2005年度工学系数学統一試験問題の
詳しい解説および類題

2005 年 12 月 17 日に実施された「2005 年度工学系数学統一試験」の問題と解説は「問題作成委員会」により作成され，工学系数学統一試験実施本部のホームページ（http://www.aemat.jp/exam/）又は山口大学工学部のホームページ（http://ds21.cc.yamaguchi-u.ac.jp/~mathexam/）に掲載されている．本冊子ではそれをもとに，詳しい解説と問題を解くために必要な公式や定理を紹介し，さらに復習できるよう問題ごとに類題を載せてある．

2006 年 9 月

本冊子監修者： 栗山 憲　教授　（山口大学工学部）
柳原 宏　助教授　（山口大学工学部）

本冊子作成者： 石原 由紀夫　特色ある大学教育支援プログラム「工学系数学基礎学力の評価と保証」教務補佐員（山口大学工学部）

第 1 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{11}}$ 〕　（配点 60 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

問 1　xyz 空間において，関数 $z = x^2 + 3y^2$ で定義される曲面上の点 $(x, y, z) = (1, 2, 13)$ における接平面とベクトル $\boxed{\mathbf{1}}$ は直交する．

$\boxed{\mathbf{1}}$ の解答群

⓪ $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$　⑥ $\begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

解　xyz 空間において $z = f(x, y)$ で定義される曲面上の点 (a, b, c) における接平面は

$$z - c = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

で与えられる．ただし $c = f(a, b)$ である．ここでは $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ であるので曲面上の点 $(1, 2, 13)$ における接平面は

$$z - 13 = f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2)$$

で与えられる．$f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 6y$ より $f_x(1, 2) = 2$, $f_y(1, 2) = 12$ となり，接平面は次式で与えられる．

$$z - 13 = 2(x - 1) + 12(y - 2) \qquad \cdots (*1)$$

図 1 は $z = x^2 + 3y^2$ で定義される曲面と，その曲面上の点 $(1, 2, 13)$ における接平面を示す．

一方，ベクトル $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ と垂直に交わり，点 (a', b', c') を通る平面の方程式は

$$\alpha(x - a') + \beta(y - b') + \gamma(z - c') = 0$$

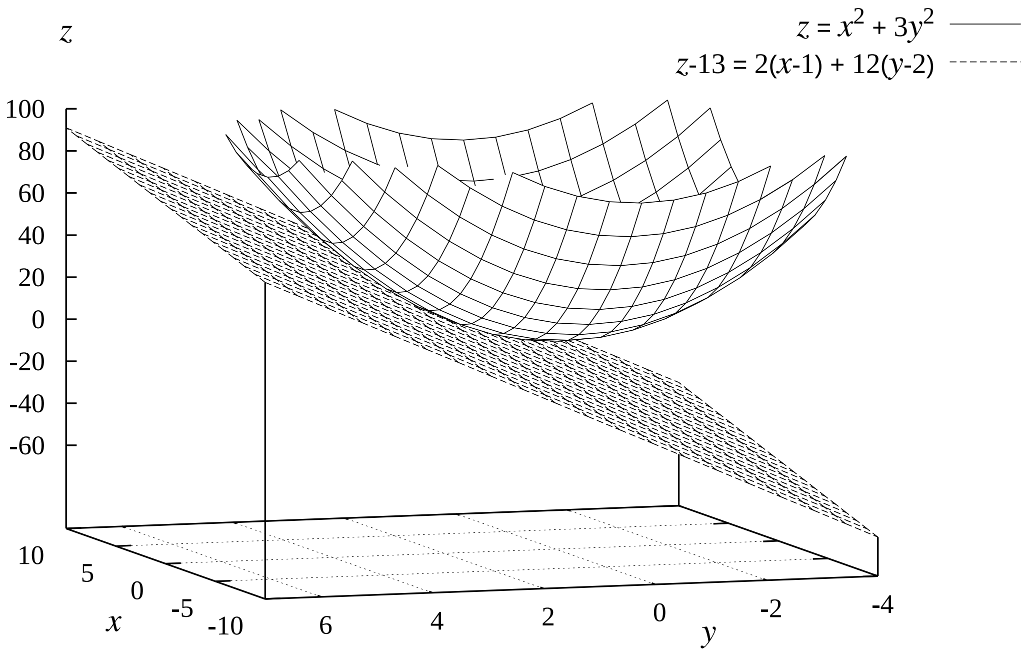

図 1: $z = x^2 + 3y^2$ で定義される曲面と点 $(1, 2, 13)$ における接平面

で与えられることを思い出そう．$(*1)$ は

$$2(x-1) + 12(y-2) - (z-13) = 0$$

と変形できるので，この平面の法線ベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．したがってこのベクトルと平行なベクトルを求めれば良く，答は ⑦ である．

類題 1　xyz 空間において，関数 $z = 4xy - 2y^2 - x^4$ で定義される曲面上の点 $(x, y, z) = (1, 2, -1)$ における接平面，及び接平面と直交するベクトルを求めよ．

解　ここでは $f(x, y) = 4xy - 2y^2 - x^4$ であるので，$f_x(x, y) = 4y - 4x^3$, $f_y(x, y) = 4x - 4y$ となる．点 $(1, 2, -1)$ における x 方向と y 方向の傾きはそれぞれ $f_x(1, 2) = 4$, $f_y(1, 2) = -4$ であり，点 $(1, 2, -1)$ における接平面は

$$\underline{z + 1 = 4(x-1) - 4(y-2)}$$

で与えられる．またベクトル $\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}}$ はこの接平面と直交する．

類題 2　xyz 空間において，関数 $z = x^2 + 2y^2 - 4y + y^3$ で定義される曲面上の点 $(x, y, z) = (0, 1, -1)$ における接平面，及び接平面と直交するベクトルを求めよ．

解　ここでは $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4y + y^3$ であるので，$f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 4y - 4 + 3y^2$ となる．点 $(0, 1, -1)$ における x 方向と y 方向の傾きはそれぞれ $f_x(0, 1) = 0$, $f_y(0, 1) = 3$ であり，点 $(0, 1, -1)$ における接平面は

$$\underline{z + 1 = 3(y - 1)}$$

で与えられる．またベクトル $\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}$ はこの接平面と直交する．

問 2　a を正の定数とする．不定積分 $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ を求めるために，$t=x+\sqrt{x^2+a}$ とおくと

$$x=\boxed{\mathbf{2}},\quad \sqrt{x^2+a}=\boxed{\mathbf{3}},\quad \frac{dx}{dt}=\boxed{\mathbf{4}}$$

であるから，$I=\displaystyle\int\boxed{\mathbf{5}}\,dt$ となる．これより $I=\boxed{\mathbf{6}}+C$ (C は積分定数) である．

$\boxed{2}$ 〜 $\boxed{5}$ の解答群

⓪ $\dfrac{t^2+a^2}{2}$	① $\dfrac{t^2-a^2}{2}$	② $\dfrac{t^2+a}{2}$	③ $\dfrac{t^2-a}{2}$
④ $\dfrac{t^2+a^2}{2t}$	⑤ $\dfrac{t^2-a^2}{2t}$	⑥ $\dfrac{t^2+a}{2t}$	⑦ $\dfrac{t^2-a}{2t}$
⑧ $\dfrac{t^2+a^2}{2t^2}$	⑨ $\dfrac{t^2-a^2}{2t^2}$	ⓐ $\dfrac{t^2+a}{2t^2}$	ⓑ $\dfrac{t^2-a}{2t^2}$
ⓒ $\dfrac{1}{t}$	ⓓ $\dfrac{1}{t^2}$	ⓔ t	

$\boxed{6}$ の解答群

⓪ $\log\left\lvert\dfrac{x+a}{x-a}\right\rvert$	① $\log\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$	② $\log\lvert x^2-a^2\rvert$
③ $\log\lvert x^2-a\rvert$	④ $\log(x^2+a^2)$	⑤ $\log(x^2+a)$
⑥ $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$	⑦ $\log(x+\sqrt{x^2+a})$	⑧ $\tan^{-1}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)$
⑨ $\tan^{-1}(x^2-a^2)$	ⓐ $\tan^{-1}(x^2-a)$	ⓑ $\tan^{-1}(x^2+a^2)$
ⓒ $\tan^{-1}(x^2+a)$	ⓓ $\tan^{-1}(x+\sqrt{x^2+a^2})$	ⓔ $\tan^{-1}(x+\sqrt{x^2+a})$

(注) 記号 $\tan^{-1}$ は arctan とも表される．

解　$t=x+\sqrt{x^2+a}$ より $t-x=\sqrt{x^2+a}$ であるから，これの両辺を 2 乗して整理すれば $t^2-2tx=a$ を得る．したがって

$$x=\underline{\frac{t^2-a}{2t}},\quad \sqrt{x^2+a}=t-x=t-\frac{t^2-a}{2t}=\underline{\frac{t^2+a}{2t}},\quad \frac{dx}{dt}=\underline{\frac{t^2+a}{2t^2}}$$

よって

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{2t}{t^2+a}\frac{t^2+a}{2t^2}\,dt=\int\underline{\frac{1}{t}}\,dt=\log|t|+C=\log|x+\sqrt{x^2+a}|+C$$

最後に，$\sqrt{x^2+a} > \sqrt{x^2} \geqq -x$ より $x+\sqrt{x^2+a} > 0$ であることに注意すれば, 絶対値記号を省いて良い．すなわち $I = \underline{\log(x+\sqrt{x^2+a})} + C$ となる．したがって答は順に ⑦, ⑥, ⓐ, ⓒ, ⑦ である．

類題 1　不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$ を求めよ．

解　$t = x+\sqrt{x^2-x+1}$ とおくと，$x = \dfrac{t^2-1}{2t-1}$ となる．

$$\sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2-t+1}{2t-1}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}$$

より

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt \\ &= \int \frac{2}{2t-1}\,dt = \log|2t-1| + C \qquad (C \text{ は積分定数}) \\ &= \log|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1| + C \end{aligned}$$

ここで $\sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}} > \sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2} \geqq -x+\dfrac{1}{2}$ より $2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1>0$ であることに注意して絶対値を省く．したがって

$$I = \underline{\log\left(2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right)+C}$$

となる．

類題 2　不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ．

解　$t = x+\sqrt{x^2+1}$ とおくと，$x = \dfrac{t^2-1}{2t}$ となる．

$$x\sqrt{x^2+1} = \frac{t^4-1}{4t^2}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2}$$

より

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{4t^2}{t^4-1}\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int \frac{2}{t^2-1}\,dt \\
&= \int \frac{2}{(t+1)(t-1)}\,dt = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,dt \\
&= \log|t-1| - \log|t+1| + C \qquad (C \text{ は積分定数}) \\
&= \log\frac{|t-1|}{|t+1|} + C = \log\frac{|x+\sqrt{x^2+1}-1|}{|x+\sqrt{x^2+1}+1|} + C
\end{aligned}
$$

ここで $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} > -x-1$ より $x+\sqrt{x^2+1}+1 > 0$ に注意して $|x+\sqrt{x^2+1}+1|$ の絶対値を省く．したがって

$$
I = \underline{\log\frac{|x+\sqrt{x^2+1}-1|}{x+\sqrt{x^2+1}+1} + C}
$$

となる.

問 3　関数 $f(x) = (x+2)e^x$ のマクローリン展開を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき，$a_3 =$ $\boxed{\mathbf{7}}$，$a_4 = \boxed{\mathbf{8}}$ である．

$\boxed{\mathbf{7}}$，$\boxed{\mathbf{8}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 4	④ $\frac{1}{2}$	⑤ $\frac{3}{2}$
⑥ $\frac{1}{4}$	⑦ $\frac{3}{4}$	⑧ $\frac{5}{4}$	⑨ $\frac{1}{6}$	ⓐ $\frac{5}{6}$	ⓑ $\frac{7}{6}$
ⓒ $\frac{1}{8}$	ⓓ $\frac{3}{8}$	ⓔ $\frac{5}{8}$	ⓕ $\frac{7}{8}$	ⓖ $\frac{9}{8}$	

解　関数 $f(x)$ のマクローリン展開（Maclaurin expansion）は

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

という式だったことを思い出そう．指数関数 $g(x) = e^x$ のマクローリン展開を求める．$g^{(n)}(x) = e^x$ より $g^{(n)}(0) = 1$ であることに注意すると

$$g(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

と展開される．

次に $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ を用いて，$f(x) = (x+2)e^x$ のマクローリン展開を求めると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)e^x = (x+2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} \end{aligned}$$

となる．第一項と第二項をそれぞれ別に計算する．

$$
\begin{aligned}
\text{第一項} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} && \text{（ $k=n+1$ とおくと $n=0,1,2,\ldots$} \\
& && \text{を動くとき，$k=1,2,3,\ldots$ を動く）} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} && \text{（もう一度 k を n で置き換える）} \\
\text{第二項} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} \\
&= 2+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} && \text{（ $n=0$ のときの項を別に計算する）}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \text{第一項}+\text{第二項} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}\right) + \left(2+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{n!}\right) \\
&= 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{2x^n}{n!}\right) = 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx^n}{n!}+\frac{2x^n}{n!}\right) \\
&= 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}x^n
\end{aligned}
$$

ゆえに，$n \geqq 1$ について $a_n = \dfrac{n+2}{n!}$ である．よって $a_3 = \underline{\dfrac{5}{6}}$, $a_4 = \underline{\dfrac{1}{4}}$ である．したがって答は順に ⓐ, ⑥ である．

類題 1　関数 $f(x)=\log(1+x)$ のマクローリン展開を求めよ．

解　関数 $f(x)=\log(1+x)$ を微分すると

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x+1} \\
f''(x) &= \frac{-1}{(x+1)^2} \\
f'''(x) &= \frac{-1(-2)}{(x+1)^3} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{-1(-2)(-3)}{(x+1)^4} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

となり $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=-1$, $f'''(0)=1\times2$, $f^{(4)}(0)=-1\times2\times3,\ldots$ となる．したがって関数 $f(x)=\log(1+x)$ のマクローリン展

開は次のようになる．

$$\begin{aligned} f(x) &= 0+\frac{1}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1\times2}{3!}x^3-\frac{1\times2\times3}{4!}x^4+\cdots \\ &\quad +(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n+\cdots \\ &= \underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n} \end{aligned}$$

類題 2　関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ のマクローリン展開を求めよ．

解　関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\times(-1)=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \\ f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(1-x)^{-\frac{5}{2}}\times(-1)=\frac{1}{2}\frac{3}{2}(1-x)^{-\frac{5}{2}} \\ f'''(x) &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)(1-x)^{-\frac{7}{2}}\times(-1)=\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(1-x)^{-\frac{7}{2}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

となり $f(0)=1,\ f'(0)=\dfrac{1}{2},\ f''(0)=\dfrac{1\times3}{2^2},\ f'''(0)=\dfrac{1\times3\times5}{2^3},\ldots$ となる．
したがって関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ のマクローリン展開は次のようになる．

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}x+\frac{\frac{1\times3}{2^2}}{2!}x^2+\frac{\frac{1\times3\times5}{2^3}}{3!}x^3+\cdots \\ &\quad +\frac{\frac{(2n-1)!!}{2^n}}{n!}x^n+\cdots \\ &= \underline{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\times n!}x^n} \end{aligned}$$

ただし $(2n-1)!!=(2n-1)\times(2n-3)\times(2n-5)\times\cdots\times5\times3\times1$ である．
　参考として $(2n)!!=(2n)\times(2n-2)\times(2n-4)\times\cdots\times4\times2$ と表されるので

$$\begin{aligned} 2^n\times n! &= 2n\times2(n-1)\times2(n-2)\times2(n-3)\times\cdots\times2(2)\times2(1) \\ &= (2n)!! \end{aligned}$$

と変形できる．したがって答えは

$$\underline{f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n}$$

とも表せる．

問 4 $\lim_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2-3x-1}) = \boxed{\textbf{9}}$.

$\boxed{\textbf{9}}$ **の解答群**

⓪ $-\frac{1}{3}$	① $\frac{1}{3}$	② $-\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{2}$	④ 0	⑤ -1	⑥ 1
⑦ -2	⑧ 2	⑨ ∞	ⓐ $-\infty$			

解 関数 $f(x), g(x)$ が $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ を満たすとき，又は $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ を満たすとき

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ．さらに $x\to\infty$ を $x\to 0$ としても同じように $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が成り立つ．この定理はロピタルの定理（l'Hospital theorem）と呼ばれる．

$3x-\sqrt{9x^2-3x-1}$ を以下のように変形する．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2-3x-1}) &= \lim_{x\to\infty}\left(3x-3|x|\sqrt{1-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9x^2}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}3x\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9x^2}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9x^2}}}{\frac{1}{3x}}\end{aligned}$$

（ $x\to\infty$ より $|x|$ の絶対値を省く）

ここで $f(x) = 1-\sqrt{1-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9x^2}}$, $g(x) = \frac{1}{3x}$ とおく．$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ であるので，ロピタルの定理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ．$f(x)$, $g(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{3x^2}+\frac{2}{9x^3}\right)\\ g'(x) &= -\frac{1}{3x^2}\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(1+\frac{2}{3x}\right) = \underline{\frac{1}{2}}$$

となり答は ③ である．

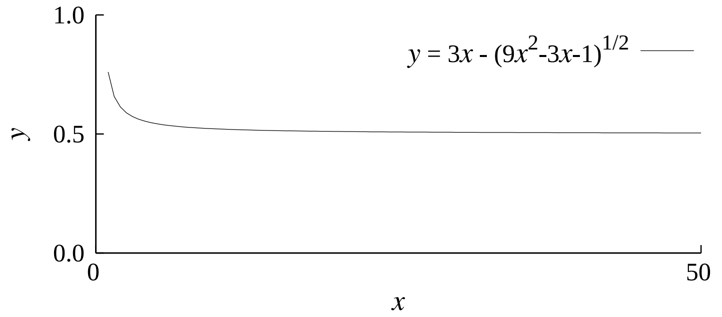

図 2: $y = 3x - \sqrt{9x^2 - 3x - 1}$ のグラフ

別解　次のようにして極限値を求めることもできる.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(3x - \sqrt{9x^2 - 3x - 1}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x)^2 - \left(\sqrt{9x^2 - 3x - 1}\right)^2}{3x + \sqrt{9x^2 - 3x - 1}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2 - (9x^2 - 3x - 1)}{3x + \sqrt{9x^2 - 3x - 1}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{3x + 1}{3x + \sqrt{9x^2 - 3x - 1}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1 + \dfrac{1}{3x}}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{3x+1}{9x^2}}} = \underline{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

参考として $y = 3x - \sqrt{9x^2 - 3x - 1}$ のグラフを図 2 に示す.

類題 1　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1 + e^x)}{x}$ の極限を求めよ.

解　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log(1 + e^x) = \infty,\ \lim_{x\to\infty}x = \infty$ であるので，ロピタルの定理を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1 + e^x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\big(\log(1 + e^x)\big)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1 + e^x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{e^x} + 1} = \underline{1}\end{aligned}$$

となる．参考として $y = \dfrac{\log(1 + e^x)}{x}$ のグラフを図 3 に示す.

類題 2　$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^2\log x$ の極限を求めよ.

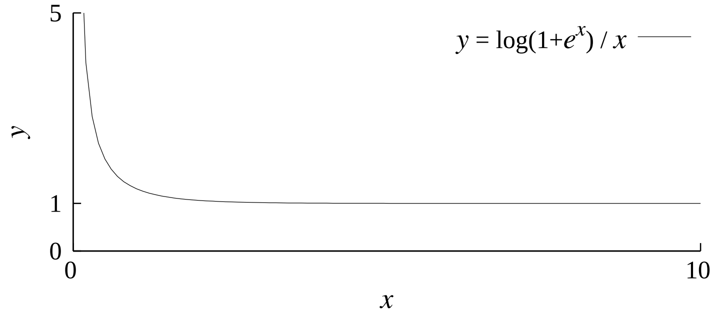

図 3: $y = \dfrac{\log(1+e^x)}{x}$ のグラフ

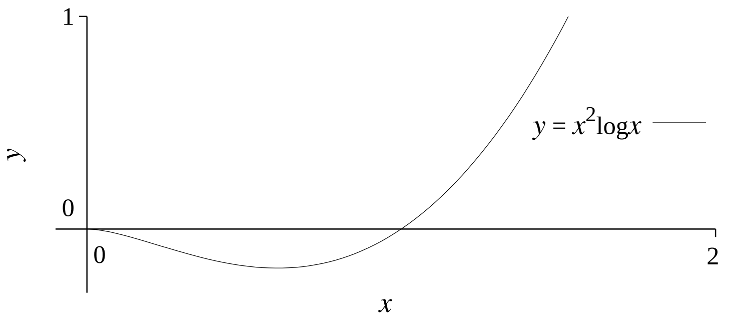

図 4: $y = x^2 \log x$ のグラフ

解　$x^2 \log x$ を以下のように変形する.

$$\lim_{x\to+0} x^2 \log x = \lim_{x\to+0} -\frac{-\log x}{\dfrac{1}{x^2}}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+0} -\log x = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{1}{x^2} = \infty$ であるので，ロピタルの定理を用いる.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} -\frac{-\log x}{\dfrac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to+0} -\frac{(-\log x)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'} \\
&= \lim_{x\to+0} -\frac{-\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to+0} -\frac{x^2}{2} \\
&= \underline{0}
\end{aligned}$$

参考として $y = x^2 \log x$ のグラフを図 4 に示す.

問 5　xy 平面上の集合 $\{(x,y) : 1 \leqq y \leqq x^2,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ を D で表すとき,

$$\iint_D \frac{x}{y^2}\,dxdy = \boxed{\mathbf{10}} - \log \boxed{\mathbf{11}}$$

である.

$\boxed{\mathbf{10}}$, $\boxed{\mathbf{11}}$ の解答群

⓪ -3	① 3	② -2	③ 2	④ -1	⑤ 1
⑥ 0	⑦ $-\pi$	⑧ π	⑨ $-\dfrac{3}{2}$	ⓐ $\dfrac{3}{2}$	ⓑ $-\dfrac{1}{2}$
ⓒ $\dfrac{1}{2}$	ⓓ $-\dfrac{\pi}{2}$	ⓔ $\dfrac{\pi}{2}$	ⓕ $-\dfrac{\pi}{3}$	ⓖ $\dfrac{\pi}{3}$	

解　xy 平面上の集合 D は図 5 の灰色の領域で示される. $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y^2}\,dxdy$ は集合 D における $\dfrac{x}{y^2}$ の総和である. この総和を求めるために, まず $x = \alpha$ の直線を示す図中の太線に沿って $1 \leqq y \leqq \alpha^2$ の範囲で $\dfrac{\alpha}{y^2}$ を積分する.

$$\int_1^{\alpha^2} \frac{\alpha}{y^2}\,dy = \left[-\frac{\alpha}{y}\right]_1^{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha} + \alpha$$

次に得られた $\left(-\dfrac{1}{\alpha} + \alpha\right)$ を x 軸方向へ $1 \leqq \alpha \leqq 2$ の範囲で積分する.

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) d\alpha = \left[-\log|\alpha| + \frac{\alpha^2}{2}\right]_1^2 = -\log|2| + 2 + \log|1| - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \log 2$$

以上の計算をまとめると次のようになる. ただし α を x に置き換えてある.

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{y^2}\,dxdy &= \int_1^2 \left\{\int_1^{x^2} \frac{x}{y^2}\,dy\right\} dx \\
&= \int_1^2 \left[-\frac{x}{y}\right]_{y=1}^{y=x^2} dx \\
&= \int_1^2 \left(-\frac{1}{x} + x\right) dx \\
&= \left[-\log|x| + \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \underline{\frac{3}{2}} - \log \underline{2}
\end{aligned}$$

したがって集合 D における $\dfrac{x}{y^2}$ の総和は $\dfrac{3}{2} - \log 2$ であり, 答は順に ⓐ, ③ である.

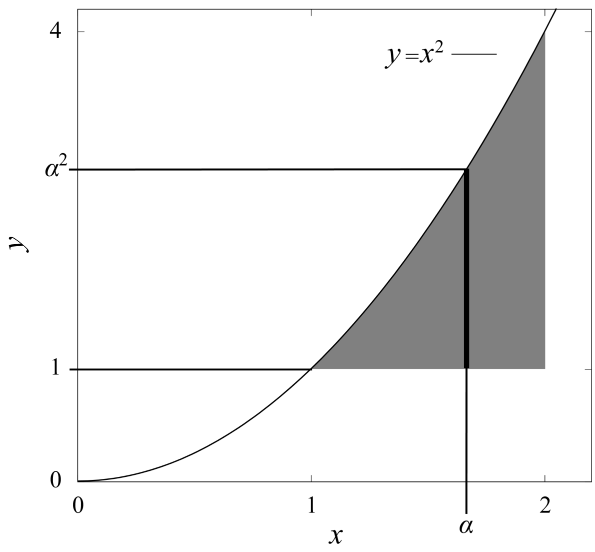

図 5: $\{(x,y) : 1 \leqq y \leqq x^2,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ で定義される集合 D

別解　最初に x 軸方向へ積分すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{y^2}\,dxdy &= \int_1^4 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{x}{y^2}\,dx \right\} dy \\
&= \int_1^4 \left[\frac{x^2}{2y^2} \right]_{x=\sqrt{y}}^{x=2} dy \\
&= \int_1^4 \left(\frac{2}{y^2} - \frac{1}{2y} \right) dy \\
&= \left[-\frac{2}{y} - \frac{\log|y|}{2} \right]_1^4 = \underline{\frac{3}{2} - \log 2}
\end{aligned}
$$

類題 1　xy 平面上の集合 $\{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ を D で表すとき

$$
I = \iint_D \frac{2}{1+x+2y}\,dxdy
$$

を求めよ．

解　まず x 軸方向へ $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $\dfrac{2}{1+x+2y}$ を積分し，その後 y 軸方

向へ $0 \leqq y \leqq 1$ の範囲で積分する．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left\{ \int_0^2 \frac{2}{1+x+2y}\, dx \right\} dy \\
&= \int_0^1 \Big[2\log|1+x+2y| \Big]_{x=0}^{x=2} dy \\
&= \int_0^1 \Big[2\log(1+x+2y) \Big]_{x=0}^{x=2} dy \qquad \text{（}1+x+2y \geqq 1 \text{ より } |1+x+2y| \text{ の絶対値を省く）} \\
&= 2\int_0^1 \log(3+2y)\, dy - 2\int_0^1 \log(1+2y)\, dy
\end{aligned}
$$

ここで $\displaystyle\int f'(y)\, g(y)\, dy = f(y)\, g(y) - \int f(y)\, g'(y)\, dy$ を用いて部分積分する．第一項においては $f(y) = \dfrac{3+2y}{2}$，$g(y) = \log(3+2y)$ とおいて適用し，第二項においては $f(y) = \dfrac{1+2y}{2}$，$g(y) = \log(1+2y)$ とおいて適用する．

$$
\begin{aligned}
I &= 2\left(\left[\frac{3+2y}{2} \log(3+2y) \right]_0^1 - \int_0^1 1\, dy \right) \\
&\quad -2\left(\left[\frac{1+2y}{2} \log(1+2y) \right]_0^1 - \int_0^1 1\, dy \right) \\
&= \underline{5\log 5 - 6\log 3}
\end{aligned}
$$

別解　最初に y 軸方向へ積分すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \left\{ \int_0^1 \frac{2}{1+x+2y}\, dy \right\} dx \\
&= \int_0^2 \Big[\log|1+x+2y| \Big]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^2 \Big[\log(1+x+2y) \Big]_{y=0}^{y=1} dx \qquad \text{（}1+x+2y \geqq 1 \text{ より } |1+x+2y| \text{ の絶対値を省く）} \\
&= \int_0^2 \log(3+x)\, dx - \int_0^2 \log(1+x)\, dx \\
&= \left(\Big[(3+x)\log(3+x) \Big]_0^2 - \int_0^2 1\, dx \right) \\
&\quad - \left(\Big[(1+x)\log(1+x) \Big]_0^2 - \int_0^2 1\, dx \right) \\
&= \underline{5\log 5 - 6\log 3}
\end{aligned}
$$

類題 2　xy 平面上の集合 $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqq 2x + 2y - 1\}$ を D で表すとき

$$
I = \iint_D (xy - y)\, dxdy
$$

を求めよ．

解　xy 平面上の集合 D は図 6 の灰色の領域で示される．集合 D の要素 (x, y) を極座標を用いて表すと $(r\cos\theta+1,\, r\sin\theta+1)$ となる．$dxdy = rdrd\theta$ であるので，集合 $\{(r,\theta) : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ を E とすると次のようになる．

$$I = \iint_D (xy - y)\, dxdy = \iint_E \Big(r^2\cos\theta\sin\theta + r\cos\theta\Big) r\, drd\theta$$

まず θ 軸方向へ $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で $\big(r^2\cos\theta\sin\theta + r\cos\theta\big)r$ を積分し，その後 r 軸方向へ $0 \leqq r \leqq 1$ の範囲で積分する．

$$\begin{aligned}
I &= \iint_E \Big(r^2\cos\theta\sin\theta + r\cos\theta\Big) r\, drd\theta \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \Big(r^3\cos\theta\sin\theta + r^2\cos\theta\Big)\, d\theta \right\} dr \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3\sin(2\theta)}{2} + r^2\cos\theta\right)\, d\theta \right\} dr \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{r^3\cos(2\theta)}{4} + r^2\sin\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr \\
&= \int_0^1 0\, dr = \underline{0}
\end{aligned}$$

別解　最初に r 軸方向へ積分すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
I &= \iint_E \Big(r^2\cos\theta\sin\theta + r\cos\theta\Big) r\, drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \Big(r^3\cos\theta\sin\theta + r^2\cos\theta\Big)\, dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\cos\theta\sin\theta + \frac{r^3}{3}\cos\theta \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\theta\sin\theta}{4} + \frac{\cos\theta}{3} \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(2\theta)}{8} + \frac{\cos\theta}{3} \right) d\theta \\
&= \left[-\frac{\cos(2\theta)}{16} + \frac{\sin\theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= \underline{0}
\end{aligned}$$

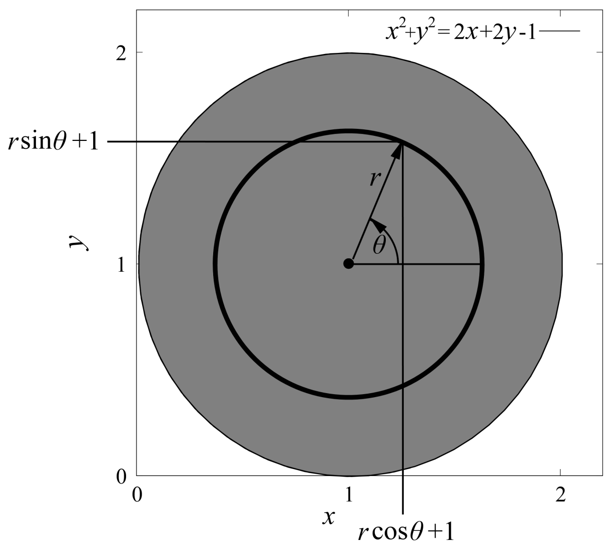

図 6: $\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 2x+2y-1\}$ で定義される集合 D

第 2 問 〔解答番号 $\boxed{12}$ 〜 $\boxed{20}$ 〕 （配点 40 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

問 1 xy 平面上の図形 A とその上で定義され非負の値をとる関数 $\rho(x,y)$ に対して，

$$M = \iint_A \rho(x,y)dxdy,$$

$$X = \frac{1}{M}\iint_A x\rho(x,y)\,dxdy, \qquad Y = \frac{1}{M}\iint_A y\rho(x,y)\,dxdy$$

とおく．このとき点 (X,Y) を密度 ρ に関する A の重心という．特に

$$A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\},$$

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 2 & (x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0,\ x \geqq 0 \quad \text{のとき}) \\ 1 & (x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0,\ x < 0 \quad \text{のとき}) \end{cases}$$

のとき，$M = \boxed{12}$ であり，$(X,Y) = \left(\boxed{13}, \boxed{14}\right)$ である．

$\boxed{12}$ 〜 $\boxed{14}$ の解答群

⓪ $\frac{\pi}{4}$	① $\frac{\pi}{2}$	② $\frac{3\pi}{4}$	③ π	④ $\frac{1}{4\pi}$	⑤ $\frac{1}{2\pi}$
⑥ $\frac{3}{4\pi}$	⑦ $\frac{1}{\pi}$	⑧ $\frac{1}{3\pi}$	⑨ $\frac{2}{3\pi}$	ⓐ $\frac{5}{6\pi}$	ⓑ $\frac{4}{3\pi}$
ⓒ $\frac{1}{9\pi}$	ⓓ $\frac{2}{9\pi}$	ⓔ $\frac{4}{9\pi}$	ⓕ $\frac{5}{9\pi}$		

解 $A_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0,\ x \geqq 0\}$, $A_2 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0,\ x < 0\}$ とおく．A_1 は原点を中心とする半径 1 の円の第 1 象限にある部分であり，A_2 は第 2 象限にある部分である．A_1 上 $\rho(x,y)=2$, A_2 上 $\rho(x,y)=1$ であるから

$$\begin{aligned} M &= 2\times A_1\text{の面積} + A_2\text{の面積} \\ &= 2\iint_{A_1} 1\,dxdy + \iint_{A_2} 1\,dxdy \\ &= \underline{\frac{3\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$X = \frac{4}{3\pi}\left\{\iint_{A_1} 2x\,dxdy + \iint_{A_2} x\,dxdy\right\},\ \ Y = \frac{4}{3\pi}\left\{\iint_{A_1} 2y\,dxdy + \iint_{A_2} y\,dxdy\right\}$$

となる．ここで $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と極座標に変換する．A_1 は $0\leqq r\leqq 1$, $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に，A_2 は $0\leqq r\leqq 1$, $\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqq\pi$ に対応し，$dxdy=rdrd\theta$ であるから

$$\begin{aligned}
X &= \frac{4}{3\pi}\left\{2\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^1(r\cos\theta)r\,dr\right\}d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\left\{\int_0^1(r\cos\theta)r\,dr\right\}d\theta\right\}\\
&= \frac{4}{3\pi}\left\{2\int_0^1 r^2\,dr\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta+\int_0^1 r^2dr\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\,d\theta\right\}\\
&= \frac{4}{3\pi}\left\{2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\times\Big[\sin\theta\Big]_0^{\pi/2}+\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\times\Big[\sin\theta\Big]_{\pi/2}^{\pi}\right\}=\frac{4}{3\pi}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=\underline{\frac{4}{9\pi}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{4}{3\pi}\left\{2\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^1(r\sin\theta)r\,dr\right\}d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\left\{\int_0^1(r\sin\theta)r\,dr\right\}d\theta\right\}\\
&= \frac{4}{3\pi}\left\{2\int_0^1 r^2dr\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta+\int_0^1 r^2dr\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right\}\\
&= \frac{4}{3\pi}\left\{2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\times\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/2}+\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\times\Big[-\cos\theta\Big]_{\pi/2}^{\pi}\right\}=\frac{4}{3\pi}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\underline{\frac{4}{3\pi}}
\end{aligned}$$

したがって答は順に ②, ⓔ, ⓑ である．

類題 1　$y\geqq 0$, $x^2+y^2\leqq a^2$ で表される半径 a の半円 A とする．図形 A の重心 (X, Y) を求めよ．ただし密度は一様とする．

解　図形 A の重心は

$$(X,\,Y)=\left(\frac{\displaystyle\iint_A xdxdy}{\displaystyle\iint_A dxdy},\ \frac{\displaystyle\iint_A ydxdy}{\displaystyle\iint_A dxdy}\right)$$

で与えられる．$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と極座標に変換する．$dxdy=rdrd\theta$ であるので

$$\iint_A dxdy=\int_0^{\pi}\!\!\int_0^a r\,drd\theta=\int_0^a r\,dr\int_0^{\pi}d\theta=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a\times\Big[\theta\Big]_0^{\pi}=\frac{\pi a^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\iint_A x\,dxdy &= \int_0^{\pi}\!\!\int_0^a r^2\cos\theta\,drd\theta=\int_0^a r^2\,dr\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta\\
&= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a\times\Big[\sin\theta\Big]_0^{\pi}=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_A y\,dxdy &= \int_0^{\pi}\!\!\int_0^a r^2\sin\theta\,drd\theta=\int_0^a r^2\,dr\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\\
&= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a\times\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}=\frac{2a^3}{3}
\end{aligned}$$

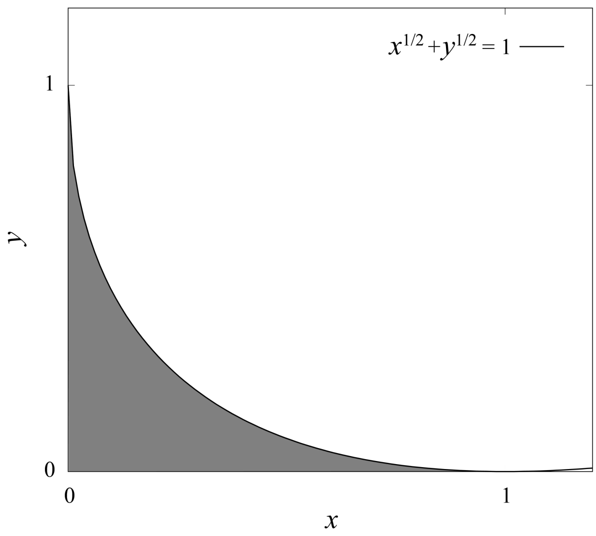

図 7: $\{(x,y) : \sqrt{y} \leqq 1-\sqrt{x},\ 0 \leqq x \leqq 1\}$ で定義される集合 A

となる．したがって

$$(X,\,Y) = \left(\frac{0}{\frac{\pi a^2}{2}},\ \frac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{2}} \right) = \underline{\left(0,\ \frac{4a}{3\pi}\right)}$$

類題 2　曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸，y 軸とで囲まれた部分を A とする．図形 A の重心 (X,Y) を求めよ．ただし密度は一様とする．

解　図形 A は図 7 の灰色の領域で示される．類題 1 と同様に計算すると

$$\iint_A dxdy = \int_0^1\!\!\int_0^{1-2\sqrt{y}+y} dxdy = \int_0^1 (1-2\sqrt{y}+y)\,dy = \frac{1}{6}$$
$$\iint_A x\,dxdy = \int_0^1\!\!\int_0^{1-2\sqrt{x}+x} x\,dydx = \int_0^1 x(1-2\sqrt{x}+x)\,dx = \frac{1}{30}$$
$$\iint_A y\,dxdy = \int_0^1\!\!\int_0^{1-2\sqrt{y}+y} y\,dxdy = \int_0^1 y(1-2\sqrt{y}+y)\,dy = \frac{1}{30}$$

となるので，図形 A の重心は次のようになる．

$$(X,\,Y) = \left(\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{6}},\ \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{6}} \right) = \underline{\left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)}$$

問 2　関数 $g(u,v)$ は変数 u,v について 2 回偏微分可能で $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ が成り立つとする．$u = x+y,\ v = xy$ とおいて，x,y の関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = g(x+y, xy)$ で定義する．このとき，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(x+y,xy)\boxed{\textbf{15}} + \frac{\partial g}{\partial v}(x+y,xy)\boxed{\textbf{16}}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+y,xy) + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y,xy)\boxed{\textbf{17}} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+y,xy)\boxed{\textbf{18}} \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial u}(x+y,xy)\boxed{\textbf{19}} + \frac{\partial g}{\partial v}(x+y,xy)\boxed{\textbf{20}}
\end{aligned}$$

である．

15 〜 20 の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ x	⑤ y
⑥ x^2	⑦ y^2	⑧ $(x+y)$	⑨ $(x-y)$	ⓐ xy	

解　関数 $g(u,\,v)$ において u，v がさらに x と y の関数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ であるとき，$f(x,y) = g(u(x,y),\,v(x,y))$ とおくと $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned}$$

さらに $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\
&= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}
\end{aligned}$$

ここでは $u(x,y) = x+y$，$v(x,y) = xy$ であるので

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial v}{\partial x} = y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\times\underline{1}+\frac{\partial g}{\partial v}\times\underline{y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\times 1+\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\times y+\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\times x+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\times xy+\frac{\partial g}{\partial u}\times 0+\frac{\partial g}{\partial v}\times 1\end{aligned}$$

となる．さらに $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}$ より $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ は次のように変形される．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\times 1+\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\times\underline{(x+y)}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\times\underline{xy}+\frac{\partial g}{\partial u}\times\underline{0}+\frac{\partial g}{\partial v}\times\underline{1}$$

答は順に ①, ⑤, ⑧, ⓐ, ⓪, ① である．

類題 1　次の合成関数の与えられた点における微分係数 $(g\circ F)'(t)$ を求めよ．

$$F(t)=(\cos\pi t,\,\sin\pi t),\quad g(x,y)=\log(x^2+y^2),\quad t=\frac{1}{4}$$

解　$g\circ F(t)$ の微分は

$$\frac{d}{dt}g\circ F(t)=\frac{d}{dt}g\big(F(t)\big)=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

と表される．

$$\frac{d}{dt}g\circ F(t)=\frac{2x}{x^2+y^2}(-\pi\sin\pi t)+\frac{2y}{x^2+y^2}(\pi\cos\pi t)$$

$x(t)=\cos\pi t$，$y(t)=\sin\pi t$ を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g\circ F(t) &= (2\cos\pi t)(-\pi\sin\pi t)+(2\sin\pi t)(\pi\cos\pi t)\\ &= 0\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{d}{dt}g\circ F\left(\frac{1}{4}\right)=\underline{0}$$

類題 2　次の合成関数の与えられた点における微分係数 $(g\circ F)'(t)$ を求めよ．

$$F(t)=(3t^2-4t,\,5t-4),\quad g(x,y)=x^8+x^5y^9,\quad t=1$$

解　類題 1 と同様に $g\circ F(t)$ の微分は

$$\frac{d}{dt}g\circ F(t)=(8x^7+5x^4y^9)(6t-4)+(9x^5y^8)(5)$$

となる．$x(t)=3t^2-4t$，$y(t)=5t-4$ を代入し $t=1$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g\circ F(1) &= (-8+5)(6-4)+(-9)(5)\\ &= \underline{-51}\end{aligned}$$

第 3 問　〔解答番号 $\boxed{21}$ ～ $\boxed{33}$〕　（配点 55 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

問 1　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{21}$ である．

$\boxed{21}$ の解答群

⓪ -3　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4　⑧ 5　⑨ 6

解　n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ において行列式 $|A|$ は，i 行または j 列を用いて次のように表される．

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \end{aligned}$$

ただし A_{ij} は行列 A から i 行と j 列を取り除いた行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けた値であり，次のように表される．

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \times \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & j\ \text{列} & & \phantom{a_{1n}} \end{array} & \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i\ \text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

問題文の行列式を $|A|$ とすると，行列 A の 1 列目を用いて行列式 $|A|$ を求める．

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= 1\times A_{11} + 0\times A_{21} + 0\times A_{31} + 0\times A_{41} \\
&= A_{11} = (-1)^2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = |B|
\end{aligned}$$

次に行列 B の 3 行目を用いて行列式 $|B|$ を求める．

$$\begin{aligned}
|B| &= 2\times B_{31} + 0\times B_{32} + 3\times B_{33} \\
&= 2\times(-1)^4\times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\times(-1)^6\times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -4 + 6 = \underline{2}
\end{aligned}$$

したがって答は ⑤ である．

類題 1　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

解　行列 A において，ある行（列）に別の行（列）の定数倍を加えても行列式 $|A|$ の値は変わらない．この性質を用いて行列の基本変形を行い，行列式の値を求める．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{1,2,4\text{ 行目に 3 行目の }-2,\\ -2,-3\text{ 倍をそれぞれ加える}}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -7 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & -3 & -5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ -10 & 0 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{2\text{ 列目を用いて}\\ \text{展開する}}}{=\!=\!=} -1\times \begin{vmatrix} -7 & 0 & -1 \\ -5 & -3 & -5 \\ -10 & -5 & -7 \end{vmatrix} \overset{\substack{1\text{ 列目に 3 列目の}\\ -7\text{ 倍を加える}}}{=\!=\!=}$$

$$-1\times \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 30 & -3 & -5 \\ 39 & -5 & -7 \end{vmatrix} \overset{\substack{1\text{ 行目を用いて}\\ \text{展開する}}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 30 & -3 \\ 39 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\overline{\overline{}}}{\text{2 行目から 1 行目を引く}} \begin{vmatrix} 30 & -3 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = -60 + 27 = \underline{-33}$$

類題 2　行列式 $\begin{vmatrix} x & -y & x & y \\ y & x & -y & x \\ x & y & x & -y \\ -y & x & y & x \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

解　類題 1 と同様に行列の基本変形を行い，行列式の値を求める．

$$\begin{vmatrix} x & -y & x & y \\ y & x & -y & x \\ x & y & x & -y \\ -y & x & y & x \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{3 行目から 1 行目を引き} \\ \text{4 行目に 2 行目を加える}}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} x & -y & x & y \\ y & x & -y & x \\ 0 & 2y & 0 & -2y \\ 0 & 2x & 0 & 2x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{1 列目を用いて} \\ \text{展開する}}}{=\!=\!=} x\times \begin{vmatrix} x & -y & x \\ 2y & 0 & -2y \\ 2x & 0 & 2x \end{vmatrix} - y\times \begin{vmatrix} -y & x & y \\ 2y & 0 & -2y \\ 2x & 0 & 2x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{2 列目を用いて} \\ \text{展開する}}}{=\!=\!=} xy\times \begin{vmatrix} 2y & -2y \\ 2x & 2x \end{vmatrix} + xy\times \begin{vmatrix} 2y & -2y \\ 2x & 2x \end{vmatrix}$$

$$= 8x^2y^2 + 8x^2y^2 = \underline{16x^2y^2}$$

別解　n 次の正方行列 A と m 次の正方行列 B において

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

が成り立つ．ただし C は $n\times m$ の行列である．この性質を用いて行列式を求めると

$$\begin{vmatrix} x & -y & x & y \\ y & x & -y & x \\ x & y & x & -y \\ -y & x & y & x \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{3 行目から 1 行目を引き} \\ \text{4 行目に 2 行目を加える}}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} x & -y & x & y \\ y & x & -y & x \\ 0 & 2y & 0 & -2y \\ 0 & 2x & 0 & 2x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{2 列目と 3 列目を入れ替える}}{\underset{}{\overline{\overline{\text{（-1 倍になることに注意）}}}}} -1\times\begin{vmatrix} x & x & -y & y \\ y & -y & x & x \\ 0 & 0 & 2y & -2y \\ 0 & 0 & 2x & 2x \end{vmatrix}$$

$$= -1\times\begin{vmatrix} x & x \\ y & -y \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2y & -2y \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = -1\times(-xy-xy)(4xy+4xy)$$

$$= \underline{16x^2y^2}$$

となる.

問 2　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\mathbf{22}}$ である．

(2)　2 以上の自然数 n について，行列式 $|A^n - A^{n-1}|$ の値は $\boxed{\mathbf{23}} \cdot \boxed{\mathbf{24}}^{\,n-1}$ である．

$\boxed{22}$ ～ $\boxed{24}$ の解答群

⓪ -3　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4　⑧ 5　⑨ 6

解　(1)　行列の基本変形を行い行列式を求める．

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix} \overset{\substack{2,\,3\text{ 行目に}, 1\text{ 行目の} \\ -1,\,-2\text{ 倍をそれぞれ加える}}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{2\text{ 列目を用いて} \\ \text{展開する}}}{=\!=\!=} -1\times(-1)^3\times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \underline{3}$$

したがって答は ⑥ である．

(2)　n 次の正方行列 B，C において $|BC| = |B||C|$ が成り立つ．したがって E を 3 次の単位行列とすると

$$|A^n - A^{n-1}| = |A^{n-1}(A-E)| = |A|^{n-1}|A-E|$$

となる．ここで

$$|A| = 3$$

$$|A-E| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{2\text{ 列目に} \\ 3\text{ 列目を加える}}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{1\text{ 行目を用いて} \\ \text{展開する}}}{=\!=\!=} 1\times(-1)^4\times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

であるので，$|A^n - A^{n-1}|$ は次のようになる．

$$|A^n - A^{n-1}| = \underline{5}\times\underline{3}^{n-1}$$

したがって答は順に ⑧, ⑥ である．

類題 1　A, B, C を n 次の正方行列とするとき

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|$$

が成り立つ．$n = 2$ の場合について証明せよ．

解　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ とおく．

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\times(-1)^2\times\begin{vmatrix} a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{21}\times(-1)^3\times\begin{vmatrix} a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\times a_{22}\times(-1)^2\times\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{21}\times a_{12}\times(-1)^2\times\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\times\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\
&= |A||B| \qquad \boxed{\text{証明終}}
\end{aligned}$$

類題 2　A, B を n 次の正方行列とするとき，類題 1 の等式を用いて次の等式が成り立つことを示せ．

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A - B|\,|A + B|$$

解　行列式 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$ の $n+1$ 行目に 1 行目を加える．次に $n+2$ 行目に 2 行目を加える．これを繰り返し最後に $2n$ 行目に n 行目を加えると，次のようになる．

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B+A & A+B \end{vmatrix}$$

さらに行列式 $\begin{vmatrix} A & B \\ B+A & A+B \end{vmatrix}$ の 1 列目から $n+1$ 列目を引く．2 列目から $n+2$ 列目を引く．これを繰り返し最後に n 列目から $2n$ 列目を引くと，次のようになる．

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B+A & A+B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{vmatrix}$$

類題 1 の等式より

$$\begin{vmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{vmatrix} = |A-B||A+B| \qquad \boxed{\textbf{証明終}}$$

問 3　(1)　3 つの連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+\ \ y+3z &= \ \ 1 \\ x+2y+4z &= \ \ 1 \\ 2x-y+3z &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+\ \ y+3z &= \ \ 1 \\ x+2y+4z &= \ \ 2 \\ 2x-y+3z &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+\ \ y+3z &= 1 \\ x+2y+4z &= 2 \\ 2x-y+3z &= 1 \end{cases}$$

の中で解をもつのは左から $\boxed{\textbf{25}}$ 番目の連立 1 次方程式である.

(2)　左から $\boxed{\textbf{25}}$ 番目の連立 1 次方程式の解は, 次の組 (x,y,z) の中に $\boxed{\textbf{26}}$ 個ある.

$$(-4,-1,2),\ (-4,-2,2),\ (-2,0,1),\ (0,1,0)$$

$\boxed{\textbf{25}}$, $\boxed{\textbf{26}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

解　(1)　これら 3 つの連立 1 次方程式をはき出し法で解く.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{-1 倍を加える}]{\text{2 行目に 1 行目の}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{-2 倍を加える}]{\text{3 行目に 1 行目の}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3 倍を加える}]{\text{3 行目に 2 行目の}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

上の式より, 3 つの連立 1 次方程式は次のようになる.

$$\begin{cases} x \qquad +2z &= \ \ 1 \\ \quad y \ + \ z &= \ \ 0 \\ \qquad\quad 0 &= -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \qquad +2z &= 0 \\ \quad y \ + \ z &= 1 \\ \qquad\quad 0 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \qquad +2z &= 0 \\ \quad y \ + \ z &= 1 \\ \qquad\quad 0 &= 2 \end{cases}$$

したがって左から 1 番目と 3 番目の連立 1 次方程式は, それぞれ $0=-3$, $0=2$ を含むため解を持たない. 解をもつ連立 1 次方程式は左から 2 番目であり答は ② である.

(2)　$x+2z=0,\ y+z=1$ を満たすものは

$$(-4,-1,2),\ (-2,0,1),\ (0,1,0)$$

の $\underline{3}$ 個．したがって答は ③ である．

類題 1　次の連立 1 次方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

解　連立 1 次方程式をはき出し法で解く．

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{2, −4, 1 倍を加える}]{\text{2, 3, 4 行目に 1 行目の}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 15 \\ 0 & -3 & -8 & -7 & -27 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3, −1 倍を加える}]{\text{3, 4 行目に 2 行目の}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3 行目の } -1,\ -6,\ 3 \text{ 倍を加える}]{\text{3 行目を } \frac{1}{10} \text{ 倍した後 } 1,\ 2,\ 4 \text{ 行目に}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6/5 & 21/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 21/5 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 2/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{を加えた後, 4 行目を } \frac{5}{2} \text{ 倍する}]{\text{1, 2, 3 行目に 4 行目の } -3,\ -\frac{1}{2},\ -2 \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

したがって解は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

類題 2　次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解　類題 1 と同様に連立 1 次方程式をはき出し法で解く.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2,\,-2,\,-1\text{ 倍を加える}]{1,3,4\text{ 行目に }2\text{ 行目の}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[4\text{ 行目の }-2,\,3\text{ 倍を加える}]{1\text{ 行目を}\frac{1}{3}\text{倍した後, }2,3\text{ 行目に}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -7 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[7,\,-12,\,-3\text{ 倍を加える}]{2,3,4\text{ 行目に }1\text{ 行目の}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

上の式より連立 1 次方程式は次のようになる.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = -1 \\ + x_2 - x_4 = 1 \\ + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

したがって $x_4 = c$（任意定数）とおくと，求める解は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c-1 \\ c+1 \\ c-1 \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問 4　a を正の定数とする．3 次元実数ベクトル

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}a\\0\\-a\end{pmatrix}$$

を考える．$\boldsymbol{u}_3$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ と同様に大きさ (長さ) が 1 とする．

(1)　a の値は $\boxed{\mathbf{27}}$ である．

(2)　ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ で表す．$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$ に注意すれば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3$ のとき，

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boxed{\mathbf{28}},\quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boxed{\mathbf{29}},\quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boxed{\mathbf{30}}$$

である．

(3)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boxed{\mathbf{31}}}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\boxed{\mathbf{32}}}{\sqrt{6}}\boldsymbol{u}_2 + \frac{\boxed{\mathbf{33}}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_3$$

と表せる．

$\boxed{\mathbf{27}}$ ～ $\boxed{\mathbf{33}}$ の解答群

⓪ -3　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4　⑧ 5　⑨ 6

解　(1)　$||\boldsymbol{u}_3|| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + 0^2 + (-a)^2} = |a| = 1$ および $a > 0$ より，a の値は $\underline{1}$ である．したがって答は ④ である．

(2)　$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ の内積をそれぞれ求めると次のようになる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_1 &= (\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3) \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 \\
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_2 &= (\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3) \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 \\
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_3 &= (\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3) \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 + 2\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 + 3\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$，$\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$，$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$ および $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 1$，$\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 1$，$\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 1$ であるので

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 1 \\
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 2 \\
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 + 2\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 + 3\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 3
\end{aligned}$$

となる．したがって答は順に ④, ⑤, ⑥ である．

(3) $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_3$ とする．$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_3$ をそれぞれ求める．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1 &= (\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_3)\cdot\boldsymbol{u}_1 = \alpha\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1 = \alpha \\
\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2 &= (\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_3)\cdot\boldsymbol{u}_2 = \beta\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2 = \beta \\
\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_3 &= (\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_3)\cdot\boldsymbol{u}_3 = \gamma\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_3 = \gamma
\end{aligned}$$

一方，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ のベクトルの成分を用いて $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_3$ をそれぞれ求める．

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1 = \frac{6}{\sqrt{3}},\ \ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2 = 0,\ \ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_3 = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

したがって $\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$，$\beta = 0$，$\gamma = \dfrac{-2}{\sqrt{2}}$ が得られ

$$\boldsymbol{x} = \frac{6}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}_1 + \frac{0}{\sqrt{6}}\boldsymbol{u}_2 + \frac{-2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_3$$

となる．答は順に ⑨, ③, ① である．

類題 1 内積空間 V が正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ をもつとする．このとき

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$$

とすれば，$x_i = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_i\ \ (i = 1, \ldots, n)$ となることを示せ．$\cdot$ は内積を示す．

解 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}_i$ の内積を求めると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_i &= (x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n)\cdot\boldsymbol{u}_i \\
&= x_1\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_i + x_2\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_i + \cdots + x_i\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_i + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{u}_i
\end{aligned}$$

となる．ここで $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は正規直交基底であるため

$$\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{u}_q = \begin{cases} 1 & (p = q) \\ 0 & (p \neq q) \end{cases}$$

となる．したがって次の等式が得られる．

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_i = x_1\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_i + x_2\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_i + \cdots + x_i\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_i + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{u}_i = x_i$$ 証明終

類題 2　内積空間 V が正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ をもつとする．このとき

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n, \quad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{u}_n$$

とすれば，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$，$||\boldsymbol{x}||^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ となることを示せ．・は内積を示す.

解　まず $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ を示す．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を求めると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n) \cdot (y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{u}_n) \\
&= x_1\boldsymbol{u}_1 \cdot (y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{u}_n) \\
&\quad + x_2\boldsymbol{u}_2 \cdot (y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{u}_n) \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad + x_n\boldsymbol{u}_n \cdot (y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{u}_n)
\end{aligned}$$

となる．類題 1 と同様に $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が正規直交基底であることに注意すると $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ は次のようになる.

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \qquad \boxed{\text{証明終}}$$

次に $||\boldsymbol{x}||^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ を示す．$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ の $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ に置き換えると

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{x}||^2 &= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \\
&= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \qquad \boxed{\text{証明終}}
\end{aligned}$$

第 4 問 〔解答番号 $\boxed{\mathbf{34}}$ ～ $\boxed{\mathbf{39}}$ 〕 （配点 45 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

(注意) $\mathbb{R}^2$ は 2 次元実数ベクトル空間，$\mathbb{R}^3$ は 3 次元実数ベクトル空間を表す．

問 1 4 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が張る $\mathbb{R}^3$ の部分空間の次元は $\boxed{\mathbf{34}}$ である．

$\boxed{\mathbf{34}}$ **の解答群**

⓪ 1　① 2　② 3　③ 4

解 4 つのベクトルによって張られる空間の次元を求めるためには，これら 4 つのベクトルを順に並べた行列の階数を求めればよい．つまり

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の階数を求めればよい．行列 A の階数は A に行基本変形を行って得られる階段行列の階数である．A に行基本変形を行い階段行列を求めると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{$-1, -2$ 倍を加える}]{\text{2, 3 行目に 1 行目の}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2 行目と 3 行目を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2 行目を $-\dfrac{1}{3}$ 倍する}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので行列 A の階数は 3 である．したがって 4 つのベクトルによって張られる空間の次元は $\underline{3}$ であり，答は ② である．

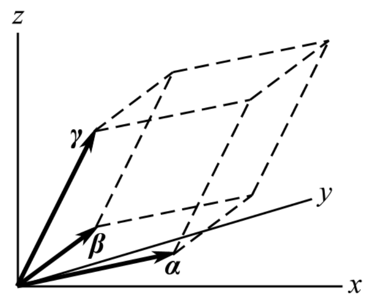

図 8: ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ で作られる立体の体積 $|\det(\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{\gamma})|$

類題 1　3 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，次のベクトルは一次独立系であるか．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解　3 つのベクトルを順に並べた行列に行基本変形を行い，階段行列を求めると

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{2,\,3\ \text{行目に}\ 1\ \text{行目の} \\ -2,\,-3\ \text{倍を加える}}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{3\ \text{行目に}\ 2\ \text{行目の}\ -2\ \text{倍を} \\ \text{加えた後},\ 2\ \text{行目を}\frac{1}{4}\text{倍する}}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，階段行列の階数は 2 である．したがって 3 つのベクトルによって張られる空間は 2 次元であるため，3 つのベクトルは一次独立系ではない．

別解　3 つのベクトルを順に並べた行列の行列式を用いて一次独立系かを判断する方法がある．図 8 に示されるように，3 次元ベクトル $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ で作られる立体の体積は $|\det(\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{\gamma})|$ で与えられる．つまり

$\lvert\det(\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{\gamma})\rvert \neq 0$	$\lvert\det(\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{\gamma})\rvert = 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ により張られる空間は 3 次元	$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ により張られる空間は 2 次元以下
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ は一次独立系	$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ は一次従属系

により，3 つのベクトルが一次独立系か一次従属系かを判断できる．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を順に並べた行列の行列式を解くと

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{}{\overset{\substack{2,3\,\text{列目に}\,1\,\text{列目の} \\ -1\,\text{倍をそれぞれ加える}}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{3\,\text{列目を用いて} \\ \text{展開する}}}{=\!=\!=} 1\times(-1)^4\times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

となる．したがって $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で作られる立体の体積が 0 であるため，これら 3 つのベクトルは一次独立系ではない.

類題 2

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

このとき，$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の一次結合で表されるための条件を求めよ.

解　$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の一次結合で表されるためには，次の連立 1 次方程式が解を持てばよい.

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & s \\ 1 & 0 & t \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2,3\,\text{行目に}\,1\,\text{行目の} \\ -1,\,-3\,\text{倍を加える}}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & s \\ 0 & 2 & t-s \\ 0 & 10 & -3s \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{2,3\,\text{行目に}\,1\,\text{行目の} \\ -1,\,-3\,\text{倍を加える}}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t \\ 0 & 2 & t-s \\ 0 & 0 & 2s-5t \end{array}\right)$$

この連立 1 次方程式が解を持つための条件は $2s-5t=0$ である．したがって $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の一次結合で表されるための条件は $2s-5t=0$ である.

別解 1　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は一次独立系であるので，$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の一次結合で表されるためには行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & s \\ 1 & 0 & t \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

の階数が 2 であればよい．行列 A に行基本変形を行い階段行列を求めると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & s \\ 1 & 0 & t \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{2,3\,\text{行目に}\,1\,\text{行目の} \\ -1,\,-3\,\text{倍を加える}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & s \\ 0 & 2 & t-s \\ 0 & 10 & -3s \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{3\,\text{行目に}\,2\,\text{行目の}\,-5\,\text{倍を} \\ \text{加えた後},\,2\,\text{行目を}\,\frac{1}{2}\,\text{倍する}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & s \\ 0 & 1 & (t-s)/2 \\ 0 & 0 & 2s-5t \end{pmatrix}$$

となる．行列 A の階数が 2 であるためには $2s-5t=0$ であればよい．したがって $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の一次結合で表されるための条件は $\underline{2s-5t=0}$ である．

別解 2　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は一次独立系であるので，$|\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})| = 0$ として条件を求めることができる．

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & s \\ 1 & 0 & t \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{2,3\,\text{行目に}\,1\,\text{行目の} \\ -1,\,-3\,\text{倍をそれぞれ加える}}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & s \\ 0 & 2 & t-s \\ 0 & 10 & -3s \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{1\,\text{列目を用いて} \\ \text{展開する}}}{=\!=\!=} 1\times(-1)^2\times \begin{vmatrix} 2 & t-s \\ 10 & -3s \end{vmatrix} = 2(2s-5t)$$

したがって $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の一次結合で表されるための条件は $\underline{2s-5t=0}$ である．

問 2　a, b, c を実数とする．$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 T を，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + ax_1x_2 \\ bx_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

と定め，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & c \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　$\mathbb{R}^2$ のすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ について $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表せるとき，$a = \boxed{\textbf{35}}$，$b = \boxed{\textbf{36}}$，$c = \boxed{\textbf{37}}$ である．

(2)　T が (1) の条件を満たすとする．$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ d \end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$ となる $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在するのは $d = \boxed{\textbf{38}}$ のときである．

$\boxed{35}$ ～ $\boxed{38}$ の解答群

⓪ -3　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4　⑧ 5　⑨ 6

解　$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であるから

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + ax_1x_2 \\ bx_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & c \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + cx_2 \\ 2x_1 + \ x_2 \end{pmatrix}$$

(1)　上式の第 1 項と第 3 項の各成分において x_1，x_2，x_1x_2 の係数を比較して，$a = \underline{0}$，$b = \underline{2}$，$c = \underline{1}$ を得る．したがって答は順に ③, ⑤, ④ である．

(2)　連立 1 次方程式 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ が解をもつように d を定める．$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ より

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

となる．この連立１次方程式をはき出し法で解く．

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{2,3\,\text{行目に}\,1\,\text{行目の} \\ -1,\,-2\,\text{倍を加える}}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & d-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{2\,\text{行目を}\,-1\,\text{倍した後},\,1,3\,\text{行目に} \\ 2\,\text{行目の}\,-2,\,3\,\text{倍を加える}}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & d-5 \end{array}\right)$$

この連立１次方程式が解を持つための必要十分条件は $d-5=0$ である．したがって $d=\underline{5}$ であり答は ⑧ である．

類題 1　2×3 の行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する線形写像 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ を求めよ．

解　$\mathbb{R}^3$ のベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，線型写像 $F(\boldsymbol{x})$ は次のように表せる．

$$F(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 4x_1+3x_2-2x_3 \\ 3x_1-2x_2+\ x_3 \end{pmatrix}}$$

類題 2　線型写像 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ において，$F(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$，$F(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．ただし $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．線型写像 F を求めよ．

解　3×2 の行列を $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ とし，$\mathbb{R}^2$ のベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．線型

写像 $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ において $F(\boldsymbol{e}_1)$ と $F(\boldsymbol{e}_2)$ を求めると次のようになる．

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{e}_1) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \\ F(\boldsymbol{e}_2) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題文より $F(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $F(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．したがって $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると線型写像は次のようになる．

$$F(\boldsymbol{x}) = \underline{\begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \\ -6x_1 + x_2 \end{pmatrix}}$$

問 3　実対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ は，適当な直交行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{39}} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

と表せる．

$\boxed{39}$ の解答群

⓪ -3　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4　⑧ 5　⑨ 6

解　n 次の実対称行列を A とし，A の固有値を並べて作られた対角行列を Λ とする．さらに A の固有値に対応する固有ベクトルを並べて作れらた直交行列 P とする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$
$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

ただし $i = 1, 2, \ldots, n$ において，$n \times 1$ の列ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ と λ_i の間に $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$ が成り立ち，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は正規直交系である．このとき 3 つの行列 A，Λ，P において次の関係が成り立つ．

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

ただし $P^{-1} = {}^tP$ である．このように実対称行列を対角行列に変換することを対角化と呼ぶ．

この問題では $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．A の固有値を求め得られら固有値を用いて A を対角化する．A の固有値を求めるためには $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ の条件のもとで $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を解けばよい．

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \lambda\boldsymbol{x} \\ A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{o} \\ (A - \lambda E)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

ここで 行列 $A-\lambda E$ が逆行列をもつ場合には $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ となる．したがって行列 $A-\lambda E$ は逆行列を持たないので

$$|A-\lambda E|=0$$

が成り立つ．この式は固有多項式と呼ばれる．この固有多項式を解くと

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{2 行目を用いて展開する}}{=\!=\!=\!=} $$
$$(1-\lambda)\times(-1)^4\times\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+3)=0$$

となり，$\lambda=1,-3$ が得られる．したがって得られる対角行列は次のようになる．

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

答は ④ である．

類題 1　次の対称行列を直交行列を用いて対角化せよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解　固有多項式 $|A\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{x}|=0$ を解く．

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{1 列目に 3 列目を加える}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 3 \\ 2 & 5-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$\overset{\text{1 行目に 3 行目の }-1\text{ 倍を加える}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda+2 \\ 2 & 5-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{1 行目を用いて展開する}}{=\!=\!=\!=}$$
$$(\lambda+2)\times(-1)^4\times\begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda \\ 4-\lambda & 1 \end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)=0$$

したがって固有値は $\lambda = -2, 3, 6$ である．次にそれぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める．

(i)　$\lambda = -2$ のとき

$$(A+2E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この連立 1 次方程式をはき出し法で解く．

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{$-1, -2$ 倍を加える}]{\text{2, 3 行目に 1 行目の}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{2 行目を $-\frac{1}{20}$ 倍する}]{\text{3 行目に 2 行目の -3 倍を加えた後}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{-7 倍を加える}]{\text{2 行目に 3 行目の}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_3 = 0$，$x_2 = 0$ より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって固有値 $\lambda = -2$ に対応する大きさ 1 の固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である．

(ii)　$\lambda = 3$ のとき

$$(A-3E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この連立 1 次方程式をはき出し法で解く.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2,} -3 \text{ 倍を加える}]{\text{1, 3 行目に 2 行目の}} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1 行目を} \frac{1}{5} \text{倍する}]{\text{3 行目に 1 行目を加えた後}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-7 \text{ 倍を加える}]{\text{2 行目に 1 行目の}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 + x_3 = 0,\ \ x_1 - x_3 = 0$ より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって固有値 $\lambda = 3$ に対応する大きさ 1 の固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である.

(iii) $\lambda = 6$ のとき

$$(A - 6E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この連立1次方程式をはき出し法で解く．

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2, −3 倍を加える}]{\text{1, 3 行目に 2 行目の}} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1 行目を } -\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{3 行目に 1 行目を加えた後}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1 行目を } -\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{3 行目に 1 行目を加えた後}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 - 2x_3 = 0$，$x_1 - x_3 = 0$ より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって固有値 $\lambda = 6$ に対応する大きさ1の固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．

得られた対称行列 A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを用いて，A は次のように対角化される．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

類題 2　次の対称行列を直交行列を用いて対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

解　固有多項式 $|A\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{x}|=0$ を解く.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{1 行目に 2 行目を} \\ \text{加える}}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 9-\lambda & 9-\lambda & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{2 列目に 1 列目の} \\ -1\text{ 倍を加える}}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{1 行目を用いて} \\ \text{展開する}}}{=\!=\!=\!=} (9-\lambda)\times(-1)^2\times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-9)^2=0$$

したがって固有値は $\lambda=0,9$ である. 次にそれぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める.

(i)　$\lambda=0$ のとき

$$(A+0E)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この連立 1 次方程式をはき出し法で解く.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{3 行目を } -\frac{1}{2}\text{ 倍した後, 1, 2 行目} \\ \text{に 3 行目の } -5,\,-4\text{ 倍を加える}}} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 18 \\ 0 & 9 & 18 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{1 行目に 2 行目の } -1\text{ 倍を加えた後} \\ \text{2 行目を } \frac{1}{9}\text{ 倍する}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{3 行目に 2 行目を} \\ \text{加える}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$x_2+2x_3=0,\ x_1-2x_3=0$ より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって固有値 $\lambda = -2$ に対応する大きさ 1 の固有ベクトルは

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．

(ii) $\lambda = 9$ のとき

$$(A+9E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この連立 1 次方程式をはき出し法で解く．

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1,2\,\text{行目に}\,3\,\text{行目の} \\ -2,2\,\text{倍を加える}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$-2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda = 9$ に対応する固有ベクトル空間は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ によって張られる．これら 2 つのベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ とする．$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ により張られる空間の正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を求める．まず正規直交基底のうち 1 つを

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

として求める．次に図 9 に示すように $\boldsymbol{u}_1$ に直交するベクトル $\boldsymbol{u}_2'$ を求

める．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2' &= \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-4}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

得られたベクトル $\boldsymbol{u}_2'$ より，$\boldsymbol{u}_2$ を求める．

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2'}{||\boldsymbol{u}_2'||} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

したがって固有値 $\lambda = 9$ に対応する大きさ 1 の互いに直交する固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である．このようにして正規直交系のベクトルを求める方法はシュミットの方法と呼ばれる．(注意，ここで得られた正規直交系の 2 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ は，固有値 $\lambda = 9$ に対応する固有ベクトル空間に含まれるベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ の選び方により変わる）

得られた対称行列 A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを用いて，A は次のように対角化される．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

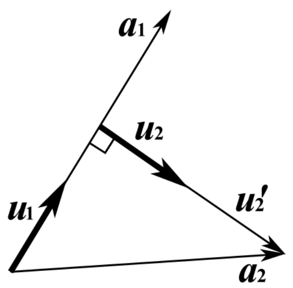

図 9: ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ からの正規直交系のベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ の導出（シュミットの方法）

第 5 問　〔解答番号 $\boxed{40}$ ～ $\boxed{47}$ 〕　（配点 50 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

(注意) 各問における y は x の関数 $y(x)$ であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．

問 1　微分方程式 $y' = x$ の一般解は $y = \boxed{40}$ であり，微分方程式 $y' = 1 + y^2$ の一般解は $y = \boxed{41}$ である．また， $x > 0$ のとき，微分方程式 $xy' = 1$ の一般解は $y = \boxed{42}$ である．

$\boxed{40}$ ～ $\boxed{42}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{x^2} + c$	① ce^x	② $\dfrac{1}{2}x^2 + c$	③ $\tan(x + c)$
④ $\log x + c$	⑤ $x + c$	⑥ $c\sqrt{1 - x^2}$	⑦ $c\sqrt{1 - (x-1)^2}$
⑧ $x^2 + c$	⑨ $\dfrac{c}{x^2}$	ⓐ $\dfrac{1}{x} + c$	ⓑ $c\sqrt{1 + (x-1)^2}$
ⓒ $c\sqrt{1 + x^2}$	ⓓ e^{cx}	ⓔ $c\sqrt{x}$	ⓕ $c\sqrt{1 + (x+1)^2}$

(c は任意定数)

解　まず，$y' = x$ は最も簡単なタイプの微分方程式で，このまま直接両辺を積分すれば

$$y(x) = \underline{\frac{1}{2}x^2 + c} \qquad (c \text{ は任意定数})$$

を得る．

次に，微分方程式 $y' = 1 + y^2$ は変数分離形である．

$$\frac{1}{1 + y^2}y' = 1$$

と書き直して両辺を積分する．

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}dx &= \int 1\,dx \\ \int \frac{1}{1+y^2}\,dy &= \int 1\,dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int \frac{1}{1+y^2}\,dy \\
y = \tan\theta\text{とおくと}, \frac{dy}{d\theta} &= \frac{1}{(\cos\theta)^2}\text{であるので} \\
&= \int \frac{1}{1+(\tan\theta)^2}\frac{1}{(\cos\theta)^2}\,d\theta = \int \frac{1}{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\,d\theta \\
&= \int 1\,d\theta = \theta + c_1 = \arctan y + c_1 \qquad (c_1\text{ は任意定数}) \\
\text{右辺} &= \int 1\,dx = x + c_2 \qquad (c_2\text{ は任意定数})
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\arctan y + c_1 &= x + c_2 \\
y &= \underline{\tan(x+c)} \qquad (c = c_2 - c_1)
\end{aligned}
$$

を得る．

最後に，$x > 0$ で考えた微分方程式 $xy' = 1$ は

$$
y' = \frac{1}{x}
$$

と書き直して両辺を積分すれば,

$$
y(x) = \underline{\log x + c} \qquad (c\text{ は任意定数})
$$

を得る．したがって答は順に ②, ③, ④ である．

類題 1 $y' = -2xy$ の一般解を求めよ．

解 $y' = -2xy$ は変数分離形であり，次のように変形してから両辺を積分する．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y}y' &= -2x \\
\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx &= \int -2x\,dx \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int -2x\,dx \\
\log|y| + c_1 &= -x^2 + c_2 \qquad (c_1,\ c_2\text{ は任意定数}) \\
\log|y| &= -x^2 + c_2 - c_1 \\
|y| &= e^{(-x^2+c_2-c_1)} \\
y &= \pm e^{(-x^2+c_2-c_1)} = \pm e^{(c_2-c_1)}e^{-x^2} \\
&= \underline{ce^{-x^2}} \qquad (c = \pm e^{c_2-c_1})
\end{aligned}
$$

類題 2　$y' = y\tan x$ の一般解を求めよ.

解　$y' = y\tan x$ は変数分離形であり，次のように変形してから両辺を積分する.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y}y' &= \tan x \\
\int \frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx}dx &= \int \tan x\,dx \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \\
\log|y| + c_1 &= -\log|\cos x| + c_2 \qquad (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数}) \\
|y| &= e^{(-\log|\cos x| + c_2 - c_1)} \\
y &= \pm e^{(-\log|\cos x| + c_2 - c_1)} = \pm e^{(c_2 - c_1)} e^{-\log|\cos x|} = \pm \frac{e^{(c_2 - c_1)}}{\cos x} \\
&= \underline{\frac{c}{\cos x}} \qquad \left(c = \pm e^{(c_2 - c_1)}\right)
\end{aligned}
$$

問 2　微分方程式 $y' = y$ の解で $y(-1) = 1$ を満たすものは $y = \boxed{\textbf{43}}$ であり，微分方程式 $x + yy' = 1$ の解で $y(1) = 1$ を満たすものは $y = \boxed{\textbf{44}}$ である．

$\boxed{43}$ ， $\boxed{44}$ の解答群

⓪	$\dfrac{1}{x^2}$	①	$\sqrt{x+2}$	②	e^{x+1}	③	$\sqrt{1+(x+1)^2}$
④	x	⑤	$\sqrt{1-x^2}$	⑥	x^2	⑦	$\sqrt{1+(x-1)^2}$
⑧	e^x	⑨	$\sqrt{1+x^2}$	ⓐ	$\sqrt{\lvert x\rvert}$	ⓑ	$\sqrt{1-(x-1)^2}$

解　初期条件より y が恒等的に 0 である関数は解ではない．微分方程式 $y' = y$ は前問と同様に簡単に積分ができて

$$\log|y(x)| = x + c \quad \text{すなわち} \quad |y(x)| = e^{x+c} \qquad (c \text{ は任意定数})$$

となる．これより $y(x) = c'e^x$ $(c' = \pm e^c)$ を得る．初期条件 $y(-1) = 1$ を満たすためには $c' = e$ すなわち $c = 1$．したがって求める解は

$$y(x) = \underline{e^{x+1}}$$

となる．

微分方程式 $x + yy' = 1$ は，このまま両辺を積分して

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = x + c \qquad (c \text{ は任意定数})$$

を得るが，初期条件 $y(1) = 1$ を考慮すれば $c = 0$ が分かるので

$$x^2 + y^2 = 2x \qquad \cdots(*1)$$

求める解は初期条件より

$$y(x) = \underline{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

となる．$(*1)$ は $(x-1)^2 + y^2 = 1$ と変形できるので，この解は $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円を示す．したがって答は順に ②, ⓑ である．

類題 1　$(y-1)y' - 2x = 0$,　$y(1) = 3$ の初期値問題の解を求めよ．

解　$(y-1)y'-2x=0$ は変数分離形であり，次のように変形してから両辺を積分する．

$$
\begin{aligned}
(y-1)y' &= 2x \\
\int (y-1)\,\frac{dy}{dx}dx &= \int 2x\,dx \\
\int (y-1)\,dy &= \int 2x\,dx \\
\frac{1}{2}y^2-y+c_1 &= x^2+c_2 \qquad (c_1,\ c_2\ \text{は任意定数}) \\
\frac{1}{2}y^2-y &= x^2+c \qquad (c=c_2-c_1) \\
y^2-2y &= 2x^2+2c \\
(y-1)^2-1 &= 2x^2+2c \\
y &= \pm\sqrt{2x^2+2c+1}+1
\end{aligned}
$$

$\sqrt{2x^2+2c+1}+1 \geqq 1,\ -\sqrt{2x^2+2c+1}+1 \leqq 1,\ y(1)=3$ より

$y=-\sqrt{2x^2+2c+1}+1$ は解ではない．

$$y = \sqrt{2x^2+2c+1}+1$$

初期値 $y(1)=3$ より $\sqrt{2+2c+1}+1=3$ となるので $c=\dfrac{1}{2}$ が得られる．したがって

$$y=\underline{\sqrt{2x^2+2}+1}$$

である．

類題 2　$y'=e^{-y},\ \ y(0)=0$ の初期値問題の解を求めよ．

解　$y'=e^{-y}$ は変数分離形であり，次のように変形してから両辺を積分する．

$$
\begin{aligned}
e^y y' &= 1 \\
\int e^y\,\frac{dy}{dx}dx &= \int 1\,dx \\
\int e^y\,dy &= \int 1\,dx \\
e^y+c_1 &= x+c_2 \qquad (c_1,\ c_2\ \text{は任意定数}) \\
e^y &= x+c \qquad (c=c_2-c_1) \\
y &= \log(x+c)
\end{aligned}
$$

初期値 $y(0) = 0$ より $\log(c) = 0$ となるので $c = 1$ が得られる．したがって

$$y = \underline{\log(x+1)}$$

である．

問 3　(1)　関数 $y = 3\cos\sqrt{2}x + 5\sin\sqrt{2}x$ が解となる微分方程式は $\boxed{\mathbf{45}}$ である.

$\boxed{45}$ の解答群

⓪ $y'' + 2y = 0$　① $y'' + \sqrt{2}y = 0$　② $y'' - 2y = 0$　③ $y'' - \sqrt{2}y = 0$

④ $y'' + 4y = 0$　⑤ $y'' - 4y = 0$　⑥ $y'' + 2y = 1$　⑦ $y'' - 2y = 1$

⑧ $y'' + \sqrt{2}y = 1$　⑨ $y'' - \sqrt{2}y = 1$

(2)　微分方程式

$$y'' + 2y = \cos x$$

の解で初期条件

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

を満たすものは $y = \boxed{\mathbf{46}}$ である.

$\boxed{46}$ の解答群

⓪ $\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x$　① $\cos x + \cos\sqrt{2}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x$

② $\cos x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x$　③ $\cos x + \cos\sqrt{2}x$

④ $\sin x + \cos\sqrt{2}x$　⑤ $\cos x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{2}x$

解　(1)　定数係数 2 階斉次線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0$$

の一般解は，特性方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

の解 λ の種類により以下のように得られる.

特性方程式の解	二つの実数解 $\alpha,\ \beta$	一つの実重解 α	二つの虚数解 $\alpha+i\beta,\ \alpha-i\beta$
	↓	↓	↓
微分方程式の 一般解	$c_1e^{\alpha x} + c_2e^{\beta x}$	$c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x}$	$c_1e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+ c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

ただし c_1, c_2は任意定数

この問題では与えられた解が $y = 3\cos\sqrt{2}x + 5\sin\sqrt{2}x$ であるので，この解をもつ微分方程式から作られる特性方程式は，二つの異なる虚数解 $\lambda = \pm\sqrt{2}i$ をもつ．解答群の中で特性方程式が虚数解 $\lambda = \pm\sqrt{2}i$ をもつ微分方程式は

$$\underline{y'' + 2y = 0}$$

である．したがって答は ⓪ である．

(2)　定数係数 2 階非斉次線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

の一般解は，$y'' + ay' + by = f(x)$ の特殊解を y_1 とし，$y'' + ay' + by = 0$ の一般解を y_0 としたとき

$$y = y_0 + y_1$$

で与えられる．

この問題の微分方程式は $y''+2y = \cos x$ であるので，斉次微分方程式 $y''+2y = 0$ の一般解 y_0 は (1) で述べたように

$$y_0 = c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x \qquad (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数})$$

である．次に $y'' + 2y = \cos x$ の特殊解を求める．求める特殊解を $y_1 = \alpha\cos x + \beta\sin x$ とする．$y'' + 2y = \cos x$ に y_1 を代入し計算すると

$$\begin{aligned} y_1'' + 2y_1 &= -\alpha\cos x - \beta\sin x + 2\alpha\cos x + 2\beta\sin x \\ &= \alpha\cos x + \beta\sin x = \cos x \end{aligned}$$

より $\alpha = 1, \beta = 0$ を得る．したがって $y'' + 2y = \cos x$ の特殊解 y_1 は

$$y_1 = \cos x$$

であるので，一般解 y は次のようになる．

$$y = y_0 + y_1 = c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x + \cos x \qquad (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数})$$

次に初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ より

$$c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

が得られ，解は

$$\underline{y = \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x}$$

となる．したがって答は ② である．

類題 1　次の非斉次微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 2y' + y = 5\cos 2x$$

解　まず斉次微分方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ の一般解を求める．

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

を解くと $\lambda = 1$（重解）が得られるので，一般解 y_0 は次のようになる．

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 x e^x \qquad (c_1,\, c_2 \text{ は任意定数})$$

次に非斉次微分方程式 $y'' - 2y' + y = 5\cos 2x$ の特殊解を求める．求める特殊解を $y_1 = \alpha\cos 2x + \beta\sin 2x$ とする．$y'' - 2y' + y = 5\cos 2x$ に y_1 を代入し α, β を求める．

$$\begin{aligned} y_1'' - 2y_1' + y_1 &= -4\alpha\cos 2x - 4\beta\sin 2x - 2(-2\alpha\sin 2x + 2\beta\cos 2x) \\ &\quad +\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x \\ &= (-3\alpha - 4\beta)\cos 2x + (4\alpha - 3\beta)\sin 2x = 5\cos 2x \end{aligned}$$

より $-3\alpha - 4\beta = 5,\ 4\alpha - 3\beta = 0$ であるので $\alpha = -\dfrac{3}{5},\ \beta = -\dfrac{4}{5}$ が得られる．$y'' - 2y' + y = 5\cos 2x$ の特殊解 y_1 は

$$y_1 = -\frac{3}{5}\cos 2x - \frac{4}{5}\sin 2x$$

となる．したがって $y'' - 2y' + y = 5\cos 2x$ の一般解 y は次のようになる．

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_1 \\ &= \underline{c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{3}{5}\cos 2x - \frac{4}{5}\sin 2x} \qquad (c_1,\, c_2 \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

類題 2　次の非斉次微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x$$

解　まず斉次微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の一般解を求める．

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

を解くと $\lambda = 1, 2$ が得られるので，一般解 y_0 は次のようになる．

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \qquad (c_1,\, c_2 \text{ は任意定数})$$

次に非斉次微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x$ の特殊解を求める．求める特殊解を $y_1 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ とする．$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x$ に y_1 を代入し α, β, γ を求める．

$$\begin{aligned} y_1'' - 3y_1' + 2y_1 &= 2\alpha - 3(2\alpha x + \beta) + 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \\ &= (2\alpha)x^2 + (-6\alpha + 2\beta)x + (2\alpha - 3\beta + 2\gamma) = 2x^2 - 6x \end{aligned}$$

より $2\alpha = 2,\ -6\alpha + 2\beta = -6,\ 2\alpha - 3\beta + 2\gamma = 0$ であるので $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1$ が得られる．$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x$ の特殊解 y_1 は

$$y_1 = x^2 - 1$$

となる．したがって $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x$ の一般解 y は次のようになる．

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_1 \\ &= \underline{c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 - 1} \qquad (c_1,\, c_2 \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

問 4　関数 $y = 4e^{2x} - e^{-3x} + 5e^{-x}$ が解となる微分方程式は $\boxed{\mathbf{47}}$ である．

$\boxed{\mathbf{47}}$ **の解答群**

⓪ $y'' + 2y' - 3y = 35e^{-x}$

① $y'' + 4y' + 3y = 60e^{2x}$

② $y'' - y' - 2y = 14e^{2x}$

解　解答群にある 3 つの非斉次微分方程式について，特性方程式とその解，斉次微分方程式の一般解 y_0，非斉次微分方程式の特殊解 y_1 を求めると上から順に

$$\begin{aligned}
(\lambda+3)(\lambda-1) = &\ 0, \quad \lambda = -3,\ 1, \quad y_0 = c_1e^{-3x} + c_2e^{x}, \quad y_1 = -\frac{35}{4}e^{-x} \\
(\lambda+3)(\lambda+1) = &\ 0, \quad \lambda = -3, -1, \quad y_0 = c_1e^{-3x} + c_2e^{-x}, \quad y_1 = 4e^{2x} \\
(\lambda-2)(\lambda+1) = &\ 0, \quad \lambda = 2, -1, \quad y_0 = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}, \quad y_1 = \frac{14}{3}xe^{2x}
\end{aligned}$$

(c_1, c_2 は任意定数)

である．3 つの非斉次微分方程式の一般解 $y = y_0 + y_1$ のうち，$y = 4e^{2x} - e^{-3x} + 5e^{-x}$ をとり得るのは 2 番目の非斉次微分方程式の一般解のみである．したがって答は ① である．

類題 1　次の非斉次微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 4y' - 12y = 9e^{-3x}$$

解　特性方程式の解は $\lambda = -2, 6$ であるので，斉次微分方程式の一般解 y_0 は

$$y_0 = c_1e^{-2x} + c_2e^{6x} \qquad (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数})$$

となる．非斉次微分方程式の特殊解を $y_1 = \alpha e^{-3x}$ とする．非斉次微分方程式に y_1 を代入し計算すると

$$y_1'' - 4y_1' - 12y_1 = (9\alpha + 12\alpha - 12\alpha)e^{-3x} = 9\alpha e^{-3x} = 9e^{-3x}$$

より $\alpha = 1$ を得る．非斉次微分方程式の特殊解は $y_1 = e^{-3x}$ であることから一般解は次のようになる．

$$y = \underline{c_1e^{-2x} + c_2e^{6x} + e^{-3x}} \qquad (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数})$$

類題 2　次の非斉次微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 6y' + 5y = 2e^x$$

解　特性方程式の解は $\lambda = 1, 5$ であるので，斉次微分方程式の一般解 y_0 は

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{5x} \qquad (c_1,\, c_2 \text{ は任意定数})$$

となる．e^x は斉次微分方程式の解であることに注意し，非斉次微分方程式の特殊解を $y_1 = \alpha x e^x$ とする．非斉次微分方程式に y_1 を代入し計算すると

$$y_1'' - 6y_1' + 5y_1 = \big(2\alpha + \alpha x - 6(\alpha + \alpha x) + 5\alpha x\big)e^x = -4\alpha e^x = 2e^x$$

より $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ を得る．非斉次微分方程式の特殊解は $y_1 = -\dfrac{1}{2}xe^x$ であることから一般解は次のようになる．

$$y = \underline{c_1 e^x + c_2 e^{5x} - \frac{1}{2}xe^x} \qquad (c_1,\, c_2 \text{ は任意定数})$$

第 6 問　〔解答番号 $\boxed{48}$ 〜 $\boxed{56}$ 〕　（配点 50 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

(注意) 各問における y は x の関数 $y(x)$ であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．

問 1　a を正の定数とする．微分方程式

$$y'' + 2ay' + a^2y = 0$$

の一般解は $y = \boxed{48}$ である．

$\boxed{48}$ の解答群

⓪ $c_1e^x + c_2e^{-x}$　① $c_1e^{-ax} + c_2xe^{-ax}$　② $c_1e^{ax}\sin x + c_2e^{ax}\cos x$

③ $c_1e^{ax} + c_2xe^{ax}$　④ $c_1\sin x + c_2\cos 2x$　⑤ $c_1e^{ax}\sin x + c_2e^{-ax}\cos x$

⑥ $c_1e^x + c_2xe^{-x}$　⑦ $c_1\sin ax + c_2\cos ax$

(c_1, c_2 は任意定数)

解　微分方程式 $y'' + 2ay' + a^2y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 = (\lambda + a)^2 = 0$$

であり重解 $\lambda = -a$ をもつので，一般解は

$$y = \underline{c_1e^{-ax} + c_2xe^{-ax}} \qquad (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数})$$

で与えられる．したがって答は ① である．

類題 1　次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' + 6y' + 9 = 0$$

解　特性方程式は

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$$

であり重解 $\lambda = -3$ をもつ．したがって一般解は

$$y = \underline{c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}} \qquad (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数})$$

となる．

類題 2　次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$4y'' - 12y' + 9 = 0$$

解　特性方程式は

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = (2\lambda - 3)^2 = 0$$

であり重解 $\lambda = \dfrac{3}{2}$ をもつ．したがって一般解は

$$y = \underline{c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{\frac{3}{2}x}} \qquad (c_1,\, c_2 \text{ は任意定数})$$

となる．

問 2　a を正の定数とする．実数 α, β と $-\infty < x < \infty$ で連続な関数 $f(x)$ に対して初期値問題

$$(*) \quad \begin{cases} y'' + 2ay' + a^2 y = f(x) \quad \cdots (*1) \\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

は $-\infty < x < \infty$ において解をもつことが知られている．もし $(*)$ が解 $y_1(x), y_2(x)$ をもつとすれば,

$$y_0(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

とおくと, **49** であるから，関数 $y_0(x)$ は初期値問題

$$(**) \quad \begin{cases} y'' + 2ay' + a^2 y = 0 \\ y(0) = \boxed{\mathbf{50}},\ y'(0) = \boxed{\mathbf{51}} \end{cases}$$

の解である．

49 の解答群

⓪ a が正　① $(*)$ の解 y_1, y_2 が 1 次独立
② $(*)$ の解 y_1, y_2 が 1 次従属　③ $(*1)$ が線形の微分方程式
④ $(*1)$ が 2 階の微分方程式

50 , 51 の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ -1　④ -2　⑤ α　⑥ β　⑦ $\alpha - \beta$　⑧ $\alpha + \beta$　⑨ $\beta - \alpha$

ところで，初期値問題 $(**)$ は，変換

$$z(x) = e^{ax} y(x)$$

を行えば，$z(x)$ に関する初期値問題

$$\begin{cases} \boxed{\mathbf{52}} = 0 \\ z(0) = \boxed{\mathbf{53}},\ z'(0) = \boxed{\mathbf{54}} \end{cases}$$

になる．この初期値問題を解けば $z = \boxed{\mathbf{55}}$ を得る．

したがって，初期値問題 $(*)$ の解はちょうど **56** 個である．

52 **の解答群**

⓪ $z'' - a^2 z$　① $z'' + a^2 z$　② $z'' + az$　③ $z'' - az$
④ $a^2 z'' + z$　⑤ $a^2 z'' - z$　⑥ z''

53 〜 **55** **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ -1　④ -2
⑤ x　⑥ x^2　⑦ $-x$　⑧ $-x^2$　⑨ $x+1$
ⓐ $-x+1$　ⓑ $\sin ax$　ⓒ $\cos \sqrt{a}x$　ⓓ e^{ax}　ⓔ $e^{\frac{x}{a}}$

56 **の解答群**

⓪ 1　① 2　② 3　③ 4

解　ここで用いられているのは微分方程式の線形性である．実際に2つの解 y_1, y_2 を $(*1)$ に代入すると

$$y_1'' + 2ay_1' + a^2 y_1 = f(x)$$

$$y_2'' + 2ay_2' + a^2 y_2 = f(x)$$

となり辺々引くと，$y_0 = y_1 - y_2$ より

$$y_0'' + 2ay_0' + a^2 y_0 = 0$$

となる．さらに y_0 は

$$\begin{aligned} y_0(0) &= y_1(0) - y_2(0) = \alpha - \alpha = \underline{0} \\ y_0'(0) &= y_1'(0) - y_2'(0) = \beta - \beta = \underline{0} \end{aligned}$$

を満たす．

変換

$$z(x) = e^{ax} y(x)$$

によって

$$\begin{aligned} y &= e^{-ax} z \\ y' &= -ae^{-ax} z + e^{-ax} z' \\ y'' &= a^2 e^{-ax} z - 2ae^{-ax} z' + e^{-ax} z'' \end{aligned}$$

となるので，これらを $(**)$ に代入して，e^{-ax} が 0 でないことに注意すれば

$$\underline{z''} = 0$$

を得る．初期値は

$$z(0) = e^0 y(0) = \underline{0}, \quad z'(0) = ae^0 y(0) + e^0 y'(0) = \underline{0}$$

であるので $z(x) = 0$ ある．これは関数 $y_0(x)$ が 0 であることを，すなわち $y_1(x)$, $y_2(x)$ が一致することを示す．$y_1(x)$, $y_2(x)$ は $(*)$ の解であるので，$(*)$ には解が 2 つ以上存在しないことになる．つまり $(*)$ の解は多くとも 1 個である．一方 $(*)$ が解をもつことはわかっているので，$(*)$ の解はちょうど $\underline{1}$ 個である．したがって答は順に③,⓪,⓪,⑥,⓪,⓪,⓪,⓪ である．

類題 1　次の非斉次微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 5y' + 6y = 6x + 4e^{-x}$$

解　まず次の 2 つの非斉次微分方程式を考える．

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 6y &= 6x & \cdots(*1) \\ y'' - 5y' + 6y &= 4e^{-x} & \cdots(*2) \end{aligned}$$

2 つの非斉次微分方程式の一般解をそれぞれ y_1, y_2 とすると

$$\begin{aligned} y_1'' - 5y_1' + 6y_1 &= 6x \\ y_2'' - 5y_2' + 6y_2 &= 4e^{-x} \end{aligned}$$

が成り立ち，両式を足すと

$$(y_1 + y_2)'' - 5(y_1 + y_2)' + 6(y_1 + y_2) = 6x + 4e^{-x}$$

となる．これは $y_1 + y_2$ が求める一般解であることを示す．

次に実際に y_1, y_2 を求める．$(*1)$, $(*2)$ ともに特性方程式の解は $2, 3$ であるので，$(*1)$, $(*2)$ の斉次微分方程式の一般解は $c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ となる．$(*1)$ の特殊解を $\alpha x + \beta$ として，$(*1)$ に代入すると $\alpha = 1$, $\beta = \dfrac{5}{6}$ が得られる．$(*2)$ の特殊解を αe^{-x} として，$(*2)$ に代入すると $\alpha = \dfrac{1}{3}$ が得られる．したがって y_1, y_2 は次のようになる．

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + x + \frac{5}{6} & (c_1,\, c_2 \text{ は任意定数}) \\ y_2 &= c_3e^{2x} + c_4e^{3x} + \frac{1}{3}e^{-x} & (c_3,\, c_4 \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

y_1, y_2 の和より，求める一般解は

$$y = \underline{c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x + \frac{5}{6} + \frac{1}{3}e^{-x}} \qquad (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数})$$

となる．ただし $c_1 + c_3,\ c_2 + c_4$ は $c_1,\ c_2$ に置き換えてある．

類題 2　次の非斉次微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 2y' = 5\sin x + 6e^{3x}$$

解　類題 1 と同様に，次の 2 つの非斉次微分方程式を考える．

$$\begin{aligned} y'' - 2y' &= 5\sin x && \cdots(*1) \\ y'' - 2y' &= 6e^{3x} && \cdots(*2) \end{aligned}$$

$(*1), (*2)$ ともに特性方程式の解は $0, 2$ であるので，$(*1), (*2)$ の斉次微分方程式の一般解は $c_1 + c_2 e^{2x}$ となる．$(*1)$ の特殊解を $\alpha\sin x + \beta\cos x$ として，$(*1)$ に代入すると $\alpha = -1, \beta = 2$ が得られる．$(*2)$ の特殊解を αe^{3x} として，$(*2)$ に代入すると $\alpha = 2$ が得られる．したがって $(*1), (*2)$ の一般解 y_1, y_2 は次のようになる．

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 + c_2 e^{2x} - \sin x + 2\cos x && (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数}) \\ y_2 &= c_3 + c_4 e^{2x} + 2e^{3x} && (c_3,\ c_4 \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

y_1, y_2 の和より，求める一般解は

$$y = \underline{c_1 + c_2 e^{2x} - \sin x + 2\cos x + 2e^{3x}} \qquad (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数})$$

となる．ただし $c_1 + c_3,\ c_2 + c_4$ は $c_1,\ c_2$ に置き換えてある．

第 7 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{57}}$ ～ $\boxed{\mathbf{65}}$ 〕　（配点 50 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

問 1　確率変数 X に対し，$E(X)$ を X の期待値とする．このとき

$$E\left(\{X - E(X)\}^2\right) = E\left(\boxed{\mathbf{57}}\right) - \left\{E\left(\boxed{\mathbf{58}}\right)\right\}^2$$

である．

$\boxed{\mathbf{57}}$ ，$\boxed{\mathbf{58}}$ の解答群

⓪ $\sqrt{X}$　① X　② X^2　③ X^3　④ $2\sqrt{X}$　⑤ $2X$　⑥ $2X^2$　⑦ $2X^3$

解　確率変数 X, Y と任意な実数 a, b において

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= aE(X)+b & \cdots(*1) \\ E(X+Y) &= E(X)+E(Y) & \cdots(*2) \end{aligned}$$

が成り立つ．これらを用いて $E\Big(\{X - E(X)\}^2\Big)$ を変形する．

$$\begin{aligned} E\Big(\{X-E(X)\}^2\Big) &= E\Big(X^2 - 2XE(X) + \{E(X)\}^2\Big) & \{X-E(X)\}^2\text{を展開} \\ &= E\Big(X^2 - 2XE(X)\Big) + \{E(X)\}^2 & (*1)\text{ より} \\ &= E(X^2) + E\Big(-2XE(X)\Big) + \{E(X)\}^2 & (*2)\text{ より} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + \{E(X)\}^2 & (*1)\text{ より} \\ &= E(\underline{X^2}) - \{E(\underline{X})\}^2 & \end{aligned}$$

したがって答は順に ②, ① である．

注意，$E\Big(\{X - E(X)\}^2\Big)$ は X の分散と呼ばれる量で記号 $V(X)$ で表される．この問題は $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ という公式についての問題である．

類題　確率変数 X，任意な実数 a において

$$E\Big((X-a)^2\Big) = V(X) + \Big(E(X) - a\Big)^2$$

が成り立つことを示せ．

解　先に示した $(*1)$, $(*2)$ を用いて $E\Big((X-a)^2\Big)$ を変形する.

$$
\begin{aligned}
E\Big((X-a)^2\Big) &= E(X^2-2aX+a^2) && (X-a)^2\text{を展開}\\
&= E(X^2-2aX)+a^2 && (*1)\text{ より}\\
&= E(X^2)+E(-2aX)+a^2 && (*2)\text{ より}\\
&= V(X)+E(X)^2-2aE(X)+a^2 && (*1)\text{ より}\\
&= V(X)+\Big(E(X)-a\Big)^2 && \boxed{\text{証明終}}
\end{aligned}
$$

問 2　正規分布の母平均を区間推定するとき，信頼度 (信頼係数) を変えずに標本の大きさを大きくすると信頼区間は $\boxed{\textbf{59}}$．また，標本の大きさを変えずに信頼度を大きくすると信頼区間は $\boxed{\textbf{60}}$．

解　正規分布の母平均を区間推定する場合，信頼区間は信頼度と標本の大きさに依存する．信頼度を変えずに標本の大きさを大きくすると信頼区間は狭くなり，標本の大きさを変えずに信頼度を大きくすると信頼区間は広くなる．したがって答は順に ⓒ, ⓓ である．

類題　次の文章中の各欄において適切な語句を選べ．

正規母集団の母平均の区間推定において，推定された区間が［狭く・広く］，信頼度（信頼係数）が［小さい・大きい］ほど，良い区間推定である．良い区間推定を行うためには標本の大きさを［小さく・大きく］すればよい．

解　正規母集団の母平均の区間推定において，推定された区間が［狭く・　　］，信頼度（信頼係数）が［　　・大きい］ほど，良い区間推定である．良い区間推定を行うためには標本の大きさを［　　・大きく］すればよい．

問 3　確率変数 X, Y は共に 2 次モーメントが存在するものとする．このとき X と Y が独立ならば，X と Y の共分散は $\boxed{\textbf{61}}$ である．

解　問 1 で示した $(*1)$, $(*2)$ に加え，確率変数 X, Y が独立であれば

$$E(XY) \;=\; E(X)E(Y) \qquad \cdots(*3)$$

が成り立つ．

確率変数 X と Y の共分散 $\mathrm{Cov}(X, Y)$ は

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big)$$

で与えられる．特に X, Y が独立であるときには

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big) \\
&= E\Big(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)\Big) \\
&= E\Big(XY - XE(Y) - E(X)Y\Big) + E(X)E(Y) && (*1)\text{ より} \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) && (*2), (*1)\text{ より} \\
&= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) && (*3)\text{ より} \\
&= \underline{0}
\end{aligned}$$

となる．したがって答は ⓪ である．

類題　確率変数 X, Y が互いに独立であれば

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

が成り立つことを示せ．

解　$(*1) \sim (*3)$ を用いて $V(X + Y)$ を変形する．

$$\begin{aligned}
V(X + Y) &= E\Big((X + Y)^2\Big) - \Big(E(X + Y)\Big)^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - \Big(E(X + Y)\Big)^2 && (X + Y)^2\text{を展開} \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \\
&\qquad\qquad - \Big(E(X) + E(Y)\Big)^2 && (*2), (*1)\text{ より} \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \\
&\qquad - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 \\
&= E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) \\
&\qquad - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 && (*3)\text{ より} \\
&= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 \\
&= V(X) + V(Y)
\end{aligned}$$

証明終

問 4　確率変数 X の分布関数を $F_X(x) = P(X \leqq x)$ とする．このとき $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F_X(x) =$ $\boxed{\textbf{62}}$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} F_X(x) =$ $\boxed{\textbf{63}}$ である．

解　確率密度関数 $f(x)$ の分布関数は

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

で与えられるので $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \underline{0}$ となる．次に $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ は全事象の確率を与えるので 1 である．よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F_X(x) = \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \underline{1}$ となる．答は順に ⓪, ① である．

類題　確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられる連続型確率変数 X に対し，$f(x)$ の分布関数 $F_X(x)$ を求めよ．

解　分布関数の定義より

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

であり，$x \geqq 0$ と $x < 0$ に分けて分布関数を求めると

(i) $x \geqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} e^{-x}\,dx \\ &= 0 + \Big[-e^{-x}\Big]_0^x \\ &= 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

(ii) $x < 0$ のとき

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$$

となる．したがって $f(x)$ の分布関数は

$$\underline{F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}}$$

である．

問 5　確率変数 X, Y は独立で共に平均 3 および分散 1 の正規分布 $N(3, 1^2)$ に従うものとする．このとき $X - Y$ の平均は $\boxed{\textbf{64}}$ であり分散は $\boxed{\textbf{65}}$ である．

$\boxed{59}$ 〜 $\boxed{65}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ ∞　ⓑ $-\infty$

ⓒ 狭くなる　ⓓ 広くなる　ⓔ 変わらない

解　X, Y はそれぞれ平均 3，分散 1 であるから $-Y$ の平均は-3，分散は 1 となる．したがって $X - Y$ の平均は

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 3 - 3 = \underline{0}$$

である．また X, Y が独立であるから X と $-Y$ も独立であり，$X - Y$ の分散は

$$V(X - Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + V(Y) = 1 + 1 = \underline{2}$$

である．したがって答は順に ⓪, ② である．

類題　コインを 2 回投げて，1 回目に表なら 1，裏なら 0 となる確率変数を X とし，2 回目に表なら 1，裏なら 0 となる確率変数を Y とするとき，確率変数 $X + Y$ の平均 $E(X + Y)$ と分散 $V(X + Y)$ を求めよ．

解　確率変数 X, Y は独立であり，次に示す同じ確率分布をもつ．

X,Y の値	0	1
確　率	1/2	1/2

$E(X)$, $E(Y)$ と $V(X)$, $V(Y)$ は

$$E(X) = E(Y) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$V(X) = V(Y) = \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

となる．したがって X, Y が独立であることに注意すると

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \underline{1}, \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \underline{\frac{1}{2}}$$

となる．

第 8 問　〔解答番号 $\boxed{66}$ 〜 $\boxed{73}$ 〕　（配点 50 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

問 1　確率変数 X の密度関数が

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられているとする．ただし，$\lambda > 0$ は未知のパラメータである．X の n 個の観測値が $x_i \geqq 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ であるときの λ の最尤(ゆう)推定値 $\hat{\lambda}$ を求めたい．観測値の組を $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ と書くことにすると，$\hat{\lambda}$ は尤度関数

$$L(\lambda;\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\right)\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x_2}{\lambda}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x_n}{\lambda}}\right)$$

を最大にする λ として求められる．計算を簡単にするため $L(\lambda;\boldsymbol{x})$ の自然対数を $l(\lambda;\boldsymbol{x})$ とすると，

$$l(\lambda;\boldsymbol{x}) = -n\log\lambda - \boxed{66}$$

となり，極値を求めるため λ で微分すると

$$\frac{dl}{d\lambda}(\lambda;\boldsymbol{x}) = -\frac{n}{\lambda} + \boxed{67}$$

となる．ここで $\dfrac{dl}{d\lambda}(\lambda;\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす λ を求め $l(\lambda;\boldsymbol{x})$ の増減を調べることにより，$\lambda = \boxed{68}$ で $l(\lambda;\boldsymbol{x})$ が最大になることがわかる．したがって最尤推定値 $\hat{\lambda} = \boxed{68}$ である．

$\boxed{66}$ 〜 $\boxed{68}$ の解答群

⓪ $\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$　① $\dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i$　② $\sum_{i=1}^{n}e^{-\frac{x_i}{\lambda}}$　③ $\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{x_i}{\lambda}}$　④ $\dfrac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_ie^{-\frac{x_i}{\lambda}}$

⑤ $\sum_{i=1}^{n}x_i$　⑥ $\dfrac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i$　⑦ $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$　⑧ $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{x_i}$　⑨ $n\sum_{i=1}^{n}e^{x_i}$

解　確率変数 X の確率密度関数 $f(x;\lambda)$ が与えられているとする．λ は確率密度関数に含まれる未知のパラメータである．このとき X の n 個の観測値 $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ から λ を推定する場合，次の式を最大にする λ を推定値 $\hat{\lambda}$ とする方法を最尤法と呼ぶ．

$$L(\lambda;\boldsymbol{x}) = f(x_1;\lambda)\times f(x_2;\lambda)\times\cdots\times f(x_n;\lambda)$$

ただし $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ である．$L(\lambda; \boldsymbol{x})$ は尤度関数と呼ばれ，$\hat{\lambda}$ は最尤推定値と呼ばれる．$\dfrac{dL}{d\lambda}(\lambda; \boldsymbol{x}) = 0$ より $\hat{\lambda}$ を求めることができるが，積より和の方が計算しやすいので $L(\lambda; \boldsymbol{x})$ の代わりに自然対数をとった

$$
\begin{aligned}
l(\lambda; \boldsymbol{x}) &= \log L(\lambda; \boldsymbol{x}) \\
&= \log \{ f(x_1; \lambda) \times f(x_2; \lambda) \times \cdots \times f(x_n; \lambda) \} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i; \lambda)
\end{aligned}
$$

が用いられる．$l(\lambda, \boldsymbol{x})$ は対数尤度関数と呼ばれる．つまり $\dfrac{dl}{d\lambda}(\lambda; \boldsymbol{x}) = 0$ より最尤推定値 $\hat{\lambda}$ が求められる．

この問題では尤度関数は

$$
L(\lambda; \boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_1}{\lambda}} \right) \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_2}{\lambda}} \right) \cdots \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_n}{\lambda}} \right)
$$

であり，対数尤度関数は

$$
\begin{aligned}
l(\lambda; \boldsymbol{x}) &= \log \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_1}{\lambda}} \right) \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_2}{\lambda}} \right) \cdots \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_n}{\lambda}} \right) \right\} \\
&= \log \left(\frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\lambda}} \right) \\
&= \log \frac{1}{\lambda^n} + \log e^{-\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\lambda}} \\
&= \log \lambda^{-n} - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\lambda} \\
&= -n \log \lambda - \underline{\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i}
\end{aligned}
$$

となる．これを λ で微分すると

$$
\frac{dl}{d\lambda}(\lambda; \boldsymbol{x}) = -\frac{n}{\lambda} + \underline{\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} x_i}
$$

となる．ここで $\dfrac{dl}{d\lambda}(\lambda; \boldsymbol{x}) = 0$ を解いて $\lambda = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ を得る．増減表によって増減を調べると

λ	0	$\cdots$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$	$\cdots$
$\frac{dl}{d\lambda}(\lambda; \boldsymbol{x})$		$+$	0	$-$
$l(\lambda; \boldsymbol{x})$		$\nearrow$		$\searrow$

となり，$l(\lambda;\boldsymbol{x})$ は $\lambda=\underline{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i}$ で最大値をとることがわかる．よって最尤推定値 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$ である．したがって答は順に ①,⑥,⑦ である．

類題 1　確率変数 X の密度関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\lambda)^2}{2}}$$

であり正規分布 $N(\lambda,1^2)$ に従う．X の n 個の観測値が $x_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ であるとき，λ の最尤推定値 $\hat{\lambda}$ を求めよ．

解　$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ とすると尤度関数は

$$L(\lambda;\boldsymbol{x})=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x_1-\lambda)^2}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x_2-\lambda)^2}{2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x_n-\lambda)^2}{2}}\right)$$

であり，自然対数をとった対数尤度関数は

$$\begin{aligned}
l(\lambda;\boldsymbol{x})&=\log\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x_1-\lambda)^2}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x_2-\lambda)^2}{2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x_n-\lambda)^2}{2}}\right)\right\}\\
&=\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}}e^{\frac{-(x_1-\lambda)^2-(x_2-\lambda)^2-\cdots-(x_n-\lambda)^2}{2}}\right)\\
&=\log\frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}}+\log e^{\frac{-(x_1-\lambda)^2-(x_2-\lambda)^2-\cdots-(x_n-\lambda)^2}{2}}\\
&=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\lambda)^2
\end{aligned}$$

となる．$\dfrac{dl}{d\lambda}(\lambda;\boldsymbol{x})=0$ を計算し，$l(\lambda;\boldsymbol{x})$ を最大にする λ を求める．

$$\frac{dl}{d\lambda}(\lambda;\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\lambda)\times(-1)=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\lambda=0$$

より

$$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

となる．増減表によって増減を調べると

λ	$\cdots$	$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$	$\cdots$
$\dfrac{dl}{d\lambda}(\lambda;\boldsymbol{x})$	$+$	0	$-$
$l(\lambda;\boldsymbol{x})$	$\nearrow$		$\searrow$

であるので，最尤推定値は $\underline{\hat{\lambda} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i}$ である．

類題 2　確率変数 X の密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{\frac{-x^2}{2\lambda}}$$

であり正規分布 $N(0, \lambda)$ に従う．X の n 個の観測値が $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ であるとき，λ の最尤推定値 $\hat{\lambda}$ を求めよ．

解　$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とすると尤度関数は

$$L(\lambda; \boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{\frac{-x_1^2}{2\lambda}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{\frac{-x_2^2}{2\lambda}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{\frac{-x_n^2}{2\lambda}}\right)$$

であり，自然対数をとった対数尤度関数は

$$\begin{aligned}
l(\lambda; \boldsymbol{x}) &= \log\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{\frac{-x_1^2}{2\lambda}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{\frac{-x_2^2}{2\lambda}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{\frac{-x_n^2}{2\lambda}}\right)\right\} \\
&= \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}^{\,n}} e^{\frac{-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}{2\lambda}}\right) \\
&= \log\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}^{\,n}} + \log e^{\frac{-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}{2\lambda}} \\
&= -\frac{n}{2}\log 2\pi\lambda - \frac{1}{2\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i^2
\end{aligned}$$

となる．$\dfrac{dl}{d\lambda}(\lambda; \boldsymbol{x}) = 0$ を計算し，$l(\lambda; \boldsymbol{x})$ を最大にする λ を求める．

$$\frac{dl}{d\lambda}(\lambda; \boldsymbol{x}) = -\frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

より

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

となる．増減表によって増減を調べると

λ	$\cdots$	$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\cdots$
$\dfrac{dl}{d\lambda}(\lambda; \boldsymbol{x})$	$+$	0	$-$
$l(\lambda; \boldsymbol{x})$	$\nearrow$		$\searrow$

であるので，最尤推定値は $\underline{\hat{\lambda} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ である．

問 2 確率変数 X, Y が独立で同一の二項分布 $B\left(5, \dfrac{2}{3}\right)$ に従うものとするとき，条件付き確率 $P(Y=1 \mid X+Y=2)$ を求めたい．
X, Y は二項分布 $B\left(5, \dfrac{2}{3}\right)$ に従うから確率関数 $p(k)=P(X=k)=P(Y=k)$ は

$$p(k) = \boxed{\mathbf{69}}, \quad k=0,1,\ldots,5$$

である．$P(Y=1 \mid X+Y=2)$ は条件 $X+Y=2$ の下での $Y=1$ となる確率である．X, Y はともに 0 以上の整数値をとるから，条件 $X+Y=2$ を満たすのは $(X,Y)=(0,2),(1,1),(2,0)$ の 3 つの場合のみである．X, Y は独立であるから

$$P(X=0, Y=2) = p(0)p(2) = \boxed{\mathbf{70}}$$

$$P(X=1, Y=1) = \boxed{\mathbf{71}}$$

$$P(X=2, Y=0) = \boxed{\mathbf{72}}$$

となる．このうち $Y=1$ となるのは $(X,Y)=(1,1)$ のときのみである．したがって，

$$P(Y=1 \mid X+Y=2) = \boxed{\mathbf{73}}$$

となる．

$\boxed{69}$ の解答群

⓪ ${}_5\mathrm{C}_k \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5k}$　① ${}_k\mathrm{C}_2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5k}$　② $5k \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5k}$

③ ${}_5\mathrm{C}_k \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-k}$　④ ${}_k\mathrm{C}_2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-k}$　⑤ $5k \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-k}$

$\boxed{70}$ ～ $\boxed{73}$ の解答群

⓪ $\dfrac{2}{3^2}$　① $\dfrac{4}{3^2}$　② $\dfrac{5}{3^2}$　③ $\dfrac{8}{3^2}$　④ $\dfrac{5}{3^3}$　⑤ $\dfrac{8}{3^3}$　⑥ $\dfrac{10}{3^3}$　⑦ $\dfrac{25}{3^3}$

⑧ $\dfrac{10}{3^5}$　⑨ $\dfrac{25}{3^5}$　ⓐ $\dfrac{40}{3^5}$　ⓑ $\dfrac{80}{3^5}$　ⓒ $\dfrac{40}{3^{10}}$　ⓓ $\dfrac{80}{3^{10}}$　ⓔ $\dfrac{100}{3^{10}}$　ⓕ $\dfrac{160}{3^{10}}$

解 二項分布 $B\left(5, \dfrac{2}{3}\right)$ の確率関数は

$$p(k) = P(X=k) = P(Y=k) = \underline{{}_5\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}}$$

である．したがって

$$\begin{aligned} p(0) &= {}_5\mathrm{C}_0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^5 &= \frac{1}{3^5} \\ p(1) &= {}_5\mathrm{C}_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^4 &= \frac{10}{3^5} \\ p(2) &= {}_5\mathrm{C}_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 &= \frac{40}{3^5} \end{aligned}$$

となる．X, Y は独立だから同時確率はそれぞれの確率の積となる．よって

$$\begin{aligned} P(X=0, Y=2) &= p(0)p(2) &= \underline{\frac{40}{3^{10}}} \\ P(X=1, Y=1) &= p(1)p(1) &= \underline{\frac{100}{3^{10}}} \\ P(X=2, Y=0) &= p(2)p(0) &= \underline{\frac{40}{3^{10}}} \end{aligned}$$

である．条件付き確率は

$$P(Y=1 \mid X+Y=2) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=0, Y=2)+P(X=1, Y=1)+P(X=2, Y=0)}$$

であるから

$$\begin{aligned} P(Y=1 \mid X+Y=2) &= \left(\frac{100}{3^{10}}\right) \Bigg/ \left(\frac{40}{3^{10}}+\frac{100}{3^{10}}+\frac{40}{3^{10}}\right) \\ &= \frac{100}{180} = \frac{5}{9} = \underline{\frac{5}{3^2}} \end{aligned}$$

となる．したがって答は順に ③, ⓒ, ⓔ, ⓒ, ② である．

注意，事象 A, B において，B が起こった後 A が起こる条件付き確率は

$$P(A \mid B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$$

で与えられる．

類題 1　コインを 4 回投げるとき，表の出る回数を X とし，表と裏の出る回数の差の絶対値を Y とする．条件付き確率 $P(X=1 \mid Y=2)$ と $P(Y=2 \mid X=1)$ を求めよ．

解　X の確率分布 $P(X=k)$ は

$$P(X=k) = {}_4\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \frac{1}{2^4}\frac{4!}{k!(4-k)!}$$

であるから

X の値	0	1	2	3	4
確　率	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{16}$

となる．また

$$Y = |\,\text{表の出る回数} - \text{裏の出る回数}\,| = |X - (4 - X)| = |2X - 4|$$

であるので $X = 0, 1, 2, 3, 4$ を動くとき Y は $0, 2, 4$ を動く．

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P(X=2) = \frac{3}{8} \\ P(Y=2) &= P(X=1) + P(X=3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ P(Y=4) &= P(X=0) + P(X=4) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となるので Y の確率分布は次のようになる．

Y の値	0	2	4
確　率	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{8}$

表より

$$P(X=1) = \frac{1}{4},\ \ P(Y=2) = \frac{1}{2},\ \ P(X=1, Y=2) = P(X=1) = \frac{1}{4}$$

であるので，条件付き確率は

$$\begin{aligned} P(X=1 \,|\, Y=2) &= \frac{P(X=1, Y=2)}{P(Y=2)} = \underline{\frac{1}{2}} \\ P(Y=2 \,|\, X=1) &= \frac{P(X=1, Y=2)}{P(X=1)} = \underline{1} \end{aligned}$$

となる．

類題 2　2 つのサイコロ A, B をそれぞれ 2 回投げるとき，サイコロ A の 1 の目の出る回数を X とし，サイコロ B の 1 の目の出る回数を Y とする．条件付き確率 $P(X=2 \,|\, X+Y=2)$ を求めよ．

解　X と Y の確率分布は同じで二項分布 $B\left(2, \dfrac{1}{6}\right)$ であり

$$P(X=k) = P(Y=k) = {}_2\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2-k}$$

となる．X, Y が独立であることに注意すると

$$\begin{aligned}
P(X+Y=2) &= P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=0) \\
&= P(X=0)P(Y=2)+P(X=1)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0) \\
&= \frac{25}{6^4} + \frac{100}{6^4} + \frac{25}{6^4} \\
&= \frac{150}{6^4}
\end{aligned}$$

となる．$P(X = 2,\, X + Y = 2) = P(X = 2, Y = 0)$ より，条件付き確率は

$$P(X = 2 \,|\, X + Y = 2) = \frac{P(X = 2,\, X + Y = 2)}{P(X + Y = 2)} = \frac{\frac{25}{6^4}}{\frac{150}{6^4}} = \underline{\frac{1}{6}}$$

となる．

参考文献

[1] 有馬哲，石村貞夫,『よくわかる微分積分』，東京図書.

[2] 高橋泰嗣，加藤幹雄,『数学基礎コース=H2 微分積分概論』，サイエンス社.

[3] 下村宏彰，三上俊介,『微分積分学』，学術図書出版社.

[4] 押川元重，阪口紘治,『基礎線形代数』，培風館.

[5] 斉藤正彦,『基礎数学 1 線型代数入門』，東京大学出版会.

[6] 有馬哲，石村貞夫,『よくわかる線型代数』，東京図書.

[7] 長崎憲一，中村正彰，横山利章,『明解 微分方程式』，培風館.

[8] 坂光一，水原　廣,『例題中心 確率・統計入門』，学術図書出版社.

[9] 森真，田中ゆかり,『なっとくする統計』，講談社.