EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2023年12月9日（土）
4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

＊ 受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．
(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．
(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(8) 問題冊子は持ち帰ること．
(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\textbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は, 前に現れた番号であることを表す．したがって, 例えば $\boxed{\textbf{23}}$ には $\boxed{\textbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\textbf{23}}$ は（$\boxed{\textbf{23}}$）という意味である．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-\boxed{\textbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

(6) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

問１　次の 2 つの極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{3x^2} = \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin^{-1}\frac{2}{x} = \boxed{\mathbf{2}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ -1	④ -2
⑤ $\frac{1}{2}$	⑥ $\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{1}{4}$	⑧ $\frac{1}{6}$	
⑨ $-\frac{1}{2}$	ⓐ $-\frac{1}{3}$	ⓑ $-\frac{1}{4}$	ⓒ $-\frac{1}{6}$	
ⓓ e	ⓔ π	ⓕ $\frac{\pi}{2}$	ⓖ $+\infty$	ⓗ $-\infty$

解説

1つ目は $\dfrac{0}{0}$ の不定形である．そこでロピタルの定理を適用し，分子，分母をそれぞれ微分して極限をとる．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{3x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\log(1+x)-x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{6x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)}{6x(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{6(1+x)} = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ⓒ である．

2つ目は $\infty\times 0$ の不定形である．極限値を求めるために，まず $\dfrac{2}{x}=s$ とおく．ここで $x\to\infty$ のとき $s\to +0$ であるので

$$\lim_{x\to\infty} x\sin^{-1}\frac{2}{x} = \lim_{s\to +0}\frac{2\sin^{-1}s}{s}$$

となる．更に $\sin^{-1}s=t$ とおくと $s=\sin t$ で，$s\to +0$ のとき $t\to +0$ であるので

$$\lim_{s\to +0}\frac{2\sin^{-1}s}{s} = \lim_{t\to +0}\frac{2t}{\sin t}$$

となる．$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ に注意すれば，

$$\lim_{t\to +0}\frac{2t}{\sin t} = \lim_{t\to +0}\frac{2}{\frac{\sin t}{t}} = 2$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ② である．

問 2　実数全体で連続な関数 $f(x)$ に対し，$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるならば，微分積分学の基本定理より，実数 a, b $(a < b)$ について

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ．よって，c を定数として，関数 $F_1(x)$ と $F_2(x)$ をそれぞれ

$$F_1(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad F_2(x) = \int_c^x tf(t)\,dt$$

と定義すると

$$\frac{d}{dx}F_1(x) = \boxed{\mathbf{3}}, \quad \frac{d}{dx}F_2(x) = \boxed{\mathbf{4}}$$

となる．さらに，関数 $F_3(x)$ を $F_3(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} tf(t)\,dt$ と定義すると

$$\frac{d}{dx}F_3(x) = \boxed{\mathbf{5}}$$

となる．

$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ の解答群

⓪ $f(x)$	① $f(x^2) - f(x)$	② $2xf(x^2) - f(x)$
③ $xf(x)$	④ $xf(x^2) - xf(x)$	⑤ $2x^2f(x^2) - xf(x)$
⑥ $2f(x^2)$	⑦ $x^2f(x^2) - xf(x)$	⑧ $2x^3f(x^2) - xf(x)$
⑨ $2xf(x^2)$	ⓐ $x^4f(x^2) - x^2f(x)$	ⓑ $2x^4f(x^2) - xf(x)$

解説

(1) 関数 $F_1(x), F_2(x)$ において，$F(t)$ を $f(t)$ の原始関数とし，$G(t)$ を $tf(t)$ の原始関数とすると，微分積分学の基本定理より

$$F_1(x) = F(x) - F(c), \quad F_2(x) = G(x) - G(c)$$

が成り立つ．このとき，$F'(t) = f(t), G'(t) = tf(t)$ であることに注意すれば

$$\frac{d}{dx}F_1(x) = (F(x) - F(c))' = F'(x) = f(x),$$
$$\frac{d}{dx}F_2(x) = (G(x) - G(c))' = G'(x) = xf(x)$$

となるので，$\boxed{\mathbf{3}}$ の答えは ⓪，$\boxed{\mathbf{4}}$ の答えは ③である．

(2) $tf(t)$ の原始関数は $G(t)$ であるので，微分積分学の基本定理より

$$F_3(x) = \int_x^{x^2} tf(t)\,dt = G(x^2) - G(x)$$

が成り立つ．合成関数の微分に注意すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F_3(x) &= (G(x^2) - G(x))' = G'(x^2)2x - G'(x)\\ &= x^2 f(x^2)2x - xf(x) = 2x^3 f(x^2) - xf(x)\end{aligned}$$

である．よって，$\boxed{\mathbf{5}}$ の答えは ⑧ である．

問 3　(1)　定積分 $I_1 = \displaystyle\int_1^{e^\pi} \frac{(\log x)^2}{x}\,dx$ を変数変換を用いて求める．$\log x = t$ とおくと

$$I_1 = \int_0^{\boxed{\mathbf{6}}} t^2\,dt$$

と表される．これを計算すると $I_1 = \boxed{\mathbf{7}}$ が得られる．

(2)　定積分 $I_2 = \displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\log x)\,dx$ についても，$\log x = t$ とおくと

$$I_2 = \int_0^{\boxed{\mathbf{6}}} \boxed{\mathbf{8}}\,dt$$

と表される．ここで部分積分を 2 回行うと，$I_2 = \boxed{\mathbf{9}} - I_2$ となることより，

$I_2 = \dfrac{1}{2}\boxed{\mathbf{9}}$ が得られる．

6 ・ **7** ・ **9** の解答群

⓪ 0	① π	② $\sin(\log\pi) - \cos(\log\pi)$
③ $\dfrac{\pi^2}{2}$	④ $\dfrac{\pi^3}{3}$	⑤ $\sin(\log\pi) - \cos(\log\pi) + 1$
⑥ e^π	⑦ $e^\pi + 1$	⑧ $e^\pi(\sin(\log\pi) - \cos(\log\pi))$
⑨ $\log\pi$	ⓐ $e^\pi + e$	ⓑ $\pi(\sin(\log\pi) - \cos(\log\pi) + 1)$

8 の解答群

⓪ 0	① t	② e^t	③ te^t	④ te^{-t}
⑤ $\log t$	⑥ $\sin t$	⑦ $t\sin t$	⑧ $e^t\sin t$	⑨ $e^{-t}\sin t$

解説

(1) I_1 において, 変数変換 $\log x = t$ を行うと，$x : 1 \to e^{\pi}$ のとき $t : 0 \to \pi$ であるので, $\boxed{\mathbf{6}}$ の答えは ① である．また，$x = e^t$ より，$dx = e^t\,dt$ なので

$$I_1 = \int_1^{e^{\pi}} \frac{(\log x)^2}{x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{t^2}{e^t} e^t\,dt = \int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{3}\Big[t^3\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{7}}$ の答えは ④ である．

(2) I_2 についても $\log x = t$ とすると，(1) と同様に $t : 0 \to \pi$, $dx = e^t\,dt$ であるので

$$I_2 = \int_1^{e^{\pi}} \sin(\log x)\,dx = \int_0^{\pi} e^t\ \sin t\,dt$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{8}}$ の答えは ⑧ である．ここで部分積分を 2 回行うと

$$\begin{aligned} I_2 &= \Big[e^t \sin t\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^t \cos t\,dt = -\int_0^{\pi} e^t \cos t\,dt \\ &= \Big[-e^t \cos t\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^t \sin t\,dt \\ &= -e^{\pi}\cos\pi + e^0 \cos 0 - I_2 = e^{\pi} + 1 - I_2 \end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{9}}$ の答えは ⑦ であり，$I_2 = \dfrac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$ となる．

問 4　2 変数関数 $z = \tan^{-1}(u+v)$ について，$u = e^t,\ v = e^{-t}$ とするとき

$$\frac{dz}{dt} = \boxed{\mathbf{10}}$$

となる．また，$u = x^2 - y^2,\ v = 2xy^2$ とするとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \boxed{\mathbf{11}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \boxed{\mathbf{12}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{10}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$　① $\dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$　② $\dfrac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$

③ $\dfrac{e^t + e^{-t}}{(e^t - e^{-t})^2}$　④ $\dfrac{e^t + e^{-t}}{1 + (e^t - e^{-t})^2}$　⑤ $\dfrac{e^t - e^{-t}}{1 + (e^t + e^{-t})^2}$

⑥ $\dfrac{1 + e^t - e^{-t}}{(e^t + e^{-t})^2}$　⑦ $\dfrac{1 + e^t + e^{-t}}{(e^t + e^{-t})^2}$　⑧ $\dfrac{1 + e^t + e^{-t}}{(e^t - e^{-t})^2}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ ・ $\boxed{\mathbf{12}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x+y}{1 + (x^2 - y^2)^2}$　① $\dfrac{2(x+y^2)}{1 + (x^2 - y^2)^2}$

② $\dfrac{2y(2x-1)}{1 + (x^2 + y^2)^2}$　③ $\dfrac{2x+y^2}{1 + (x^2 + y^2)^2}$

④ $\dfrac{2(x+y^2)}{1 + (x^2 - y^2 + 2xy^2)^2}$　⑤ $\dfrac{-2x(2y-1)}{1 + (x^2 - y^2 + 2xy^2)^2}$

⑥ $\dfrac{2x(2y-1)}{1 + (x^2 - y^2 + 2xy^2)^2}$　⑦ $\dfrac{2y(2x-1)}{1 + (x^2 - y^2 + 2xy^2)^2}$

⑧ $\dfrac{2(x+y^2)}{1 + (x^2 + y^2 + 2xy^2)^2}$　⑨ $\dfrac{-2y(2x-1)}{1 + (x^2 + y^2 + 2xy^2)^2}$

ⓐ $\dfrac{2(x+y^2)}{1 - (x^2 + y^2 + 2xy^2)^2}$　ⓑ $\dfrac{x+2y^2}{1 - (x^2 + y^2 + 2xy^2)^2}$

解説

2 変数関数 $z = \tan^{-1}(u+v)$ について，$u = e^t, v = e^{-t}$ として，1 変数関数 $z = z(t) = \tan^{-1}(e^t + e^{-t})$ を考える．ここで，合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial}{\partial u}\big(\tan^{-1}(u+v)\big)\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v}\big(\tan^{-1}(u+v)\big)\frac{dv}{dt} \\ &= \frac{1}{1+(u+v)^2}e^t + \frac{1}{1+(u+v)^2}(-e^{-t}) = \frac{e^t - e^{-t}}{1+(e^t+e^{-t})^2}\end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{10}}$ の答えは ⑤ である．また, $z = \tan^{-1}(u+v)$ に対して $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy^2$ として，2 変数関数 $z = z(x, y) = \tan^{-1}(x^2 - y^2 + 2xy^2)$ を考えると，合成関数の偏微分公式により

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial u}\big(\tan^{-1}(u+v)\big)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\big(\tan^{-1}(u+v)\big)\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{1}{1+(u+v)^2}2x + \frac{1}{1+(u+v)^2}2y^2 \\ &= \frac{2(x+y^2)}{1+(x^2-y^2+2xy^2)^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial u}\big(\tan^{-1}(u+v)\big)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\big(\tan^{-1}(u+v)\big)\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{1}{1+(u+v)^2}(-2y) + \frac{1}{1+(u+v)^2}4xy \\ &= \frac{2y(2x-1)}{1+(x^2-y^2+2xy^2)^2}\end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{11}}$ の答えは ④，$\boxed{\mathbf{12}}$ の答えは ⑦ である．

問 5　xy 平面上の集合 D が

$$D = \left\{ (x,\, y) \;\middle|\; (x^2+y^2)^2 \leqq x^2-y^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, dxdy$$

の値を求める．極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を行うと，集合 D に対応する (r,θ) の条件は，倍角の公式を用いることにより

$$0 \leqq r^2 \leqq \boxed{\mathbf{13}}, \quad \cos\theta \geqq 0, \quad \sin\theta \geqq 0$$

と表され，θ の動く範囲は $0 \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{14}}$ となる．したがって，D に対応する (r,θ) の集合は

$$E = \left\{ (r,\, \theta) \;\middle|\; 0 \leqq r \leqq \sqrt{\boxed{\mathbf{13}}},\ 0 \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{14}} \right\}$$

である．また，変数変換のヤコビ行列式（ヤコビアン）は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{15}}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \iint_E \frac{1}{(1+r^2)^2}\, \boxed{\mathbf{15}}\, drd\theta \\ &= \int_0^{\boxed{\mathbf{14}}} \left(\int_0^{\sqrt{\boxed{\mathbf{13}}}} \frac{1}{(1+r^2)^2}\, \boxed{\mathbf{15}}\, dr \right) d\theta \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\int \frac{1}{1+\cos 2\theta}\, d\theta = \boxed{\mathbf{16}} + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

であることを用いると $I = \boxed{\mathbf{17}}$ を得る．

$\boxed{13}$ 〜 $\boxed{15}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② r	③ $r\sin\theta$
④ π	⑤ 2π	⑥ $\dfrac{\pi}{2}$	⑦ $\dfrac{\pi}{4}$
⑧ $\sin 2\theta$	⑨ $\cos 2\theta$	ⓐ $\sin\dfrac{\theta}{2}$	ⓑ $\cos\dfrac{\theta}{2}$
ⓒ $\dfrac{\sin 2\theta}{2}$	ⓓ $\dfrac{\cos 2\theta}{2}$	ⓔ $1-\cos 2\theta$	ⓕ $1+\cos 2\theta$

$\boxed{16}$ の解答群

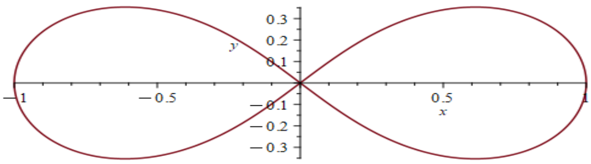
⓪ $\sin\theta$	① $\dfrac{1}{2}\sin\theta$	② $\dfrac{1}{3}\sin\theta$	③ $\dfrac{1}{4}\sin\theta$
④ $\cos\theta$	⑤ $\dfrac{1}{2}\cos\theta$	⑥ $\dfrac{1}{3}\cos\theta$	⑦ $\dfrac{1}{4}\cos\theta$
⑧ $\tan\theta$	⑨ $\dfrac{1}{2}\tan\theta$	ⓐ $\dfrac{1}{3}\tan\theta$	ⓑ $\dfrac{1}{4}\tan\theta$

$\boxed{17}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $+\infty$	
③ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{4}$	④ $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{4}$	⑤ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}$	⑥ $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}$
⑦ $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}$	⑧ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{4}$	⑨ $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$	ⓐ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$
ⓑ $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$	ⓒ $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$	ⓓ $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}$	ⓔ $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}$

解説

方程式 $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ で表される曲線はレムニスケート（連珠形）と呼ばれ，x 軸，y 軸に対して線対称である：



集合 $D = \left\{ (x, y) \mid (x^2+y^2)^2 \leqq x^2-y^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$ は，曲線 $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ によって囲まれる図形のうち，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ となる部分である．集合 D を極座標で表示しよう．まず，条件 $(x^2+y^2)^2 \leqq x^2-y^2$ に $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を代入すると $(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2 = r^4 \leqq r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$ となるので，倍角の公式を用いることにより，この条件は

$$0 \leqq r^2 \leqq \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

と表される．よって $\boxed{\mathbf{13}}$ の答えは ⑨ であり，$0 \leqq r \leqq \sqrt{\cos 2\theta}$ となる．条件 $x = r\cos\theta \geqq 0$ より，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるが，$\cos 2\theta \geqq 0$ であるので，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq 2\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ である．更に $y = r\sin\theta \geqq 0$ を考慮すると θ の動く範囲は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ となる。よって，$\boxed{\mathbf{14}}$ の答えは ⑦ であり，集合 D に対応する (r, θ) の集合は

$$E = \left\{ (r,\ \theta) \;\middle|\; 0 \leqq r \leqq \sqrt{\cos 2\theta},\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4} \right\}$$

である．極座標変換のヤコビ行列式（ヤコビアン）は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

であるから，$\boxed{\mathbf{15}}$ の答えは ② である．よって，

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy = \iint_E \frac{1}{(1+r^2)^2} r\,drd\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{2r}{(1+r^2)^2}\,dr \right) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{-1}{1+r^2} \right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{-1}{1+\cos 2\theta} + 1 \right) d\theta = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos 2\theta} d\theta \end{aligned}$$

となる．ここで，倍角の公式により $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ が成り立つことから

$$\int \frac{1}{1+\cos 2\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{2\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\tan\theta + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

がわかる．よって $\boxed{\mathbf{16}}$ の答えは ⑨ であり，

$$I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\Big[\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ⓑ である．

第2分野　線形代数

〔問1～問5：解答番号 $\boxed{\mathbf{18}}$ ～ $\boxed{\mathbf{35}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\mathrm{rank}\,A$ は A の階数（ランク）を表す.

問1 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) 行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\mathbf{18}}$ であるから，A は逆行列を $\boxed{\mathbf{19}}$.

(2) 行列式 $|A|$ を第1列に関して余因子展開すると

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \boxed{\mathbf{20}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

である.

$\boxed{\mathbf{18}}$ ・ $\boxed{\mathbf{20}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ -4　ⓐ -5

$\boxed{\mathbf{19}}$ の解答群

⓪ もつ　① もたない

解説

(1) 2 次や 3 次行列式と違い，4 次行列式の値の計算には，たすき掛けやサラスの方法のような簡単な方法はなく，行列式の性質

- ある行 (または列) の何倍かしたものを他の行 (または列) に加えても，行列式の値は変わらない．
- 2 つの行 (または列) どうしを入れ替えると，行列式の値は -1 倍になる．
- 上三角行列 (対角成分よりも下側の成分がすべて 0 の行列) の行列式の値は，対角成分の積に等しい．

を利用するのが一般的である．実際に A に対して，例えば

$$
\begin{aligned}
|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{第 2 行に第 1 行の } (-\tfrac{1}{2}) \text{ 倍を加えても} \\ \text{行列式の値は変わらない} \end{array} \right) \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{第 3 行に第 2 行の } (-\tfrac{2}{3}) \text{ 倍を加えても} \\ \text{行列式の値は変わらない} \end{array} \right) \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{第 4 行に第 3 行の } (-\tfrac{3}{4}) \text{ 倍を加えても} \\ \text{行列式の値は変わらない} \end{array} \right) \\
&= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 5 \\
&\left(\text{上三角行列の行列式の値は対角成分の積に等しい} \right)
\end{aligned}
$$

と計算できる．また，A は行列式の値が 0 ではないので，逆行列をもつ．よって，$\boxed{\textbf{18}}$, $\boxed{\textbf{19}}$ の答えは順に ⑤, ⓪ である．

(2) 行列 A の (i,j) 成分を a_{ij} で表し，A の (i,j) 余因子を $\hat{A}_{ij}$ で表す．なお，$\hat{A}_{ij}$ は，A から 第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる 3 次正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けた値で定義される．このとき，$|A|$ の第 1 列に関する余因子展開は

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11}\hat{A}_{11} + a_{21}\hat{A}_{21} + a_{31}\hat{A}_{31} + a_{41}\hat{A}_{41} \\
&= 2\hat{A}_{11} + 1\hat{A}_{21} + 0\hat{A}_{31} + 0\hat{A}_{41} \\
&= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

である．よって，$\boxed{\mathbf{20}}$ の答えは ⑥ である．

問 2　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ における 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ s \end{pmatrix}$$

について考える．ただし，s は定数とする．

(1)　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次従属になるのは $s =$ **21** のときである．

(2)　$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と直交するのは $s =$ **22** のときである．このとき，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積は **23** である．

21 ～ **23** **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 6
	⑥ −1	⑦ −2	⑧ −3	⑨ −4	ⓐ −6

解説

(1) 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 1 次従属になるのは，これらを並べてできる正方行列 $A = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})$ の行列式が 0 になるときである．このとき

$$|A| = |\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & s \end{vmatrix} = s + 4 = 0$$

なので，$s = -4$ である．よって，$\boxed{\mathbf{21}}$ の答えは ⑨ である．

(2) $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と直交するのはそれぞれ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 0, \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 0$ のときである．これらの内積を計算すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} &= 1\cdot 2 + 1\cdot(-2) + 0\cdot s = 0, \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} &= -1\cdot 2 + 0\cdot(-2) + 1\cdot s = s - 2 \end{aligned}$$

であるから，$\boldsymbol{c}$ は，s の値によらず常に $\boldsymbol{a}$ と直交し，$s = 2$ のとき $\boldsymbol{b}$ とも直交する．したがって，$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方と直交するのは $s = 2$ のときである．このとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積は

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| &= \left| \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= |1\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + 1\cdot 2| = 6 \end{aligned}$$

である．よって，$\boxed{\mathbf{22}}$，$\boxed{\mathbf{23}}$ の答えは順に ②, ⑤ である．

問 3　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 f がベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して

$$f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとする．

(1)　単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{\textbf{24}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$f(\boldsymbol{e}_1) = \boxed{\textbf{25}}$ となる．

(2)　$\mathbb{R}^3$ のすべてのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ としたとき

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ となる行列は $A = \boxed{\textbf{26}}$ である．

(3)　$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす $\mathbb{R}^3$ のベクトルは $\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} \boxed{\textbf{27}} \\ \boxed{\textbf{28}} \\ 1 \end{pmatrix}$（$c$ は任意定数）

と表される．

$\boxed{\mathbf{24}}$ ・ $\boxed{\mathbf{27}}$ ・ $\boxed{\mathbf{28}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\dfrac{2}{3}$　⑧ $\dfrac{1}{4}$

⑨ -1　ⓐ -2　ⓑ -3　ⓒ -4

ⓓ $-\dfrac{1}{2}$　ⓔ $-\dfrac{1}{3}$　ⓕ $-\dfrac{2}{3}$　ⓖ $-\dfrac{1}{4}$

$\boxed{\mathbf{25}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$　⑥ $\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 3 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{26}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　⑧ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

⑨ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　ⓐ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　ⓑ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解説

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次独立な 3 つのベクトルであるから $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であり $\boldsymbol{e}_1 = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{c}$, ただし s, t, u は実数，と表すことができる．すると

$$1 = s + t, \quad 0 = s + u, \quad 0 = t + u,$$

であるから，$s = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{2}, u = -\frac{1}{2}$, すなわち

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．したがって，f は線形写像であるから

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= f\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right) \\ &= \frac{1}{2}f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}f(\boldsymbol{b}) - \frac{1}{2}f(\boldsymbol{c}) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{24}}$, $\boxed{\mathbf{25}}$ の答えは順に ⓓ, ③ である．

(2) 線形写像の行列表現 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ において，$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ は 3 行 1 列の行列と同一視され，像 $A\boldsymbol{x}$ は $\mathbb{R}^2$ のベクトルとして 2 行 1 列の行列と同一視されているので，A は 2 行 3 列の行列でなければならない．そこで $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ とおいて a_{ij} $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3)$ を求める．単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して，

$$f(\boldsymbol{e}_j) = A\boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3)$$

が成り立つ．一方，(1) の結果より

$$f(\boldsymbol{e}_1) = f\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であり，これと同様な計算によって

$$f(\boldsymbol{e}_2) = f\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = f\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がわかる．したがって，$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\boxed{\mathbf{26}}$ の答えは ⓑ である．

(3)　$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める．(2) の結果より

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x_2 - x_3 \\ -2x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，$\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ (c は任意定数) と表される．よって，$\boxed{\mathbf{27}}$，$\boxed{\mathbf{28}}$ の答えは順に ⑤, ⑥ である．

問 4 連立 1 次方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} x - 3y + az = b \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x - 9y + 6z = -1 \end{cases}$$

について考える．ただし，a, b は実数とする．この方程式の係数行列 A，拡大係数行列 B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & a & b \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) $(*)$ が解を 1 つだけもつのは，$a \neq$ **29** のときである．

(2) $(*)$ が解をもたないのは，$a =$ **29** , $b \neq$ **30** のときである．このとき，rank $A =$ **31** , rank $B =$ **32** である．

29 ～ **32** の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ −1　⑦ −2　⑧ −3　⑨ −4　ⓐ −5

解説

(1) 連立 1 次方程式 $(*)$ は，未知数と方程式の個数が等しい連立方程式である．このとき係数行列 A は正方行列であり，連立方程式が解を 1 つだけもつのは, A が逆行列を持つとき，したがって行列式の値が 0 ではないときである．A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 3 - a$$

であるから，連立方程式 $(*)$ が解を 1 つだけもつのは $a \neq 3$ のときである．よって，$\boxed{\mathbf{29}}$ の答えは ③ である．

(2) $(*)$ が解をもたないのは係数行列 A と拡大係数行列 B のランクが異なるとき，すなわち，$\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank} B$ のときである．拡大係数行列 B の行基本変形を行い, A と B のランクを同時に調べると

$$B = \left(\begin{array}{c|c} & b \\ A & 0 \\ & -1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & a & b \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & 6 & -1 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & a & b \\ 4 & -9 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad \left(\text{第 1 行と第 2 行を交換する} \right)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-1 & b \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{c} \text{（第 2 行）$-$（第 1 行）を新（第 2 行）とする} \\ \text{（第 3 行）$- 4 \times$（第 1 行）を新（第 3 行）とする} \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 & b \end{pmatrix} \quad \left(\text{第 2 行と第 3 行を交換する} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 & b+1 \end{array} \right) \quad \left(\text{（第 3 行）$-$（第 2 行）を新（第 3 行）とする} \right)$$

であるから，$\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank} B$ が成り立つのは $a = 3, b \neq -1$ のときである．このとき，$\operatorname{rank} A = 2$, $\operatorname{rank} B = 3$ である．よって，$\boxed{\mathbf{30}}$, $\boxed{\mathbf{31}}$, $\boxed{\mathbf{32}}$ の答えは順に ⑥, ②, ③ である．

問 5　行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

の対角化可能性について考える.

(1)　A の固有値は $\boxed{\mathbf{33}}$（重複度 2）と 2 である.

(2)　3 次単位行列を E で表すと

$$\mathrm{rank}(A - \boxed{\mathbf{33}}\, E) = \boxed{\mathbf{34}}$$

であるから，A は $\boxed{\mathbf{35}}$.

$\boxed{\mathbf{33}}$ ・ $\boxed{\mathbf{34}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

$\boxed{\mathbf{35}}$ の解答群

⓪ 対角化可能である　① 対角化可能ではない

解説

(1) 行列 A の固有値は固有方程式 $\varphi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ の解である．これを求めると

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 3 & -3 \\ 1 & \lambda - 3 & 2 \\ 3 & -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

より，A の固有値は 1（重複度 2）と 2 である．よって，$\boxed{\mathbf{33}}$ の答えは ① である．

(2) 行列 $A - E$ のランクを求めるために行基本変形によって階段行列に変形すると

$$A - E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \left(\text{第 1 行を} \tfrac{1}{3} \text{倍する} \right)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \text{（第 2 行）＋（第 1 行）を新（第 2 行）とする} \\ \text{（第 3 行）} + 3 \times \text{（第 1 行）を新（第 3 行）とする} \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\text{（第 3 行）－（第 2 行）を新（第 3 行）とする} \right).$$

これより，$\mathrm{rank}(A - E) = 2$ である．すると

$$3 - \mathrm{rank}(A - E) = 1 < 2$$

であり，不等式の左辺は A の（重複度 2 の）固有値 1 に対応する固有ベクトルの組で 1 次独立なものがとれる最大個数を表す．これが重複度に満たないので，A は対角化可能ではない．よって，$\boxed{\mathbf{34}}$，$\boxed{\mathbf{35}}$ の答えは順に ②, ① である．

第３分野　常微分方程式

〔問１〜問４：解答番号 $\boxed{\textbf{36}}$ 〜 $\boxed{\textbf{50}}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．すべての微分方程式は関数が定義される範囲で考える．また，特殊解は特解ともいう．

問１ 微分方程式

$$(*)\qquad y' = \frac{3x+y-1}{x-1}$$

を $x>1$ の範囲で考える．いま

$$z = \frac{y+2}{x-1}$$

とおくと，$(*)$ の右辺は

$$\frac{3x+y-1}{x-1} = z + \boxed{\textbf{36}}$$

となることから，$(*)$ より $z(x)$ に関する微分方程式

$$(**)\qquad z' = \boxed{\textbf{37}}$$

が得られる．$(**)$ の一般解を求めると

$$z(x) = \boxed{\textbf{38}}$$

であるので，$(*)$ の一般解は $y = (x-1)\cdot \boxed{\textbf{38}} - 2$ である．

$\boxed{\textbf{36}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ -1	⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4	⑨ $x-3$
ⓐ $-\dfrac{3}{x-1}$	ⓑ $\dfrac{3x+1}{x-1}$	ⓒ $\dfrac{3x-1}{x-1}$		

$\boxed{\mathbf{37}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{x+1}$　① $\dfrac{2}{x+1}$　② $\dfrac{3}{x+1}$　③ $\dfrac{1}{x-1}$

④ $\dfrac{2}{x-1}$　⑤ $\dfrac{3}{x-1}$　⑥ $\dfrac{z+1}{x+1}$　⑦ $\dfrac{2z+3}{x+1}$

⑧ $\dfrac{2z-1}{x+1}$　⑨ $\dfrac{z+2}{x-1}$　ⓐ $\dfrac{2z+1}{x-1}$　ⓑ $\dfrac{-2z+3}{x+1}$

$\boxed{\mathbf{38}}$ **の解答群**

⓪ $Cx+1$　① $Cx-1$　② $C(x+1)^2-1$

③ $C(x-1)^2-1$　④ $C(x+1)^3-1$　⑤ $C(x-1)^3-1$

⑥ $\log(x+1)+C$　⑦ $2\log(x+1)+C$　⑧ $3\log(x+1)+C$

⑨ $\log(x-1)+C$　ⓐ $2\log(x-1)+C$　ⓑ $3\log(x-1)+C$

(C は任意定数)

解説

微分方程式 $(*)$ は同次形の基本形 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の x を $x-1$ に，y を $y+2$ に置き換えたものである．通常の同次形の解法で解くことができるが，見た目が少し違うので戸惑わないように注意されたい．

まず $z = \dfrac{y+2}{x-1}$ とおくと，$(*)$ の右辺は

$$\frac{3x+y-1}{x-1} = \frac{y+2+3x-3}{x-1} = \frac{y+2}{x-1} + \frac{3x-3}{x-1} = z+3$$

のように表される．よって，$\boxed{\mathbf{36}}$ の答えは ③である．またこれは $y' = z+3$ が成り立つことを意味する．

一方，$y = (x-1)z - 2$ の両辺を x で微分することにより

$$y' = z + (x-1)z'$$

となる．これと $y' = z+3$ とを合わせれば，$z(x)$ に関する微分方程式

$$z' = \frac{3}{x-1}$$

が得られる．よって，$\boxed{\mathbf{37}}$ の答えは ⑤ である．この微分方程式は直接積分形と呼ばれることもある．

上式の両辺を x で積分すると，この方程式の一般解

$$z(x) = 3\log(x-1) + C$$

が得られる，ここで C は任意定数である．この問題においては $x > 1$ が仮定されているので，$\log$ の中の関数 $x-1$ に絶対値をつける必要はないことに注意する．したがって，$(*)$ の一般解は

$$y(x) = (x-1)\left(3\log(x-1) + C\right) - 2$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{38}}$ の答えは ⑥である．

問 2　微分方程式

$(*) \qquad y' + 3y = e^{-3x} \sin 2x$

について考える．

(1)　対応する同次方程式

$$y' + 3y = 0$$

の一般解は，C を任意定数とすると

$(**) \qquad y = C \boxed{\mathbf{39}}$

と表される．

$\boxed{\mathbf{39}}$ **の解答群**

⓪ x	① x^3	② $\dfrac{1}{x}$	③ $\dfrac{1}{x^3}$
④ e^x	⑤ e^{3x}	⑥ e^{-x}	⑦ e^{-3x}
⑧ xe^x	⑨ xe^{-x}	ⓐ xe^{3x}	ⓑ xe^{-3x}
ⓒ $\sin 3x$	ⓓ $\cos 3x$		

(2)　$(**)$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x) \cdot \boxed{\mathbf{39}}$ を $(*)$ に代入すると

$$u' = \boxed{\mathbf{40}}$$

が得られる．この方程式の一般解は，任意定数 $\tilde{C}$ を用いて

$$u(x) = \boxed{\mathbf{41}} + \tilde{C}$$

となるので，$(*)$ の一般解は

$({}_{*}{}^{*}{}_{*}) \qquad y = \left(\boxed{\mathbf{41}} + \tilde{C} \right) \cdot \boxed{\mathbf{39}}$

である．

40 ・ **41** の解答群

⓪ $\sin 2x$	① $2\sin 2x$	② $\dfrac{1}{2}\sin 2x$	③ $e^{-x}\sin 2x$
④ $-\sin 2x$	⑤ $-2\sin 2x$	⑥ $-\dfrac{1}{2}\sin 2x$	⑦ $-e^{-x}\sin 2x$
⑧ $\cos 2x$	⑨ $2\cos 2x$	ⓐ $\dfrac{1}{2}\cos 2x$	ⓑ $e^{-x}\cos 2x$
ⓒ $-\cos 2x$	ⓓ $-2\cos 2x$	ⓔ $-\dfrac{1}{2}\cos 2x$	ⓕ $-e^{-x}\cos 2x$
ⓖ $e^{-3x}\sin 2x$	ⓗ $e^{-3x}\cos 2x$		

(3) $({}_{*}^{*}{}_{*})$ において，$y(x)$ が初期条件 $y(0) = \dfrac{1}{2}$ を満たすように $\tilde{C}$ を定めると，$\tilde{C} =$ **42** となる.

42 の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6
	⑦ -1	⑧ -2	⑨ -3	ⓐ -4	ⓑ -5	ⓒ -6

解説

微分方程式 $(*)$ は 1 階線形微分方程式であり，定数変化法により解くことができる．

(1) まず，$(*)$ の右辺を 0 に置き換えた同次形の微分方程式

$$y' + 3y = 0$$

を考える．この方程式は変数分離形であり，その一般解は

$$y = Ce^{-3x} \qquad （C \text{ は任意定数}）$$

である．よって，$\boxed{\textbf{39}}$ の答えは ⑦である．

(2) 次に，定数 C を関数 $u(x)$ に置き換えた式 $y(x) = u(x) \cdot e^{-3x}$ と，この式の両辺を x で微分した式

$$y' = u' \cdot e^{-3x} - 3u \cdot e^{-3x}$$

とを $(*)$ に代入し整理すると，$u(x)$ に関する微分方程式

$$u' = \sin 2x$$

が得られる．よって，$\boxed{\textbf{40}}$ の答えは ⓪ である．

上の式の両辺を x で積分すると，微分方程式 $(*)$ の一般解

$$u(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \tilde{C} \qquad （\tilde{C} \text{ は任意定数}）$$

が得られる．よって，$\boxed{\textbf{41}}$ の答えは ⓔ である．

(3) 最後に，$(*)$ の一般解

$$y(x) = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \tilde{C}\right)e^{-3x}$$

は初期条件 $y(0) = \dfrac{1}{2}$ を満たすので

$$y(0) = \left(-\frac{1}{2} + \tilde{C}\right) \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

すなわち $\tilde{C} = 1$ が得られる．よって，$\boxed{\textbf{42}}$ の答えは ① である．

問 3　微分方程式

$$(*)\qquad y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$$

について考える．

(1)　$(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

の一般解 y_h は任意定数 C_1, C_2 を用いて $y_h = \boxed{\mathbf{43}}$ と表される．

$\boxed{43}$ の解答群

⓪ $C_1e^{x} + C_2e^{-x}$	① $C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$	② $C_1e^{x} + C_2e^{-3x}$
③ $C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$	④ $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$	⑤ $C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$
⑥ $C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$	⑦ $C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$	⑧ $C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$
⑨ $C_1e^{x} + C_2xe^{x}$	ⓐ $C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$	ⓑ $C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$
ⓒ $C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$	ⓓ $C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$	ⓔ $C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$
ⓕ $C_1e^{x}\cos 2x + C_2e^{x}\sin 2x$	ⓖ $C_1e^{-x}\cos 3x + C_2e^{-x}\sin 3x$	

(2)　一方，$y_p = \boxed{\mathbf{44}} \cdot e^{3x}$ は $(*)$ の特殊解の 1 つである．以上より，$(*)$ の一般解は

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \boxed{\mathbf{43}} + \boxed{\mathbf{44}} \cdot e^{3x}$$

である．

$\boxed{44}$ の解答群

⓪ 1	① $\dfrac{1}{2}$	② $\dfrac{1}{4}$	③ -1	④ $-\dfrac{1}{2}$	⑤ $-\dfrac{1}{4}$
⑥ x	⑦ $\dfrac{1}{2}x$	⑧ $\dfrac{1}{4}x$	⑨ $-x$	ⓐ $-\dfrac{1}{2}x$	ⓑ $-\dfrac{1}{4}x$

(3)　(2) で求めた $(*)$ の一般解は $x \to +\infty$ のとき $\boxed{\mathbf{45}}$.

$\boxed{\mathbf{45}}$ **の解答群**

⓪　任意定数 C_1, C_2 の値によらず 0 に収束する

①　任意定数 C_1, C_2 の値によらず $+\infty$ に発散する

②　任意定数 C_1, C_2 の値によらず $-\infty$ に発散する

③　任意定数 C_1, C_2 の値によって，0 に収束したり，$+\infty$ に発散したりする

④　任意定数 C_1, C_2 の値によって，0 に収束したり，$-\infty$ に発散したりする

⑤　任意定数 C_1, C_2 の値によって，$+\infty$ に発散したり，$-\infty$ に発散したりする

(4)　(2) で求めた $(*)$ の一般解 $y(x)$ が初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ を満たすのは

$$C_1 = \boxed{\mathbf{46}}, \qquad C_2 = \boxed{\mathbf{47}}$$

のときである.

$\boxed{\mathbf{46}}$ ・ $\boxed{\mathbf{47}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{3}{4}$　③ $\dfrac{1}{8}$　④ $\dfrac{3}{8}$　⑤ $\dfrac{1}{16}$　⑥ $\dfrac{3}{16}$

⑦ $-\dfrac{1}{2}$　⑧ $-\dfrac{1}{4}$　⑨ $-\dfrac{3}{4}$　ⓐ $-\dfrac{1}{8}$　ⓑ $-\dfrac{3}{8}$　ⓒ $-\dfrac{1}{16}$　ⓓ $-\dfrac{3}{16}$

解説

微分方程式 $(*)$ は定数係数の 2 階線形微分方程式である．また，右辺には未知関数 y およびその導関数を含まない非同次項 e^{3x} があるので，$(*)$ は非同次である．

(1) $(*)$ に対応する特性方程式

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

の解は $\lambda = 3, -1$（異なる 2 つの実数解）であるから，同次方程式の一般解 y_h は

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{43}}$ の答えは ⑥ である．

(2) $(*)$ の特殊解を $y_0 = Kxe^{3x}$ とおく，ここで K はある定数とする．これを $(*)$ に代入すると

$$(Kxe^{3x})'' - 2(Kxe^{3x})' - 3(Kxe^{3x}) = e^{3x}$$

となるので，これより $K = \dfrac{1}{4}$ が得られる．したがって，$\boxed{\mathbf{44}}$ の答えは ⑧ である．

なお，特殊解を $y_0 = Ke^{3x}$ とおき $(*)$ に代入すると $0 = e^{3x}$ という式が現れてしまう．これは $y = e^{3x}$ が (1) で求めた同次方程式の特殊解（$C_1 = 1$ および $C_2 = 0$ の場合）であるためである．

(3) (2) で求めた $(*)$ の一般解

$$y(x) = e^{3x}\left(C_1 + \frac{1}{4}x\right) + C_2 e^{-x}$$

を観察しよう．$x \to +\infty$ のとき，第二項 $C_2 e^{-x}$ については，C_2 がどのような値であろうとも 0 に収束する．第一項については，C_1 がどのような値であろうとも e^{3x} も $\left(C_1 + \frac{1}{4}x\right)$ も $+\infty$ に発散する．よって，$\boxed{\mathbf{45}}$ の答えは ① である．

(4) まず初期条件 $y(0) = 0$ より

$$C_1 + C_2 = 0$$

が得られる．次に一般解 $y(x)$ の導関数は $y'(x) = 3C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x} + \dfrac{1}{4}e^{x} + \dfrac{3}{4}xe^{3x}$ であるから，$y'(0) = 1$ より $\dfrac{1}{4} + 3C_1 - C_2 = 1$ すなわち

$$3C_1 - C_2 = \frac{3}{4}$$

が得られる．上記の C_1 と C_2 に関する連立方程式を解けば，結果として $C_1 = \dfrac{3}{16}, C_2 = -\dfrac{3}{16}$ が得られる．よって，$\boxed{\mathbf{46}}$，$\boxed{\mathbf{47}}$ の答えは順に ⑥, ⓓ である．

問 4 xy 平面上において，原点を焦点とし，x 軸を対称軸にもつすべての放物線を表す微分方程式を求める．これらの放物線は，C を 0 でない任意定数としたとき，原点からの距離と直線 $x = C$ からの距離が等しい点の軌跡であるので，放物線の方程式は

$$(*) \qquad x^2 + y^2 = \boxed{\mathbf{48}}$$

で与えられる．$y \neq 0$ において，y を x の関数と考えて，方程式 $(*)$ の両辺を x で微分すると

$$(**) \qquad y' = \boxed{\mathbf{49}}$$

が得られる．さらに，方程式 $(*)$ と $(**)$ から C を消去すると，$(*)$ を一般解としてもつ微分方程式

$$\boxed{\mathbf{50}} = 0$$

が得られる．

48 の解答群

⓪ $x - C$	① $y - C$	② $x^2 + C^2$	③ $y^2 + C^2$
④ $(x - C)^2$	⑤ $(y - C)^2$	⑥ $\sqrt{x - C}$	⑦ $\sqrt{y - C}$
⑧ $\sqrt{x^2 + C^2}$	⑨ $\sqrt{y^2 + C^2}$	ⓐ $x - y - C$	ⓑ $(x - y - C)^2$

49 の解答群

⓪ $2xy + C$	① $-2xy + C$	② $\frac{1}{2}xy + C$	③ $-\frac{1}{2}xy + C$
④ $\frac{1-x}{4xy + C}$	⑤ $\frac{1-y}{4xy + C}$	⑥ $\frac{x}{4y\sqrt{x - C}}$	⑦ $\frac{y}{4x\sqrt{x - C}}$
⑧ $\frac{C}{x+1}$	⑨ $\frac{C}{y+1}$	ⓐ $-\frac{C}{x}$	ⓑ $-\frac{C}{y}$

$\boxed{\mathbf{50}}$ の解答群

⓪ $(y')^2 + \dfrac{x}{y}y' - 1$　① $\left(1 + \dfrac{x}{y}\right) y' - 1$　② $y' + \dfrac{x}{y} - 1$

③ $(y')^2 + \dfrac{2x}{y}y' - 1$　④ $\left(1 + \dfrac{2x}{y}\right) y' - 1$　⑤ $y' + \dfrac{2x}{y} - 1$

⑥ $(y')^2 + 2xy' - 1$　⑦ $(1 + 2x)\, y' - 1$　⑧ $y' + 2x - 1$

解説

まず放物線の方程式を求めよう．これは問題文にあるように「原点からの距離」と「直線 $x = C$ からの距離」が等しい点 (x, y) の軌跡として表現される．前者は $\sqrt{x^2 + y^2}$ で，後者は $|x - C|$ で表されるので，結果として $\sqrt{x^2 + y^2} = |x - C|$ すなわち

$$(*) \qquad x^2 + y^2 = (x - C)^2$$

を得る．よって， $\boxed{\mathbf{48}}$ の答えは ④ である．

次に $(*)$ の両辺を x で微分すると $2x + 2y \cdot y' = 2(x - C)$ となり，これを y' について解くと

$$(**) \qquad y' = -\frac{C}{y}$$

を得る．よって， $\boxed{\mathbf{49}}$ の答えは ⓑ である．

さらに $(*)$ と $(**)$ から C を消去しよう．$(**)$ より $C = -yy'$ であるので，これを $(*)$ に代入すると $x^2 + y^2 = (x + yy')^2$ となる．右辺の 2 乗を展開してすべて左辺に移行し整理すれば

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = (x + yy')^2 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = x^2 + 2xyy' + (yy')^2 \\ &\Rightarrow \quad y^2 - 2xyy' - (yy')^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad -y^2\left(-1 + \frac{2x}{y}y' + (y')^2\right) = 0 \end{aligned}$$

のように式変形することができる．問題文より $y \neq 0$ であったので， $\boxed{\mathbf{50}}$ の答えは ③ である．

第4分野　確率・統計

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{51}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{68}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$，$V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1　(1)　確率変数 X の確率分布が

X の値	-1	0	1	2
確率	$\dfrac{1}{2k}$	$\dfrac{3}{4k}$	$\dfrac{5}{8k}$	$\dfrac{1}{8k}$

(k は正の定数)

で与えられている．このとき，$k =$ $\boxed{\mathbf{51}}$ であり，$E(X) =$ $\boxed{\mathbf{52}}$ が成り立つ．
また $Y = 2X + 2$ であるとき，$E(Y) =$ $\boxed{\mathbf{53}}$，$V(Y) =$ $\boxed{\mathbf{54}}$ である．

$\boxed{\mathbf{51}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{54}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 4	④ $\dfrac{1}{2}$	⑤ $\dfrac{1}{4}$
⑥ $\dfrac{1}{6}$	⑦ $\dfrac{7}{8}$	⑧ $\dfrac{19}{8}$	⑨ $\dfrac{1}{16}$	ⓐ $\dfrac{3}{16}$	ⓑ $\dfrac{9}{16}$
ⓒ $\dfrac{13}{16}$	ⓓ $\dfrac{15}{16}$	ⓔ $\dfrac{9}{64}$	ⓕ $\dfrac{15}{64}$	ⓖ $\dfrac{149}{64}$	ⓗ $\dfrac{199}{64}$

(2) 確率変数 X がパラメータ 5 のポアソン分布に従っているとする．すなわち

$$P(X = k) = e^{-5}\frac{5^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

とする．このとき，$V(X) = \boxed{\mathbf{55}}$ であり

$$P(0 \leqq X \leqq 2) = \boxed{\mathbf{56}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{55}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 5	③ 25	④ $\dfrac{1}{5}$	⑤ $\dfrac{1}{25}$
⑥ e^{-1}	⑦ $\dfrac{e^{-1}}{5}$	⑧ $\dfrac{e^{-1}}{120}$	⑨ e^{-5}	ⓐ $\dfrac{e^{-5}}{5}$	ⓑ $\dfrac{e^{-5}}{120}$

$\boxed{\mathbf{56}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{13(1+e^{-1}+e^{-2})}{2}$	① $\dfrac{35(1+e^{-1}+e^{-2})}{2}$	② $\dfrac{37(1+e^{-1}+e^{-2})}{2}$
③ $\dfrac{13\,e^{-5}}{2}$	④ $\dfrac{35\,e^{-5}}{2}$	⑤ $\dfrac{37\,e^{-5}}{2}$

解説

(1) 全事象の確率は 1 であるから

$$1 = \frac{1}{2k} + \frac{3}{4k} + \frac{5}{8k} + \frac{1}{8k} = \frac{2}{k}$$

が成り立つ．よって，$k=2$ である．したがって，$\boxed{\textbf{51}}$ の答えは ② である．次に，X の期待値は

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=-1}^{2} k \cdot P(X=k) \\ &= (-1)\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{3}{8} + 1\cdot\frac{5}{16} + 2\cdot\frac{1}{16} \ = \ \frac{3}{16} \end{aligned}$$

であるから，期待値の計算法則 $E(aX+b) = aE(X)+b$（a, b は定数）を用いれば

$$E(Y) \ = \ E(2X+2) \ = \ 2E(X)+2 \ = \ \frac{19}{8}$$

が得られる．よって，$\boxed{\textbf{52}}$ の答えは ⓐ，$\boxed{\textbf{53}}$ の答えは ⑧ である．同様にして $E(X)$ を計算すると

$$E(X^2) = (-1)^2\cdot\frac{1}{4} + 1^2\cdot\frac{5}{16} + 2^2\cdot\frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

であるから，分散の計算法則 $V(aX+b) = a^2V(X)$（a, b は定数）を用いれば

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(2X+2) = 4V(X) \\ &= 4\left(E(X^2) - (E(X))^2\right) = 4\left(\frac{13}{16} - \left(\frac{3}{16}\right)^2\right) = \frac{199}{64} \end{aligned}$$

が得られる．したがって，$\boxed{\textbf{54}}$ の答えは ⓗ である．

(2) 一般にパラメータ λ をもつポアソン分布に従う確率変数 X の期待値と分散はともに λ である．よって，$\lambda = 5$ であれば，$V(X) = 5$ である．よって，$\boxed{\textbf{55}}$ の答えは ② である．

また，$X = k$ より X は 非負の整数であるので，条件 $0 \leqq X \leqq 2$ を満たすのは $X = 0, 1, 2$ の場合である．これより

$$\begin{aligned} P(0 \leqq X \leqq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= e^{-5}\frac{5^0}{0!} + e^{-5}\frac{5^1}{1!} + e^{-5}\frac{5^2}{2!} \\ &= \frac{37e^{-5}}{2} \end{aligned}$$

を得る．よって，$\boxed{\textbf{56}}$ の答えは ⑤ である．

問 2　a を定数とする．確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} axe^{-\frac{x^2}{2}} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられている．

(1)　このとき $a = \boxed{\textbf{57}}$ である．また $P\left(\sqrt{\log 4} \leqq X \leqq \sqrt{\log 16}\right) = \boxed{\textbf{58}}$ が成り立つ．

$\boxed{\textbf{57}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② -1　③ e　④ $-e$　⑤ e^{-1}　⑥ $-e^{-1}$

$\boxed{\textbf{58}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\log 2$　④ $\dfrac{\sqrt{\log 2}}{2}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{\log 2}}{4}$

⑥ $\sqrt{\log 16} - \sqrt{\log 4}$　⑦ $\dfrac{\sqrt{\log 16} - \sqrt{\log 4}}{4}$

(2)　X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とすると

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \boxed{\textbf{59}} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

である．

$\boxed{\textbf{59}}$ の解答群

⓪ $-e^{x^2}$　① $-e^{-x^2}$　② $-e^{\frac{x^2}{2}}$　③ $-e^{-\frac{x^2}{2}}$

④ $-\dfrac{1}{2}e^{x^2}$　⑤ $-xe^{-x^2}$　⑥ $-\dfrac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}$　⑦ $-xe^{-\frac{x^2}{2}}$

⑧ e^{x^2}　⑨ e^{-x^2}　ⓐ $e^{\frac{x^2}{2}}$　ⓑ $e^{-\frac{x^2}{2}}$

解説

(1) 全事象の確率は 1 であるから

$$\begin{aligned}1 = P(-\infty < X < \infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= \int_{0}^{\infty} axe^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= a\int_{0}^{\infty} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx \\ &= a\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= a\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\boxed{\textbf{57}}$ の答えは ① である．また，同様の計算により

$$\begin{aligned}P(\sqrt{\log 4} \leqq X \leqq \sqrt{\log 16}) &= \int_{\sqrt{\log 4}}^{\sqrt{\log 16}} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{x=\sqrt{\log 4}}^{x=\sqrt{\log 16}} \\ &= (e^{\log 4})^{-\frac{1}{2}} - (e^{\log 16})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

である．よって，$\boxed{\textbf{58}}$ の答えは ② である．

(2) 分布関数 $F(x)$ について，$x < 0$ のときは $F(x) = P(X \leqq x) = 0$ であり，$x \geqq 0$ のときは

$$\begin{aligned}F(x) &= P(X \leqq x) \\ &= P(0 \leqq X \leqq x) + \underbrace{P(X \leqq 0)}_{=0} \\ &= \int_{0}^{x} te^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{t=0}^{t=x} \\ &= 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

である．よって，$\boxed{\textbf{59}}$ の答えは ③ である．

問 3　3 つの事象 A, B, C の確率が

$$P(A) = \frac{1}{8}, \qquad P(B) = \frac{1}{3}, \qquad P(C) = \frac{1}{4}$$

であるとする．

(1)　$P(A \cap B) = \dfrac{1}{12}$ のとき，A と B は $\boxed{\textbf{60}}$．また，このとき $P(A \cup B) = \boxed{\textbf{61}}$ である．

(2)　事象 C が起こったときの事象 B の起こる条件付き確率を $P(B \mid C)$ で表す．$P(B \mid C) = \dfrac{1}{6}$ のとき，$P(B \cap C) = \boxed{\textbf{62}}$ であり，よって $P(C \mid B) = \boxed{\textbf{63}}$ である．

(3)　$A \subset C$ のとき，$P(A \mid C) = \boxed{\textbf{64}}$ である．

$\boxed{\textbf{60}}$ の解答群

⓪ 独立である　　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

$\boxed{\textbf{61}}$ 〜 $\boxed{\textbf{64}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{3}$	④ $\frac{2}{3}$	⑤ $\frac{1}{4}$
⑥ $\frac{3}{4}$	⑦ $\frac{1}{6}$	⑧ $\frac{5}{6}$	⑨ $\frac{1}{8}$	ⓐ $\frac{3}{8}$	ⓑ $\frac{5}{8}$
ⓒ $\frac{1}{12}$	ⓓ $\frac{5}{12}$	ⓔ $\frac{7}{12}$	ⓕ $\frac{1}{24}$	ⓖ $\frac{5}{24}$	ⓗ $\frac{7}{24}$

解説

(1) 事象の独立性について確認しておこう．2 つの事象 A, B が**独立である**とは

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

が成り立つときにいう．これをふまえて本問の A と B が独立であるかどうかを確認すると，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{12}$ である一方，$P(A)=\dfrac{1}{8}$ および $P(B)=\dfrac{1}{3}$ であるので $P(A)P(B)=\dfrac{1}{24}$ である．よって $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ であるので，A と B は従属である（独立ではない）．したがって $\boxed{\mathbf{60}}$ の答えは ① である．

また $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ であるので，計算により

$$P(A\cup B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{8}$$

を得る．よって，$\boxed{\mathbf{61}}$ の答えは ⓐ である．

(2) 事象 C が起こったときの事象 B の起こる**条件付き確率** $P(B\,|\,C)$ は

$$P(B\,|\,C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}$$

で定義される．それぞれ $P(B\,|\,C)=\dfrac{1}{6}$, $P(C)=\dfrac{1}{4}$ であるので，結果として

$$P(B\cap C)=P(B\,|\,C)\cdot P(C)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$

を得る．よって，$\boxed{\mathbf{62}}$ の答えは ⓕ である．またこれより

$$P(C\,|\,B)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{8}$$

を得る．よって，$\boxed{\mathbf{63}}$ の答えは ⑨ である．

(3) $A\subset C$ のとき，$A\cap C=A$ が成り立つので

$$P(A\,|\,C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

を得る．よって，$\boxed{\mathbf{64}}$ の答えは ② である．

問 4 A 大学の植物園では，毎年ある植物を栽培し，その草丈(くさたけ)を測定している．これまでの経験から，この植物の草丈は正規分布に従い，草丈の母分散は年によって変化はなく，10.5^2 cm^2 と仮定してよいことがわかっている．昨年までの草丈の母平均は 55.1 cm であったが，今年は晴天の日が多くまた気候も穏やかであったため，例年より草丈が高くなることが予想されている．今年育った植物の中から 100 本を無作為に抽出し草丈を測ったところ，それらの平均は 57.3 cm であった．
この植物の草丈について，母平均 μ の変化を調べるために，$\mu_0 = 55.1$，$\sigma^2 = 10.5^2$，$\bar{x} = 57.3$，$n = 100$ とおき，μ に対する

帰無仮説 H_0 : $\mu = \mu_0$

対立仮説 H_1 : $\mu > \mu_0$

の片側検定を有意水準 5% で行うことにした．選び出した 100 本の草丈をそれぞれ確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とすると，これらはすべて独立で平均 μ，分散 10.5^2 の正規分布に従っている．したがって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

は平均 $\boxed{\mathbf{65}}$，分散 $\boxed{\mathbf{66}}$ の正規分布に従う．帰無仮説 H_0 のもとでは

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 55.1}{10.5/\sqrt{100}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従い，正規分布表から

$$P(-1.645 < Z < 1.645) \fallingdotseq 0.9$$

がわかる．この式から，$1.645 \times \dfrac{10.5}{\sqrt{100}} \fallingdotseq 1.727$ に注意すると

$$P(\overline{X} - 55.1 \geqq 1.727) \fallingdotseq \boxed{\mathbf{67}}$$

となる．一方，$\overline{x}$ は

$$\overline{x} - 55.1 = 57.3 - 55.1 = 2.2 > 1.727$$

を満たすので，H_0 は有意水準 5% で $\boxed{\mathbf{68}}$．

$\boxed{\textbf{65}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{\mu}{100}$　① $\dfrac{\mu}{10}$　② μ　③ 10μ　④ 100μ　⑤ 10.5μ　⑥ $10.5^2\mu$

$\boxed{\textbf{66}}$ **の解答群**

⓪ 100×10.5　① 100×10.5^2　② $100^2 \times 10.5^2$　③ 10.5^2

④ $\dfrac{10.5}{100}$　⑤ $\dfrac{10.5^2}{100}$　⑥ $\dfrac{10.5}{100^2}$　⑦ $\dfrac{10.5^2}{100^2}$

$\boxed{\textbf{67}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 0.05　② 0.1　③ 0.15　④ 0.2　⑤ 0.25

⑥ 0.75　⑦ 0.8　⑧ 0.85　⑨ 0.9　ⓐ 0.95

$\boxed{\textbf{68}}$ **の解答群**

⓪ 採択される　① 棄却される

解説

標本平均に対する平均と分散について復習しておく．確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立で，同じ正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．このとき標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

もやはり正規分布に従い，その平均と分散はそれぞれ

$$E(\overline{X}) = \mu, \qquad V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

で与えられる．つまり $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う．本問では母平均を μ とし，n, σ はそれぞれ $n = 100, \sigma = 10.5$ で与えられているため，$\overline{X}$ の平均は μ であり，分散は $\dfrac{10.5^2}{100}$ である．よって，$\boxed{\textbf{65}}$ の答えは ② ，$\boxed{\textbf{66}}$ の答えは ⑤ である．

次に $\overline{X}$ を平均 0，分散 1 の標準正規分布 $N(0, 1)$ に標準化する．一般に，正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に対して

$$(*) \qquad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

とすれば Z は $N(0, 1)$ に従う．本問においては帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ のもとで，問題文にあるような標準化の式となる．

さて，正規分布表より問題文のように

$$P(-1.645 < Z < 1.645) \fallingdotseq 0.9$$

となる．右辺が 0.9 であるのは，本問の目的が有意水準 5% の片側検定であり右と左からそれぞれ 5% を引いた残りが 90% だからである．ここで $-1.645 < Z < 1.645$ に $(*)$ を $n = 100, \mu = 55.1, \sigma = 10.5$ とともに代入すると

$$\begin{aligned}
&-1.645 < \frac{\overline{X} - 55.1}{10.5/\sqrt{100}} < 1.645 \\
\Rightarrow \quad &-1.645 \cdot \frac{10.5}{\sqrt{100}} < \overline{X} - 55.1 < 1.645 \cdot \frac{10.5}{\sqrt{100}} \\
\Rightarrow \quad &-1.72725 < \overline{X} - 55.1 < 1.72725
\end{aligned}$$

となるので，$P(-1.727 < \overline{X} - 55.1 < 1.727) \fallingdotseq 0.9$ すなわち

$$P(\overline{X} - 55.1 \geqq 1.727) \fallingdotseq 0.05$$

となる．よって，$\boxed{\textbf{67}}$ の答えは ① である．

最後に，$\overline{x} - 55.1 = 57.3 - 55.1 > 1.727$ より $\overline{x}$ は棄却域に含まれているので，H_0 は有意水準 5% で棄却される．よって，$\boxed{\textbf{68}}$ の答えは ① である．