ の答えは ③ である．さらに，X, Y が独立ならば X^2 と Y^2 も独立なので

$$E\left((XY)^2\right) = E(X^2)E(Y^2) = \{V(X) + E(X)^2\}E(Y) = p(\sigma^2 + m^2)$$

である．これより，

$$\begin{aligned} V(XY) &= E((XY)^2) - E(XY)^2 \\ &= p(\sigma^2 + m^2) - (mp)^2 \quad = p\sigma^2 + p(1-p)m^2 \end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{\textbf{66}}$，$\boxed{\textbf{67}}$ の答えは順に ④, ⑤ である．

問 4 ある温度計の測定誤差 (測定値から真値を引いた値) は，製造時の記録によると，0°C から 20°C の範囲では，平均 0°C, 標準偏差 0.3°C の正規分布に従うものであった．ところが数年経ったいま，正確に 10°C と分かっている液体を測定する操作を，測定値が独立になる条件で 9 回実施したところ，測定誤差の標本平均は 0.2°C であった．この温度計の機構上，現在でも測定誤差は標準偏差 0.3°C の正規分布に従っていると考えられるが，測定誤差の平均は経年変化により上昇した可能性がある．そこで，現在の測定誤差の平均を μ°C, 標準偏差を 0.3°C として，μ に対する

帰無仮説 $H_0 : \mu = 0$

対立仮説 $H_1 : \mu > 0$

の片側検定を有意水準 5% で行うことにした．

n 回目の測定誤差を確率変数 X_n で表すと，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{9}$$

は平均 **68**，標準偏差 **69** の正規分布に従う．よって帰無仮説 H_0 のもとでは，

$$Z = \frac{\overline{X} - \boxed{70}}{\boxed{69}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である．正規分布表によれば

$$P(Z \geqq 1.645) \fallingdotseq 0.05$$

である．一方，標本平均 $\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = 0.2$ なので，Z の実現値は $z =$ **71** であり，H_0 は有意水準 5% で **72**．

68 の解答群

⓪ $\frac{\mu}{81}$　① $\frac{\mu}{9}$　② $\frac{\mu}{3}$　③ μ　④ 3μ　⑤ 9μ　⑥ 81μ

69 〜 **71** の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 9　④ 10

⑤ 0.1　⑥ 0.2　⑦ 0.3　⑧ 0.9　⑨ 2.7　ⓐ 8.1　ⓑ 10.2

ⓒ $\frac{1}{270}$　ⓓ $\frac{1}{90}$　ⓔ $\frac{1}{30}$

72 の解答群

⓪ 棄却される　　① 採択される

解説

それぞれの回の測定誤差を表す確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_9$ は全て同じ分布，平均 μ, 標準偏差 0.3 の正規分布に従っていると考えているので，$\overline{X}$ の期待値（平均）は

$$\begin{aligned}E(\overline{X}) &= E\left(\frac{1}{9}\{X_1 + X_2 + \cdots + X_9\}\right)\\ &= \frac{1}{9}\{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_9)\}\\ &= \frac{1}{9}\cdot 9\mu \quad = \mu\end{aligned}$$

である．よって，$\boxed{\textbf{68}}$ の答えは ③ である．また，$X_1, X_2, \ldots, X_9$ は互いに独立であるから，$\overline{X}$ の分散は

$$\begin{aligned}V(\overline{X}) &= V\left(\frac{1}{9}\{X_1 + X_2 + \cdots + X_9\}\right)\\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^2 V(X_1 + X_2 + \cdots + X_9)\\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^2 \{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_9)\}\\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot 9 \cdot 0.3^2 \quad = \frac{0.3^2}{9}\end{aligned}$$

である．よって，$\overline{X}$ の標準偏差は $\sqrt{V(\overline{X})} = 0.1$ となり，$\boxed{\textbf{69}}$ の答えは ⑤ である．

さて，帰無仮説 H_0 のもとでは $\mu = 0$ であるから

$$Z = \frac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sqrt{V(\overline{X})}} = \frac{\overline{X} - 0}{0.1}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．よって，$\boxed{\textbf{70}}$ の答えは ⓪ である．また，Z の実現値は

$$z = \frac{\overline{x} - 0}{0.1} = \frac{0.2}{0.1} = 2$$

となり，これは棄却域 $z \geqq 1.645$ に含まれる．したがって，H_0 は有意水準 5% で棄却される．よって，$\boxed{\textbf{71}}$，$\boxed{\textbf{72}}$ の答えは順に ②, ⓪ である．