第1分野　微分積分

問1　(1)　任意の x に対して

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

であることから，容易に

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$$

を得る．

[注意 1] $x \to \infty$ のとき，分母 $\to \infty$ であるが分子は有界に留まる (その絶対値が 1 以下) ので，この問題にはロピタルの定理を使うことが出来ない．したがって，たとえば

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

とするのは誤りである．

[注意 2] 簡単な変数変換 $x \to \dfrac{1}{x}$ によって

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$$

であることも容易に分かる．見かけが複雑になり，しかも関数 $\cos\dfrac{1}{x}$ は $x=0$ の近くでかなり複雑な振る舞いを見せる（=限りなく振動する）が，$\left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$ という性質が使えることに変わりはない．

(2)　$x \to 0$ のとき，分母 x^2 の極限値は 0 であり，分子 $\log\cos x$ の極限値は $\log 1 = 0$ である．このような不定形の場合にはロピタルの定理が使えるから，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}\,\frac{-1}{\cos x} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{-1}{1} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

が分かる．

[注意] $x=0$ の近くでは $\cos x$ の値は 1 に近いので，$x=0$ の近くでは $\cos x > 0$ である．このことに注意した上で，$\log|\cos x|$ とは書かずに単に $\log\cos x$ と書いてある．

問 2 一般に，整数 n が 0 でない限り

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\left[\sin nx\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{n}(0-0) = 0$$

であり，$n = 0$ のときには

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi$$

である．したがって，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx\, dx = \begin{cases} \pi & (k = m \text{ のとき}) \\ 0 & (k = m \text{ でないとき}) \end{cases}$$

であることが分かる．

[注意] 問題文 1 行目の

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(k-m)x - \cos(k+m)x\}\, dx$$

までは高等学校でも学ぶ加法定理によるもので，工科系大学生としてはこの部分がなくても次の段階へと進めるのが本来の姿である．

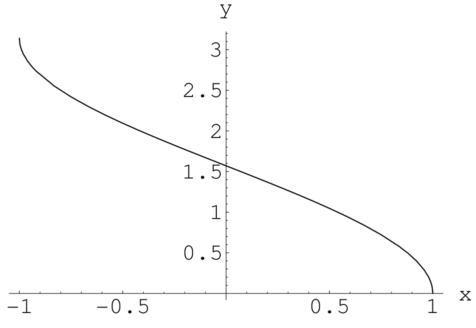
問 3 (1) $\cos^{-1}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ の値を求めるためには，関数 $y = \cos^{-1} x$ の定義によって，

$$\cos y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

となる y を $0 < y < \pi$ の範囲で探し出せばよい．容易に分かるように，求める y は

$$y = \frac{5}{6}\pi$$

である．



(2) 関数 $y=\cos^{-1}x$ の定義から $\cos y = x$ である．この両辺を x で微分すれば

$$-\sin y\cdot\frac{dy}{dx}=1 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}$$

が得られる．ここで，一般には

$$\sin y=\pm\sqrt{1-\cos^2 y}$$

であるが，$0<y<\pi$ では $\sin y>0$ であるので，最終的に

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

が分かる．

[注意] 記号 $\cos^{-1}x$ を $\dfrac{1}{\cos x}$ の意味と誤解するのは，$\cos^2 x$ の定義が $(\cos x)^2$ であったことを思えば尤もなことではあるが，問題文中でも注意されているように，記号 $\cos^{-1}x$ は関数 $\cos x$ の逆関数を表すものとして用いられる．これは一般的な使用法

記号 $f^{-1}(x)$ は関数 $f(x)$ の逆関数を表す

に基づいたものであり，その起源は

$y=f(x), z=g(y)$ の合成関数を gf と書き（$(gf)(x)=g(f(x))$），
f,g が同一の時には f^2 と書く

ことにある．

問 4 （このまま x,y について繰り返し積分を行うことも全く不可能というわけではないが）はるかに簡単で標準的な方法は極座標系への変数変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

を用いるものであろう．このとき，(x,y) 平面の図形 D は (r,θ) 平面の長方形

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq r\leqq\sqrt{2},\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$$

に対応する．したがって，

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} r^2\cos\theta\sin\theta\, r\,drd\theta \\ &= \left[\frac{r^4}{4}\right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4}\left(4-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}(1-0) \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{15}{4}\times\frac{1}{2} \\ &= \frac{15}{32}.\end{aligned}$$

[注意] 変数変換に際して登場するヤコビアン r を掛けることを忘れないようにすること．

問 5 ほとんどが一目瞭然に近いが，より正確には各式の特徴を調べて該当する曲線や曲面を見つける．

$$\boxed{\mathbf{8}} : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

これは曲線で，しかも与えられた径数 t の範囲では常に $x > 0$ であり，y は正にも負にもなり得る．したがって，もし該当する曲線があるとすればそれは ① である．

これはいわば消極的推論であるが，もっと丁寧にかつ積極的に考えようとするなら，例えば次のようにする．与えられた関係式から t を消去すると

$$x = y^{\frac{2}{3}}$$

が得られる．これが ① の曲線であることは容易に分かる．

[注意] t の動きとともに描かれる曲線の概形は容易に理解される．さらに，この曲線の接ベクトルが

$$(x'(t), y'(t)) = (2t, 3t^2)$$

であり，$t = 0$ では $(0, 0)$ になってしまう．原点はこの曲線のいわゆる特異点である．

$$\boxed{\mathbf{9}} : y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

これは関数のグラフとして与えられる曲線であって，よく知られた関数 $y = e^x$ のグラフとその y 軸対象の曲線とから容易に描かれる（点 x での値は e^x と e^{-x} の平均値として得られる）．答えは ⓪ である．これは懸垂線 (catenary) と呼ばれる曲線で，両端を同じ高さに固定した鎖やロープが自然な状態で形作る曲線（例えば電柱間の架線など）．である．

$$\boxed{\mathbf{10}} : x^2 + y^2 - z = 0$$

すぐ分かるように $z = x^2 + y^2$ と書き直されるから，関数のグラフとして与えられる曲面である．xy 平面の点 (x, y) が原点から距離 r だけ離れているとすれば，$z = r^2$ であるから，求める曲面（グラフ）は zr 平面に描いた放物線を z 軸の回りに回転したものとして得られる．よって回転放物面 ② が答えである．

$\boxed{\textbf{11}}$: $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$

これが楕円面であることを見るのは難しくない．答えは ④ である．

[注意] 以上の 3 問では，変数の動く範囲は意図的に明示されていない．

$\boxed{\textbf{12}}$: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = r \end{cases} \qquad (0 \leqq t < 2\pi,\ 0 \leqq r < \infty)$

この式から $x^2 + y^2 = z^2$ が分かる．したがって，xy 平面の点 (x, y) が原点から距離 r だけ離れているとすれば，$z^2 = r^2$ である．これは zr 平面で 2 つの直線 $z + r = 0$ と $z - r = 0$ を表す．これら 2 直線（実際には一方だけで十分）の $z \geqq 0$ に対応する部分を z 軸の回りに回転して得られる曲面 ③ が答えである．これは円錐面と呼ばれる曲面である．

$\boxed{\textbf{13}}$: $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases} \qquad (0 \leqq t < \infty)$

これは曲線を表すが，さらに前問と同様 $x^2 + y^2 = z^2$ が分かる．すなわち，この曲線は前問で調べた曲面 (円錐面) の上に束縛されている．それは ⑤ で示された曲線である．

問 6 関数

$$f(x, y) = \frac{3}{4}x^4 - x^3y + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2 + 2y$$

について，

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^3 - 3x^2y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -x^3 + y^3 + y + 2 \end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

となるのは

$$\begin{cases} 3x^2(x - y) = 0 \\ -x^3 + y^3 + y + 2 = 0 \end{cases}$$

のときである．第 1 式から $x = 0$ または $x = y$ であることがわかり，このそれぞれと第 2 式から

$$y^3 + y + 2 = 0 \qquad \text{あるいは} \qquad y + 2 = 0$$

であることが分かる．前者の場合，$y^3 + y + 2 = (y + 1)(y^2 - y + 2)$ と因数分解されることと $y^2 - y + 1 = 0$ が実解を持たないこととから，$y = -1$ だけが該当する．後

者の場合には $y=-2$ であるから $x=-2$ も分かる．したがって，問題本文にあるように，方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

の解は $(0,-1)$ と $(-2,-2)$ である．

[注意] ここまでの部分も自分の力で到達できることが望ましい．$(0,-1)$ と $(-2,-2)$ を与えるのはサーヴィス過剰と言ってよい．

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=9x^2-6xy=3x(3x-2y)$ であるから，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-2)=3\times(-2)\times(-2)=12$ であることが分かる．また，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-3x^2$ であること，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=3y^2+1$ であることから，

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,-2) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-2,-2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,-2) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 13 \end{vmatrix}=12(13-12)=12$$

であることを知る．

以上の情報 — $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ が正であることと行列式の値が正であること — によって，関数 f は $(-2,-2)$ で極小値をとることが分かる．

[注意] 上で計算した行列式はヘッシアンと呼ばれている．ヘッシアンを調べるのは，該当する行列によって定められる 2 次曲面がもとの曲面をよく近似するからである．

最後に，

$$\begin{aligned}
&f(x,y)-f(0,-1)\\
=\;&\frac{3}{4}x^4-x^3y+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{2}y^2+2y-\left\{\frac{1}{4}(-1)^4+\frac{1}{2}(-1)^2+2\cdot(-1)\right\}\\
=\;&x^3\left(\frac{3}{4}x-y\right)+(y+1)\left\{\frac{1}{4}(y-1)(y^2+1)+\frac{1}{2}(y-1)+2\right\}
\end{aligned}$$

は，点 $(0,-1)$ の近くで正にも負にもなり得る．実際，まず第 2 項の

$$(y+1)\left\{\frac{1}{4}(y-1)(y^2+1)+\frac{1}{2}(y-1)+2\right\}$$

は直線 $y=-1$ の上では常に値 0 をとる．また，第 1 項の $x^3\left(\dfrac{3}{4}x-y\right)$ における $\dfrac{3}{4}x-y$ は，直線 $y=-1$ の上では $\dfrac{3}{4}x+1$ と書けるので点 $(0,-1)$ の近くで 1 に近い値をとり，特に正の定符号である．一方で，x^3 は正にも負にもなり得るから，点 $(0,-1)$ の近くに制限した直線 $y=-1$ の上では，$f(x,y)-f(0,-1)$ は正にも負にもなり得る．

第 2 分野　線形代数

問 1　例えば以下のような式変形を行い計算する.

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} && \text{4 行目に 1 行目を加える} \\
=&\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} && \text{1 列目で展開} \\
=&\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} && \begin{array}{l}\text{1 行目に 2 行目を } -1 \text{ 倍して加える,} \\ \text{3 行目に 2 行目を } -5 \text{ 倍して加える}\end{array} \\
=&\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} && \text{3 行目で展開} \\
=&\ -3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
=&\ 9
\end{aligned}
$$

したがって答えは ② である.

問 2 (1) 例えば以下のような行基本変形を行う.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 8 \end{array}\right) \quad \text{2 行目および 3 行目に 1 行目の} -2 \text{ 倍を加える}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{1 行目および 3 行目に 2 行目を加える}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{2 行目×（−1）}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

したがって答えは ② である.

(2) 3×2 行列 X を

$$X = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix}$$

とおくと, (1) の結果より, $AX = B$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と変形される. ゆえに

$$\begin{pmatrix} x+z & u+w \\ y & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$X = \begin{pmatrix} x & u \\ 1 & 2 \\ 2-x & 1-u \end{pmatrix}$$

となる.　この成分の間の関係をみたす行列 X を, 挙げられている行列から選ぶと,　第 2, 3, 4 番目の行列となる. したがって答えは ③ である.

問 3 (1) 求める線形関係を

$$\boldsymbol{a}_1 + c_1\boldsymbol{a}_2 + c_2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{O} \quad (\text{零ベクトル})$$

とおくと,

$$c_1\boldsymbol{a}_2 + c_2\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1$$

より

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{a}_1$$

であるので次の連立１次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

を解けばよい. 問２と同様に, 行に関する基本変形を以下の行列に施す.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 6 & -2 \end{array}\right) \quad \text{２行目に１行目を加える,} \atop \text{３行目に１行目を }-1\text{ 倍して加える}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \quad \text{２行目×（１/２）, ３行目×（１/３）}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \text{１行目に２行目を }-3\text{ 倍して加える,} \atop \text{３行目に２行目を }-1\text{ 倍して加える}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{１行目×（１/２）}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より, $c_1 = 2, c_2 = -1$ となる.

したがって答えは⑤と②である .

(2) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となるためには, ３つのベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が互いに直交し, 各ベクトルの大きさ（長さ）が 1 であればよい. ゆえに $\boldsymbol{u}_3$ は

$\pm(\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2)$ （ここで $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ の外積）となる.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_3 &= \pm(\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2) \\
&= \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} \quad (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\text{は}\ \mathbb{R}^3\text{の基本ベクトル}) \\
&= \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right) \\
&= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって答えは ④ である.

(別解）$\boldsymbol{u}_3$ は $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ 両方に直交するから

$$\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0 \quad (\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1\text{は}\boldsymbol{u}_3\text{と}\boldsymbol{u}_1\text{の内積})$$

となり, さらに大きさが 1 であることを用いて $\boldsymbol{u}_3$ を求める.

問 4 (1)

$$
\begin{aligned}
5x^2 + 4xy + 5y^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= ax^2 + 2bxy + cy^2
\end{aligned}
$$

より, $a = 5, b = 2, c = 5$ となる.

したがって答えは ⑤, ②, ⑤ である.

(2) A の固有値を λ とすると, それは $|A - \lambda E| = 0$ （E は単位行列）で定義される.

$$
\begin{aligned}
0 &= |A - \lambda E| \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)^2 - 4 \\
&= \lambda^2 - 10\lambda + 21 \\
&= (\lambda - 3)(\lambda - 7)
\end{aligned}
$$

より $\lambda = 3, 7$ である.

したがって答えは ③, ⑦ である.

(3) 行列 A の固有値 λ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ であるから $A\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}=7\boldsymbol{u}$ が成り立つ. すなわち

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この2つの連立1次方程式の解で $u_1^2+u_2^2=1$ をみたすものがそれぞれ, 固有値3と固有値7に対する固有ベクトルである. ゆえに

$$\boldsymbol{p}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

したがって答えは ⑦, ⑥ である.

(4) 対称行列の対角化より

$$ {}^tPAP=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned} 5x^2+4xy+5y^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= {}^t\left(P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) AP\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^tPAP \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= 3X^2+7Y^2 \end{aligned}$$

となる.

したがって答えは ⓪ である.

$3X^2+7Y^2-1=0$ は $\dfrac{X^2}{1/3}+\dfrac{Y^2}{1/7}=1$ と標準形にできるので, これは X 切片が $\frac{1}{\sqrt{3}}$, Y 切片が $\frac{1}{\sqrt{7}}$ のだ円となる.

したがって答えは ④ である.

第3分野　常微分方程式

問 1　これは変数分離形である．問題の微分方程式を

$$yy' = x$$

と書き直して両辺を積分すれば,

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

が得られる（ここで C は任意定数）．したがって

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 2C}$$

が得られ，条件 $y(1) = -2$ を満たすものは

$$y = -\sqrt{x^2 + 3}$$

であることが分かる．つまり $\boxed{\textbf{33}}$ は ④．

問 2　関数 $y = 3\cos 2x - 4\sin 2x$ は特性根が $\pm 2i$ であるような特性方程式を持つ微分方程式の解である．従って特性方程式が

$$(\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0,$$

すなわち

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

である同次 2 階線形常微分方程式を選べばよい．つまり答えは微分方程式 $y'' + 4y = 0$ であり， $\boxed{\textbf{34}}$ は ② である．

関数 $y = \sqrt{3}e^{2x} + 2xe^{2x}$ は特性根が 2 (2 重根) であるような特性方程式を持つ微分方程式の解である．従って特性方程式が

$$(\lambda - 2)^2 = 0,$$

すなわち

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

である同次 2 階線形常微分方程式を選べばよい．つまり答えは $y'' - 4y' + 4y = 0$ であり， $\boxed{\textbf{35}}$ は ⑤ である．

問 3 中心が $(a, 0)$ で半径 r の円の方程式は

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

と書ける．これを用いて a と r を含まない式を導けばよい．両辺を微分すると

$$2(x-a) + 2yy' = 0$$

となり，さらに両辺を微分すると

$$2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$$

となり，

$$1 + (y')^2 + yy'' = 0$$

が得られる．つまり $\boxed{\textbf{36}}$ は ④ ．

問 4 まず最初に，同次 2 階線形常微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の一般解を考える．特性方程式

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

の解は $1, 2$ であることから，一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

である（ここで C_1, C_2 は任意定数）．

(1) 非同次 2 階線形常微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 1$ の特殊解を

$$y = c$$

と仮定する．これを $y'' - 3y' + 2y = 1$ に代入すると $c = 1/2$ が得られ，特殊解は $y = 1/2$ であることが分かる．つまり $\boxed{\textbf{37}}$ は ①.

前述の微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の特性方程式の解に注意して，非同次 2 階線形常微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = e^x$ の特殊解を

$$y = cxe^x$$

と仮定する．これを $y'' - 3y' + 2y = e^x$ に代入すると

$$(c+1)e^x = 0$$

が得られる．つまり $c = -1$ であり，特殊解は $y = -xe^x$ であることが分かる．つまり $\boxed{\textbf{38}}$ は ⑦ ．

(2) まず，非同次2階線形常微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 2 - 3e^x$ の特殊解を求める．線形性と (1) の結果から，特殊解は

$$y = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3(-xe^x) = 1 + 3xe^x$$

であることが分かる．前述のように同次2階線形常微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の一般解は

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

であるので，微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 2 - 3e^x$ の一般解は

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 1 + 3xe^x$$

となる．初期条件 $y(0) = 0$，$y'(0) = 1$ を満たすように C_1, C_2 を決める．条件より

$$C_1 + C_2 + 1 = 0, \quad C_1 + 2C_2 + 3 = 1$$

なので，$C_1 = 0$, $C_2 = -1$ が得られる．したがって，初期条件を満たす解は $y = 1 + 3xe^x - e^{2x}$ である．つまり $\boxed{\textbf{39}}$ は ⑨ .

問 5 微分方程式 $y'' + 2y' - 3y = 0$ の特性方程式

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

の解は $\lambda = 3, -1$ であるので，一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$$

（C_1, C_2 は任意定数）．また，微分方程式 $y'' + y = 0$ の特性方程式

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

の解は $\lambda = \pm i$ であるので，一般解は

$$y = C_3\cos x + C_4\sin x$$

（C_3, C_4 は任意定数）．これは，オイラーの公式を利用することにより

$$y = C_3'e^{ix} + C_4'e^{-ix}$$

（C_3', C_4' は任意定数）と書けることに注意すると，恒等的に 0 でない関数で二つの微分方程式 $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y'' + y = 0$ を同時に満たす関数は存在しないことが分かる．つまり $\boxed{\textbf{40}}$ は ⑧ .

問 6 (1)　2つの微分方程式

$$(*)\quad \frac{dx}{dt} = 3x - y$$
$$(**)\quad \frac{dy}{dt} = 5x - 3y$$

を用いて y の項を消す．式 $(*)$ の両辺を t で微分したもの

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$$

に $(**)$ を代入すると，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - (5x - 3y)$$

が得られ，更に $(*)$ から $y = -\frac{dx}{dt} + 3x$ が分かるので，代入して

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 5x + 3\left(-\frac{dx}{dt} + 3x\right)$$

を得ることができる．整理すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$$

となる．つまり $\boxed{\textbf{41}}$ は ⓪，$\boxed{\textbf{42}}$ は ⑦ ．

さて，この微分方程式の特性方程式 $\lambda^2 - 4 = 0$ の解は $\lambda = \pm 2$ なので，C_1, C_2 を任意定数として，

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$$

が得られる．つまり $\boxed{\textbf{43}}$ は ④ ．ここで $(*)$ を用いることによって，

$$y(t) = C_1e^{2t} + 5C_2e^{-2t}$$

も分かる．つまり $\boxed{\textbf{44}}$ は ①，$\boxed{\textbf{45}}$ は ⑤ ．

(2)　(1) の結果から

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{C_1e^{2t} + 5C_2e^{-2t}}{C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}}$$

となる．したがって

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{C_1e^{2t} + 5C_2e^{-2t}}{C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{C_1 + 5C_2e^{-4t}}{C_1 + C_2e^{-4t}} = \frac{C_1}{C_1} = 1,$$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty}\frac{C_1e^{2t} + 5C_2e^{-2t}}{C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{C_1e^{4t} + 5C_2}{C_1e^{4t} + C_2} = \frac{5C_2}{C_2} = 5$$

が分かる．つまり $\boxed{\textbf{46}}$ は ①，$\boxed{\textbf{47}}$ は ⑤ ．

$t \to +\infty$ の時 γ は $y = x$ に近づき，$t \to -\infty$ の時 γ は $y = 5x$ に近づく．γ が図のような概形になるためには $t \to +\infty$ の時 $y \to +\infty$ であり，かつ，$t \to -\infty$ の時 $y \to -\infty$ であればよい．すなわち

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}\{C_1e^{2t} + 5C_2e^{-2t}\} = \lim_{t\to+\infty}\{C_1e^{2t}\} = +\infty$$

かつ

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty}\{C_1e^{2t} + 5C_2e^{-2t}\} = \lim_{t\to-\infty}\{5C_2e^{-2t}\} = -\infty$$

であればよい．したがって $C_1 > 0$, $C_2 < 0$ が解答である．つまり $\boxed{\mathbf{48}}$ は ①.
［注意１］ここでは $t \to \pm\infty$ の時の $y(t)$ の挙動に注意して C_1, C_2 の符合を決定したが，$x(t)$ の挙動に注目しても同様の考え方で答えを得ることができる．
［注意２］ 解答群の ⓪, ②, ③ の場合はどのようなグラフになるか考察してみるとよいだろう．

第4分野　確率・統計

問1

$$E(X_1) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{10},$$
$$V(X_1) = E(X_1^2) - \{E(X_1)\}^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{10} + 0^2 \cdot \frac{9}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$$

であり，$X_2, \ldots, X_{100}$ に対しても同様の式を得る．一般に，確率変数 X, Y と定数 a, b に対して $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ が成り立ち, 更に，X と Y が独立ならば, $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$ も成り立つから，

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}\right) = \frac{1}{100}\{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{100})\} = E(X_1),$$
$$V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}\right) = \frac{1}{100^2}\{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_{100})\} = \frac{1}{100}V(X_1)$$

である．よって，答は順に⑤,ⓒ,⓪,⑥となる．

問2　事象 $\{X \geqq r\}$ が互いに排反な事象 $\{X = r\}, \{X = r+1\}, \{X = r+2\}, \ldots$ の和事象であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} P(X \geqq r) &= \sum_{k=r}^{\infty} P(X = k) \\ &= \sum_{k=r}^{\infty} (1-p)^k p \end{aligned}$$

これは初項 $p(1-p)^r$ 公比 $1-p$ の等比級数である．よって

$$= (1-p)^r.$$

更に，事象 $\{X \geqq r + s\}$ と $\{X \geqq r\}$ の積事象が $\{X \geqq r + s\}$ となることに注意すれば,

$$\begin{aligned} P(X \geqq r + s | X \geqq r) &= \frac{P(X \geqq r + s)}{P(X \geqq r)} \\ &= \frac{(1-p)^{r+s}}{(1-p)^r} \\ &= (1-p)^s. \end{aligned}$$

先の結果から，これは $P(X \geqq s)$ に一致する．従って，解答は順に ②, ① である．

問 3 X, Y の確率密度関数をそれぞれ f, g とすると，問題文より

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} & (0 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であることがわかる．よって，

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2},$$
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^{2/3}dx = \frac{2}{5},$$
$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^{5/3}dx = \frac{1}{4}$$

を得る．また，

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{1}{12}, \quad V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{9}{100}$$

であるから，問題文中の相関係数の定義式より

$$E(XY) = E(X)E(Y) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{V(X)V(Y)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}.$$

を得る．よって，答は順に②,③,⑧,⑤,⑤ となる．

問 4 一般に 2 項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X の平均 $E(X)$ は np，分散 $V(X)$ は $np(1-p)$ で与えられる．今の場合，帰無仮説の下で統計量 S は 2 項分布 $B(100, \frac{4}{5})$ に従うと考えられるので $E(S) = 100 \cdot \frac{4}{5} = 80$，$V(S) = 100 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = 16$ となる．これから平均 0，分散 1 となるように S を標準化するには, 統計量 T を

$$T = \frac{S - E(S)}{\sqrt{V(S)}} = \frac{S - 80}{4}$$

と与えればよい．結局，T の実現値 t は S に 73 を代入して $t = -\frac{7}{4} = -1.75$ で与えられる．ところで，中心極限定理 (ド・モワブル–ラプラスの定理) によると統計量 T の分布は標準正規分布 $N(0, 1)$ で近似されるので $P(T \geqq 1.645)$ と $P(T \leqq -1.645)$ は一致し，およそ 0.05 であると考えられる．故に，有意水準 5%の左片側検定において棄却域は $(-\infty, -1.645]$ と定まる．実現値 t については $t = -1.75 \leqq -1.645$ より，棄却域に含まれるから，この場合帰無仮説は有意水準 5%で棄却される．以上，解答は順に①,③,⑤,④,①,⓪ である．