EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2014年12月13日（土）

4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分

2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分

1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

∗ 受験分野は，各大学の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと．
(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．
(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．
(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(8) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(9) 問題冊子は持ち帰ること．
(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること．
(11) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選んでその記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\mathbf{23}}$ は $(\boxed{\mathbf{23}})$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 6 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{1}}$ 〜 $\boxed{\textbf{19}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある. 各逆関数がとる値の範囲（値域）は, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする.

問 1　次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2} = \boxed{\textbf{1}}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} x \left\{ \log(3x+1) - \log 3x \right\} = \boxed{\textbf{2}}$

$\boxed{\textbf{1}}$ の解答群

⓪ 0　① ∞　② $-\infty$

③ $\dfrac{2}{\pi}$　④ $\dfrac{1}{\pi}$　⑤ $\dfrac{1}{2\pi}$　⑥ $\dfrac{1}{3\pi}$　⑦ $\dfrac{1}{4\pi}$

⑧ $-\dfrac{2}{\pi}$　⑨ $-\dfrac{1}{\pi}$　ⓐ $-\dfrac{1}{2\pi}$　ⓑ $-\dfrac{1}{3\pi}$　ⓒ $-\dfrac{1}{4\pi}$

$\boxed{\textbf{2}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 6

⑤ $\dfrac{1}{6}$　⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\dfrac{1}{2}$　⑧ $\log 3$　⑨ ∞

解説

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2}$ は，分子 $=\sin x\to 0$, 分母 $=x^2-\pi^2\to 0$ となることから，$\frac{0}{0}$ の不定形である．そこでロピタルの定理を適用し，分子，分母をそれぞれ微分して極限をとると

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{(\sin x)'}{(x^2-\pi^2)'}=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x}{2x}=-\frac{1}{2\pi}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ⓐ である．

(2) 関数 $x\{\log(3x+1)-\log 3x\}$ は

$$x\{\log(3x+1)-\log 3x\}=x\log\frac{3x+1}{3x}=x\log\left(1+\frac{1}{3x}\right)=\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

と表せることから，$x\to\infty$ の極限では $\frac{0}{0}$ の不定形である．$z=\dfrac{1}{3x}$ とおいてからロピタルの定理を適用すれば，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{3z}=\lim_{z\to 0}\frac{\{\log(1+z)\}'}{(3z)'}=\lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+z}}{3}=\frac{1}{3}$$

を得る．よって，$\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ⑥ である．

また，この答えは，ネイピアの数 e の定義式 $e=\displaystyle\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$ を用いて導くこともできる．実際，$y=3x$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\{\log(3x+1)-\log 3x\}&=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{3}\log\frac{y+1}{y}\\&=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{3}\log\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\\&=\frac{1}{3}\log\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\\&=\frac{1}{3}\log e\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる．ここで，極限操作 lim と対数関数 log の入れ替えが log の連続性により可能であることを用いた．

問 2　関数 $f(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{3}\ \sin^{-1} x$ の閉区間 $[-1,\ 1]$ における最大値と最小値を求める．

(1)　$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \boxed{\mathbf{3}}$$

であるから，開区間 $(-1,\ 1)$ における $f'(x) = 0$ の解は $x = \boxed{\mathbf{4}}$ である．

$\boxed{3}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{1-x^2}}$　① $\dfrac{\sqrt{3}x+2}{\sqrt{1-x^2}}$　② $\dfrac{2x+\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}}$　③ $\dfrac{4x+\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{1-x^2}}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}x-2}{\sqrt{1-x^2}}$　⑥ $\dfrac{-2x+\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}}$　⑦ $\dfrac{-4x+\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{4}$ の解答群

⓪ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

④ $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　⑦ $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

解説

$\sin^{-1} x$ の微分公式を覚えていない場合は，まず $y = \sin^{-1} x$ $(-\pi/2 \leqq y \leqq \pi/2$ つまり $\cos y \geqq 0)$ とおき，$x = \sin y$ と $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ から $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ となることに注意して

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

のように自分で微分公式を導けばよい．この公式を用いれば，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-2x+\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

となり，開区間 $(-1, 1)$ における $f'(x) = 0$ の解は $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．よって，$\boxed{\mathbf{3}}$ の答えは ⑥ であり，$\boxed{\mathbf{4}}$ の答えは ① である．

(2) $f(x)$ の最大値と最小値の候補は，$f(\boxed{\;\mathbf{4}\;})$ と閉区間 $[-1, 1]$ の両端における値 $f(1), f(-1)$ になる．$f(x)$ の増減を調べ，これらの値を計算することにより，

最大値 $=$ $\boxed{\;\mathbf{5}\;}$，　最小値 $=$ $\boxed{\;\mathbf{6}\;}$

を得る．

$\boxed{\;\mathbf{5}\;}$・$\boxed{\;\mathbf{6}\;}$ の解答群

⓪ $\sqrt{3}$　① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$　② $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$　③ $1+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$　④ $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

⑤ $-\sqrt{3}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$　⑦ $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$　⑧ $1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$　⑨ $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

ⓐ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　ⓑ $\dfrac{\sqrt{13}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$

ⓒ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　ⓓ $\dfrac{\sqrt{13}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$

解説

閉区間 $[-1, 1]$ における $f(x)$ の増減表は

x	-1	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-1)$	↗	$f(\frac{\sqrt{3}}{2})$	↘	$f(1)$

となり，$f(x)$ は $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で最大値をとる関数であることがわかる．また，

$$f(-1)=2\sqrt{1-(-1)^2}+\sqrt{3}\sin^{-1}(-1)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

$$f(\frac{\sqrt{3}}{2})=2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{3}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

$$f(1)=2\sqrt{1-1^2}+\sqrt{3}\sin^{-1}1=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

より，$f(x)$ は 最大値 $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$, 最小値 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ をとる．よって，$\boxed{\;\mathbf{5}\;}$ の答えは ④，$\boxed{\;\mathbf{6}\;}$ の答えは ⑥ である．

問 3 関数 $f(x) = 4e^{x} - 2e^{-x}$ のマクローリン展開（$x = 0$ を中心とするテイラー展開）を

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

とするとき，$a_2 =$ $\boxed{\mathbf{7}}$，$a_3 =$ $\boxed{\mathbf{8}}$ である．

$\boxed{\mathbf{7}}$ ・ $\boxed{\mathbf{8}}$ **の解答群**

⓪ 0

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6

⑦ -1 ⑧ -2 ⑨ -3 ⓐ -4 ⓑ -5 ⓒ -6

解説

マクローリンの定理から，ランダウの記号を用いれば，$x = 0$ の近傍で

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

と表せる．

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4e^{x} + 2e^{-x} \\ f''(x) &= 4e^{x} - 2e^{-x} \\ f'''(x) &= 4e^{x} + 2e^{-x} \end{aligned}$$

より，$f'(0) = 6$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 6$ である．したがって，$x = 0$ の近傍で

$$f(x) = 2 + 6x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{7}}$ の答えは ① であり，$\boxed{\mathbf{8}}$ の答えは ① である．

問 4　2 つの積分を計算する．

(1)　$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}\,(4+x)}\,dx$　に対して，$\sqrt{x} = t$ と変数変換すると，

$$I_1 \;=\; \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \boxed{\mathbf{9}}\;dt \;=\; \boxed{\mathbf{10}}$$

となる．

(2)　$I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$ に対して，部分積分を繰り返すと，

$$I_2 = \boxed{\mathbf{11}} - I_2$$

となる．これより $I_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \boxed{\mathbf{11}}$ である．

$\boxed{\mathbf{9}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2\,(4+t^2)}$	① $\dfrac{1}{4+t^2}$	② $\dfrac{2}{4+t^2}$
③ $\dfrac{1}{2t\,(4+t^2)}$	④ $\dfrac{1}{t\,(4+t^2)}$	⑤ $\dfrac{2}{t\,(4+t^2)}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ ・ $\boxed{\mathbf{11}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\pi}{6}$	① $\dfrac{\pi}{4}$	② $\dfrac{\pi}{3}$	③ $\dfrac{\pi}{2}$
④ $\dfrac{e^{\pi}}{2}$	⑤ e^{π}	⑥ $1+e^{\pi}$	⑦ $1-e^{\pi}$
⑧ $-\dfrac{e^{\pi}}{2}$	⑨ $-e^{\pi}$	ⓐ $-1-e^{\pi}$	ⓑ $-1+e^{\pi}$

解説

(1) $\sqrt{x} = t$ と変数変換すると，$x = t^2$ となるので $dx = 2tdt$ を得る．また，$x = 0$ のときは $t = 0$ であり，$x = \dfrac{4}{3}$ のときは $t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ である．したがって，

$$I_1 = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{2t}{t(4+t^2)}dt = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{2}{4+t^2}dt$$

となるので，$\boxed{\mathbf{9}}$ の答えは ② である．

次に，$t=2u$ と変数変換すると，$t=0$ のときは $u=0$ であり，$t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のときは $u=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，

$$I_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+u^2}du=\left[\tan^{-1}u\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\pi}{6}$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{10}}$ の答えは ⓪ である．
また，$\tan^{-1}$ が出てくる積分公式を用いず，$t=2\tan\theta$ と変数変換して I_1 を求めてもよい．このとき，$dt=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，$t=0$ のときは $\theta=0$ であり，$t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のときは $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ であるので，

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2}{4+4\tan^2\theta}\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

となる．
(2) 部分積分を 2 回用いると，

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^{\pi}e^x\cos xdx\\&=[e^x\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\sin xdx\\&=-e^{\pi}-1+[e^x\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos xdx\\&=-e^{\pi}-1-I_2\end{aligned}$$

となるので，$\boxed{\mathbf{11}}$ の答えは ⓐ である．

問 5　2 変数関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 + y^2 + 2xy$ の極値について考える．

(1)　連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

の解は $(x,y) = (2,\,-2)$ と $(x,y) = \boxed{\mathbf{12}}$ の 2 つである．

$\boxed{\mathbf{12}}$ **の解答群**

⓪ $(-2,\ 2)$　① $(-1,\ 1)$　② $(0,\ 0)$　③ $(1,\ -1)$

解説

$f(x,y)$ を x で偏微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 + 2y$$

となり，y で偏微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2x$$

となる．連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + 2y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{cases}$$

を解くと $(x,y) = (0,0),\ (2,-2)$ を得るので，$\boxed{\mathbf{12}}$ の答えは ② である．

(2)　点 $(2,-2)$ において $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-2) = \boxed{\mathbf{13}} > 0$ であり，

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,-2) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,-2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-2) \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{14}}$$

であるから，関数 $f(x,y)$ は $(2,-2)$ で $\boxed{\mathbf{15}}$．

$\boxed{\mathbf{13}}$ ・ $\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ 2　① 4　② 8　③ 12

④ -2　⑤ -4　⑥ -8　⑦ -12

$\boxed{\mathbf{15}}$ の解答群

⓪ 極大値をとる　① 極小値をとる　② 極値をとらない

解説

一般に，関数 $g(x,y)$ に対し，連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

の解 $(x,y) = (a,b)$ を $g(x,y)$ の停留点とよぶ．そして，その停留点において次のことが成り立つ．

$$A = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a,b),\ B = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a,b),\ C = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(a,b)$$

とおくと，

(A1)　$AB - C^2 > 0$ のとき，

(i)　$A > 0$ であれば $g(x,y)$ は停留点 (a,b) で極小値をとる．

(ii)　$A < 0$ であれば $g(x,y)$ は停留点 (a,b) で極大値をとる．

(A2)　$AB - C^2 < 0$ のとき，$g(x,y)$ は停留点 (a,b) で極値をとらない．

本問題の場合，すなわち $g(x,y) = f(x,y)$ の場合，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2$$

であるので，停留点 $(2,-2)$ において $A = 4 > 0$, $AB - C^2 = 4 > 0$ である．よって，$\boxed{\mathbf{13}}$ の答えは ①, $\boxed{\mathbf{14}}$ の答えは ① である．さらに，上の (A1)(i) より $f(x,y)$ は停留点 $(2,-2)$ で極小値をとる．よって，$\boxed{\mathbf{15}}$ の答えは ① である．

問 6 xy 平面上の集合 D を $D = \{\,(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とし，重積分

$$I = \iint_D (x^2 + 3y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}\, dx dy$$

の値を求める．極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を行うと，I は

$$I_1 = \int_0^{\infty} r^{\boxed{\textbf{16}}} e^{-r^2}\, dr \quad と \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \boxed{\textbf{17}}\ \sin^2\theta)\, d\theta$$

の積 $I_1 I_2$ に等しいことがわかる．

I_1 の値は，$s = r^2$ として置換積分を行い，さらに部分積分を適用すると，$I_1 = \boxed{\textbf{18}}$ となる．また，I_2 の値は三角関数の倍角公式を用いて計算できる．したがって

$$I = I_1 I_2 = \boxed{\textbf{19}}$$

である．

$\boxed{16}$ 〜 $\boxed{18}$ の解答群

⓪ 0	① ∞	② $-\infty$			
③ 1	④ 2	⑤ 3	⑥ 4		
⑦ -1	⑧ -2	⑨ -3	ⓐ -4		
ⓑ $\frac{1}{2}$	ⓒ $\frac{1}{3}$	ⓓ $\frac{1}{4}$	ⓔ $-\frac{1}{2}$	ⓕ $-\frac{1}{3}$	ⓖ $-\frac{1}{4}$

$\boxed{19}$ の解答群

⓪ 0	① ∞				
② π	③ 2π	④ $\frac{\pi}{2}$	⑤ $\frac{3\pi}{2}$	⑥ $\frac{5\pi}{2}$	
⑦ $\frac{\pi}{4}$	⑧ $\frac{3\pi}{4}$	⑨ $\frac{5\pi}{4}$	ⓐ $\frac{\pi}{8}$	ⓑ $\frac{3\pi}{8}$	ⓒ $\frac{5\pi}{8}$

解説

極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

である．また，$D=\{(x,y)\,|\,x\geqq 0, y\geqq 0\}$ に対応する (r,θ) の領域は

$$E=\left\{(r,\theta)\;\middle|\; r\geqq 0,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right\}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
I&=\iint_E (r^2\cos^2\theta+3r^2\sin^2\theta)\,e^{-(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)}r\,drd\theta\\
&=\iint_E r^2(1+2\sin^2\theta)e^{-r^2}r\,drd\theta\\
&=\int_0^\infty r^3e^{-r^2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin^2\theta)d\theta=I_1I_2
\end{aligned}$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{16}}$ の答えは ⑤，$\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ④ である．
次に I_1 の値を求めるため，$s=r^2$ とおくと $ds=2rdr$ となる．また，$r=0$ のとき $s=0$, $r=\infty$ のとき $s=\infty$ であるので，

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_0^\infty\frac{1}{2}se^{-s}ds\\
&=\left[-\frac{1}{2}se^{-s}\right]_0^\infty-\int_0^\infty\frac{1}{2}(-e^{-s})ds\\
&=\frac{1}{2}\left[-e^{-s}\right]_0^\infty=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

を得る．ここで，

$$\lim_{s\to\infty}se^{-s}=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{e^s}=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{e^s}=0$$

がロピタルの定理からわかることを用いた．したがって，$\boxed{\mathbf{18}}$ の答えは ⓑ である．
一方，倍角公式より $2\sin^2\theta=1-\cos 2\theta$ であるから，

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+1-\cos 2\theta)d\theta=\left[2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

が導かれ，$I=I_1I_2=\dfrac{1}{2}\pi$ となる．したがって，$\boxed{\mathbf{19}}$ の答えは ④ である．

第２分野　線形代数

〔問１～問５：解答番号 $\boxed{\mathbf{20}}$ ～ $\boxed{\mathbf{36}}$ 〕

問１ (1) ３次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を O とし, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をその正規直交基底とする．２つのベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{e}_1 + 3\,\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_3$$

によって作られる三角形 △OAB の面積は $\boxed{\mathbf{20}}$ である．

$\boxed{\mathbf{20}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ $\dfrac{1}{2}$	⑧ $\dfrac{3}{2}$	⑨ $\dfrac{5}{2}$	ⓐ $\sqrt{2}$	ⓑ $\sqrt{3}$
ⓒ $\sqrt{5}$	ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	ⓔ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	ⓕ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$		

解説

(1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が正規直交基底なので

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成りたつ．すると，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= (\sqrt{2}\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3) \cdot (\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{2}\boldsymbol{e}_3) \\ &= \sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 - \sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は直交している．また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の長さ（ノルム）

はそれぞれ

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}} = \sqrt{(\sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3) \cdot (\sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3)}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3},$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{2}\boldsymbol{e}_3) \cdot (\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{2}\boldsymbol{e}_3)}$$
$$= \sqrt{1^2 + 3^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{12}$$

である．よって，三角形 △ABC の面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3.$$

したがって $\boxed{\mathbf{20}}$ の答えは ③ である．

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\textbf{21}}$ である．

$\boxed{\textbf{21}}$ **の解答群**

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ -4　ⓒ -5　ⓓ -6　ⓔ -7

解説

(2) 行列式の変形を行って計算する．その計算例を示す．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行に第 1 行の } (-1) \text{ 倍}\\ \text{を加える．この操作で行列}\\ \text{式の値は変わらない}\end{array}\right)$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行と第 4 行を入れ換え}\\ \text{る．この操作により行列式}\\ \text{の符号は反転する．}\end{array}\right)$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l}\text{第 3 行に第 2 行の } (-2) \text{ 倍}\\ \text{を加える．この操作で行列}\\ \text{式の値は変わらない．}\end{array}\right)$$

$$= (-1)\cdot 1\cdot 1\cdot (-1)\cdot (-2) = -2 \quad \left(\begin{array}{l}\text{上三角行列の行列式の値は}\\ \text{対角成分の積に等しい．}\end{array}\right)$$

よって，$\boxed{\textbf{21}}$ の答えは ⑨ である．

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} の $(1,1)$ 成分は $\boxed{\mathbf{22}}$ であり，

$(3,2)$ 成分は $\boxed{\mathbf{23}}$ である．

$\boxed{\mathbf{22}}$ ・ $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　⑥ $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ $-\dfrac{1}{2}$　ⓐ $-\sqrt{2}$　ⓑ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

解説

(3) A の逆行列の成分は，A の行列式の値と余因子を使って求められる．

まず A の行列式は，$|A| = 2$ である．

A の (i,j)-余因子を $\hat{A}_{ij}$ と書くことにする．$\hat{A}_{ij}$ は，A から i 行と j 列を取り除いた行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ 倍した値である．余因子の性質により逆行列 A^{-1} の (i,j) 成分は，$\dfrac{\hat{A}_{ji}}{|A|}$ で計算される．（$\hat{A}_{ij}$ でなく，$\hat{A}_{ji}$ であることに注意する．）

さて，

$$\hat{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

であるから逆行列 A^{-1} の $(1,1)$ 成分は $\dfrac{1}{2}$ である．したがって，$\boxed{\mathbf{22}}$ の答えは ③.

次に，

$$\hat{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

であるから逆行列 A^{-1} の $(3,2)$ 成分は $-\dfrac{1}{2}$ である．したがって，$\boxed{\mathbf{23}}$ の答えは ⑨ である

別解として，行列 A の逆行列そのものを掃きだし法で計算してもよい．

A に単位行列 E を付け加えた拡大行列 $(A|E)$ に対して行の基本変形操作を何度か行い，$(E|M)$ の形に変形したとき，右半分の行列 M が A の逆行列 A^{-1} である．

問題の A については，例えば次のように変形できる．

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行に第 1 行の } (-1) \text{ 倍を加える}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行に第 2 行の } (-1) \text{ 倍を加える}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を } \frac{1}{2} \text{ 倍する}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行に第 3 行の等倍を加える}]{\text{第 1 行に第 3 行の } (-1) \text{ 倍をわえ，}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

こうして $(E|M)$ の形に変形された．したがって逆行列 A^{-1} は，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である．その $(1,1)$ 成分は $\dfrac{1}{2}$, $(3,2)$ 成分は $-\dfrac{1}{2}$ であることがわかる．

問 2　a, b を実数として連立 1 次方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} 2x + y + az = b \\ x \qquad + 2z = 1 \\ x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

を考える．方程式の拡大係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & b \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(1)　$(*)$ が解を 1 つだけもつのは，$a \neq$ $\boxed{\textbf{24}}$ のときである．

(2)　$(*)$ が無数に解をもつのは，$a =$ $\boxed{\textbf{24}}$，$b =$ $\boxed{\textbf{25}}$ のときである．
このとき，A の階数 (ランク) は $\boxed{\textbf{26}}$ である．

$\boxed{\textbf{24}}$ ～ $\boxed{\textbf{26}}$ の解答群

⓪ 0					
① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6
⑦ −1	⑧ −2	⑨ −3	ⓐ −4	ⓑ −5	ⓒ −6

解説

(1)　まず連立 1 次方程式 $(*)$ は，未知数と方程式の個数が等しい連立方程式であることに注意する．これから方程式の係数行列は正方行列であり，連立方程式が解を 1 つだけもつのは, その係数行列が逆行列を持つときである．さらに，逆行列を持つのはその行列式の値が 0 とならないときである．

方程式 $(*)$ の係数行列を

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

とおく．その行列式は，

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - a$$

であるから，$|C| \neq 0$ となるのは $a \neq 3$ のときである．よって $\boxed{\mathbf{24}}$ の答えは ③ である．

(2) $(*)$ が解を少なくとも 1 つ持つのは，係数行列 C と拡大係数行列 A のランクが等しくなるとき，式で表せば，$\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} A$ が成り立つときである．

これから拡大係数行列 A の行変形を行い, C と A のランクを同時に調べる．

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & b \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行と第 3 行を交換する}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{(第 3 行)} - 2 \times \text{(第 1 行) を新 (第 3 行) とする}]{\text{(第 2 行)} - \text{(第 1 行) を新 (第 2 行) とする}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & a-6 & b-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{(第 3 行)} - 3 \times \text{(第 2 行) を新 (第 3 行) とする}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & b-2 \end{array}\right)$$

この変形により

$$a \neq 3 \text{ のとき } \operatorname{rank} C = 3, \qquad a = 3 \text{ のとき } \operatorname{rank} C = 2$$

であることがわかる．

$a \neq 3$ の場合は, (1) で扱った解がただ 1 つの場合である．

$a = 3$ の場合は, A を変形した行列は $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right)$ となるので，$\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} A = 2$ となるのは，$b = 2$ の場合である．

この場合，t を任意定数とする $x = 1 - 2t$, $y = t$, $z = t$ となる解があるので，確かに解は無数にある．

以上より，$\boxed{\mathbf{25}}$ の答えは ② であり，$\boxed{\mathbf{26}}$ の答えは ② である．

問 3　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ においてベクトルの組

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (s \text{ は定数})$$

が 1 次独立になるのは $s \neq \boxed{\mathbf{27}}$ のときである．
また，$s = \boxed{\mathbf{27}}$ のとき，

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{27}} \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{28}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \boxed{\mathbf{29}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．

$\boxed{27}$ 〜 $\boxed{29}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

解説

3 つのベクトルの組 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ が 1 次独立になるのは，これらのベクトルを並べてできる行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & s \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ のランクが 3 になるときである．ところがこの行列 P は 3 次の正方行列がであるから, ランク 3 になるのは行列式の値が 0 とならないときである．

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & s \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4s + 20$$

であるので，$|P| \neq 0$ は $s \neq -5$ のときである．したがって，$\boxed{\mathbf{27}}$ の答えは ⓑ である．

次に $s=-5$ のとき，与えられた 3 つのベクトルの組は 1 次従属になるが，最初の 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ は明らかに 1 次独立であるので，1 次従属関係

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を成り立せる係数 t, u が存在する．

最初の 2 つの成分に関する等式から t と u に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} -5 = t + 4u \\ 7 = 3t + u \end{cases}$$

が導かれる．これを解いて $t=3$, $u=-2$ を得る．したがって，$\boxed{\mathbf{28}}$，$\boxed{\mathbf{29}}$ の答えはそれぞれ ③, ⑧ である．

問 4　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 f が

$$f(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix}\boxed{\mathbf{30}}\\\boxed{\mathbf{31}}\end{pmatrix}$ となる．

$\boxed{30}$ ・ $\boxed{31}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

解説

(1)　記号の簡単のために問題で与えられた $\mathbb{R}^3$ の 3 個のベクトルを

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

とおく．したがって与えられた f に関する条件は，

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

と表される．

さて，線形写像の性質を用いると

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{u}_1 + 2\,\boldsymbol{u}_2) = f(\boldsymbol{u}_1) + 2\,f(\boldsymbol{u}_2) \\ &= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{30}}$, $\boxed{\mathbf{31}}$ の答えはそれぞれ ④, ⑨ である．

(2) $\mathbb{R}^3$ のすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列は $A = \boxed{\textbf{32}}$ である．

$\boxed{\textbf{32}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$　⑧ $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑨ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　ⓐ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　ⓑ $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

解説

(2) 写像の行列表現 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ において，$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ は 3 行 1 列の行列と同一視され, 像 $A\boldsymbol{x}$ は $\mathbb{R}^2$ のベクトルとして 2 行 1 列の行列と同一視されているので, A は 2 行 3 列の行列でなければならない．そこで $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ とおける．

このとき，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$f(\boldsymbol{e}_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

となるので，$f(\boldsymbol{e}_i)$ より A の i 列が定まる．そこで各 $\boldsymbol{e}_i$ を像が知られた $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ で

表す．簡単な計算で

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 &=& \frac{1}{2}\left\{-\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3\right\} \\ \boldsymbol{e}_2 &=& \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3\right\} \\ \boldsymbol{e}_3 &=& \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3\right\} \end{cases}$$

であることがわかる．これから，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} &= f(\boldsymbol{e}_1) \\ &= f\left(\tfrac{1}{2}\left\{-\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3\right\}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{-f(\boldsymbol{u}_1)+f(\boldsymbol{u}_2)+f(\boldsymbol{u}_3)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

同様な計算を行って，

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

が求められる．よって，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

となり，$\boxed{\mathbf{32}}$ の答えは ⓪ である．

問 5 (1) 2 次形式 $x^2+4xy-2y^2$ は，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと 2 次の実対称行列 $A=$ **33** を用いて

$$x^2+4xy-2y^2={}^t\boldsymbol{x}A\,\boldsymbol{x}$$

と表される．ただし ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表し ${}^t\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ である．

(2) A の固有値は -3 と **34** である．

(3) $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} w \\ 1 \end{pmatrix}$ を **34** に対する A の固有ベクトルとすると $w=$ **35** である．

$\boldsymbol{p}$ は定数 $k=$ **36** に関して

$${}^t\boldsymbol{p}\,A\,\boldsymbol{p}=k\,({}^t\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p})$$

を満たす．

33 の解答群

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ⑦ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

34 〜 36 の解答群

⓪ 0

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6

⑦ -1 ⑧ -2 ⑨ -3 ⓐ -4 ⓑ -5 ⓒ -6

解説

(1)　求めたい実対称行列を $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ とおくと,.

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = (x\ \ y)\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2cxy + by^2 $$

である．$x^2 + 4xy - 2y^2 = ax^2 + 2cxy + by^2$ が成り立てばよい．両辺の係数比較により $a = 1,\ 2c = 4,\ b = -2$ を得る．したがって，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$． よって $\boxed{\mathbf{33}}$ の答えは ① である．

(2)　行列 A の固有多項式は

$$ |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) - (-2)^2 = \lambda^2 + \lambda - 6 $$
$$ = (\lambda + 3)(\lambda - 2) $$

なので，A の固有値は -3 と 2 である．したがって，$\boxed{\mathbf{34}}$ の答えは ② である．

(3)　$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} w \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有値 2 に対する A の固有ベクトルならば，

$$ A\,\boldsymbol{p} - 2\,\boldsymbol{p} = (A - 2\,E)\,\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w + 2 \\ 2w - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} $$

が成りたつので，$w = 2$ である．したがって，$\boxed{\mathbf{35}}$ の答えは ② である．

また，

$$ {}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p} = {}^t\boldsymbol{p}(A\boldsymbol{p}) = {}^t\boldsymbol{p}(2\boldsymbol{p}) = 2\,({}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}) $$

と変形されるので，$\boxed{\mathbf{36}}$ の答えは ② である．

第３分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{37}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{53}}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す. また, 特殊解は特解ともいう.

問１ (1) 微分方程式

$$y' = -\frac{y}{x^2}$$

の一般解は $y = \boxed{\mathbf{37}}$ である.

$\boxed{\mathbf{37}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{x} + C$	① $\dfrac{1}{x^2} + C$	② $e^{1/x} + C$	③ $e^{-1/x} + C$
④ $\dfrac{C}{x}$	⑤ $\dfrac{C}{x^2}$	⑥ $Ce^{1/x}$	⑦ $Ce^{-1/x}$
⑧ $e^{1/x^2} + C$	⑨ $e^{-1/x^2} + C$	ⓐ $e^{2/x^3} + C$	ⓑ $e^{-2/x^3} + C$
ⓒ Ce^{1/x^2}	ⓓ Ce^{-1/x^2}	ⓔ Ce^{2/x^3}	ⓕ Ce^{-2/x^3}

(C は任意定数)

解説

$y' = f(x)y$ の形の微分方程式に対する一般解を求める方法には，変数分離形方程式とみなして解く方法もあるが，同次な 1 階線形方程式と捉え，$y = Ce^{F(x)}$ と解く方法が速くて便利である．ただし，C は任意定数，$F(x)$ は $F'(x) = f(x)$ を満たす関数 ($f(x)$ の原始関数) である．本問題は $f(x) = -x^{-2}$ の場合であり，$F(x)$ として x^{-1} を採用すれば，求める一般解として $y = Ce^{1/x}$ を得る．すなわち，$\boxed{\mathbf{37}}$ の答えは ⑥ である．

(2)　微分方程式

$$2y'' + y' - y = 5x - 3$$

の一般解は $y = \boxed{\mathbf{38}}$ である．

$\boxed{\mathbf{38}}$ **の解答群**

⓪ $A\,e^{x/2} + B\,e^{x} + 5x + 12$　① $A\,e^{-x/2} + B\,e^{x} - 5x + 8$

② $A\,e^{x/2} + B\,e^{-x} - 5x - 2$　③ $A\,e^{x/2} + B\,e^{-x} - 5x - 18$

④ $A\,e^{x/2} + B\,e^{-x} + 5x + 12$　⑤ $A\,e^{x/2} + B\,e^{x} - 5x + 8$

⑥ $A\,e^{-x/2} + B\,e^{x} - 5x - 2$　⑦ $A\,e^{-x/2} + B\,e^{-x} - 5x - 18$

⑧ $A\,e^{x/2}\sin x + B\,e^{x/2}\cos x + 5x + 12$

⑨ $A\,e^{-x/2}\sin x + B\,e^{-x/2}\cos x - 5x + 8$

ⓐ $A\,e^{x}\sin\dfrac{x}{2} + B\,e^{x}\cos\dfrac{x}{2} - 5x - 2$

ⓑ $A\,e^{x}\sin\dfrac{x}{2} + B\,e^{x}\cos\dfrac{x}{2} - 5x - 18$

ⓒ $A\,e^{-x}\sin\dfrac{x}{2} + B\,e^{-x}\cos\dfrac{x}{2} + 5x + 12$

(A, B は任意定数)

解説

実定数 a, b, c を係数とする非同次な 2 階線形微分方程式 $ay'' + by' + cy = f(x)$ の一般解は，その方程式の特殊解 y_1 と同次方程式 $az'' + bz' + cz = 0$ の一般解 z の和で表される．

特殊解 y_1 を求める方法はいくつか知られているが，本問題の微分方程式のように $f(x)$ が x の 1 次式である場合，y_1 も 1 次式 $px + q$ であるとして定数 p, q を決める方法 (未定係数法) が易しい．実際に $y = y_1 = px + q$ を本問題の微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} 2(px+q)'' + (px+q)' - (px+q) &= 5x - 3 \\ -px + p - q &= 5x - 3 \end{aligned}$$

となるので，$p = -5,\ q = -2$，すなわち $y_1 = -5x - 2$ が得られる．

同次な2階線形微分方程式 $az'' + bz' + cz = 0$ に対して，2次方程式 $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ をその微分方程式の特性方程式という．特性方程式が相異なる2つの実数解 μ, ν をもつときには，微分方程式の一般解は $Ae^{\mu x} + Be^{\nu x}$ (A, B は任意定数) と書けることが知られている (問3の解説も参照のこと)．本問題の場合，すなわち $a = 2, b = 1, c = -1$ の場合，特性方程式 $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ は $(2\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$ と書き換えられるから $\lambda = \dfrac{1}{2}, -1$ なる解をもつ．したがって，$z = Ae^{x/2} + Be^{-x}$ を得る．

以上より，本問題の非同次微分方程式の一般解は $y = y_1 + z = -5x - 2 + Ae^{x/2} + Be^{-x}$ となるので，$\boxed{\textbf{38}}$ の答えは ② である．

問 2　ある物質の量 $m(t)$ は，時刻 t の関数として微分方程式

$$\frac{dm}{dt} = -k\,m + 1 \qquad (\,k \text{ は正の定数}\,)$$

に従って変化するとする．

(1)　$m(t)$ は，時刻 $t = 0$ での値 $m(0)$ によらず，時間がたてば定数 $a = \boxed{\mathbf{39}}$ に近づくことがわかる．すなわち，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} m(t) = a$ となる．

(2)　$m(t)$ について $m(0) \neq a$ で，

$$|m(0) - a| = 8\,|m(4) - a|$$

が成り立つとき，$k = \boxed{\mathbf{40}}$ である．

$\boxed{\mathbf{39}}$ **の解答群**

⓪ k　① $\dfrac{1}{k}$　② e^{k}　③ e^{-k}　④ $e^{1/k}$　⑤ $e^{-1/k}$

$\boxed{\mathbf{40}}$ **の解答群**

⓪ $\log 2$　① $2\log 2$　② $3\log 2$　③ $4\log 2$

④ $\dfrac{1}{12}\log 2$　⑤ $\dfrac{1}{4}\log 2$　⑥ $\dfrac{1}{3}\log 2$　⑦ $\dfrac{3}{4}\log 2$　⑧ $\dfrac{4}{3}\log 2$

解説

(1) 本問題の微分方程式は，係数が定数である非同次な 1 階線形方程式である．この微分方程式の一般解は，問 1(2) の 2 階線形微分方程式と同様，特殊解 $m_1(t)$ と同次微分方程式 $\dfrac{dn}{dt} = -kn$ (非同次項である $+1$ を省いたもの) の一般解 $n(t)$ の和で表される．

$m(t)$ の微分方程式の非同次項が定数であることから，特殊解 $m_1(t)$ も定数関数であると仮定し，$m = m_1(t) = M$ (M は定数) を代入すると，$0 = -kM + 1$, すなわち $M = \dfrac{1}{k}$ を得る．

同次微分方程式の解 $n(t)$ は，問 1(1) の解説の考え方で $n(t) = Ce^{-kt}$ と即座に求められる．

よって，本問題の微分方程式の一般解は $m(t) = m_1(t) + n(t) = \dfrac{1}{k} + Ce^{-kt}$ となる．$\lim_{t\to\infty} m(t) = \dfrac{1}{k}$ であるから，$\boxed{\mathbf{39}}$ の答えは ① となる．

(2) (1) より $|m(t) - a| = |Ce^{-kt}| = |C|e^{-kt}$ (条件 $m(0) \neq a$ より $C \neq 0$) が成り立つから，問題は $|C| = 8|C|e^{-4k}$, すなわち $1 = 8e^{-4k}$ を解くことに帰着する．両辺の対数をとると，$0 = \log 8 - 4k$, つまり $k = \dfrac{1}{4}\log 8 = \dfrac{3}{4}\log 2$ を得るので，$\boxed{\mathbf{40}}$ の答えは ⑦ である．

問 3　次の 3 つの微分方程式を考える．

(i)　$y'' - 4y = 0$

(ii)　$y'' + 4y' + 4y = 0$

(iii)　$y'' + 2y' + 5y = 0$

(1)　$y(0) = 0$ を満たし，$y'(0) > 0$ となる解は，

(i) の場合は $y = \boxed{\mathbf{41}}$，

(ii) の場合は $y = \boxed{\mathbf{42}}$，

(iii) の場合は $y = \boxed{\mathbf{43}}$

である．

$\boxed{\mathbf{41}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{43}}$ の解答群

⓪ $A\,e^{2x}$	① $A\,x\,e^{2x}$	② $A\,(e^{2x} - e^{-2x})$
③ $A\,e^{-2x}$	④ $A\,x\,e^{-2x}$	⑤ $A\,(e^{-2x} - e^{2x})$
⑥ $A\cos 2x$	⑦ $A\,x\,\cos 2x$	⑧ $A\,x^2\,\cos x$
⑨ $A\sin 2x$	ⓐ $A\,x\,\sin 2x$	ⓑ $A\,x^2\,\sin x$
ⓒ $A\,e^{x}\cos 2x$	ⓓ $A\,e^{-x}\cos 2x$	ⓔ $A\,e^{2x}\cos x$
ⓕ $A\,e^{x}\sin 2x$	ⓖ $A\,e^{-x}\sin 2x$	ⓗ $A\,e^{2x}\sin x$

(A は $A > 0$ である任意定数)

解説

常微分方程式の本で，2 階微分方程式に初期条件を付した練習問題としてよく目にするのは，初期条件の等式 2 個を用い，一般解に含まれる 2 個の任意定数の値を定めるというものだが，この問 3 は，初期条件が等式 1 個 ($y(0) = 0$) と不等式 1 個 ($y'(0) > 0$) から成り，1 個の任意定数の値 (A の値) が定まらず，条件 ($A > 0$) 付きで残るというものである．

まず，同次な 2 階線形微分方程式 $ay'' + by' + cy = 0$ (a, b, c は実定数) の一般解は，

問 1(2) の解説でも登場した特性方程式 $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ の判別式の符号によって次のように分類できる．ただし C_1, C_2 は任意定数である．

(a) $b^2 - 4ac > 0$ のとき．特性方程式は相異なる 2 つの実数解 $\lambda = \mu, \nu$ をもち，微分方程式の一般解は $y = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{\nu x}$ と表される．

(b) $b^2 - 4ac = 0$ のとき．特性方程式は重解 $\lambda = \mu \left(= -\dfrac{b}{2a} \right)$ をもち，微分方程式の一般解は $y = C_1 e^{\mu x} + C_2 x e^{\mu x}$ と表される．

(c) $b^2 - 4ac < 0$ のとき．特性方程式は 2 つの実数でない解 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ をもち，微分方程式の一般解は $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ と表される．

(i) の微分方程式に対する特性方程式は $\lambda^2 - 4 = 0$ であり，$\lambda = \pm 2$ なる実数解をもつ．これは上の (a) の μ, ν に相当するので，一般解 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ を得る．初期条件 $y(0) = 0$ より $C_1 + C_2 = 0$, すなわち $C_2 = -C_1$ が成り立つ．更に $y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x}$ に対して $y'(0) > 0$ とならなくてはいけないが，$y'(0) = 2C_1 - 2C_2 = 2C_1 - 2(-C_1) = 4C_1$ に注意すれば，$C_1 > 0$ ならばよいことがわかる．よって，$C_1\ (= -C_2)$ を正の数 A と書き換えることにより，求める解として $y = A(e^{2x} - e^{-2x})$ を得るので，**41** の答えは ② である．

(ii) の微分方程式に対する特性方程式は $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ であり，$\lambda = -2$ なる重解をもつ．これは上の (b) の μ に相当するので，一般解 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ を得る．初期条件 $y(0) = 0$ より $C_1 = 0$ が成り立つ．更に $y' = (C_2 x e^{-2x})' = C_2(e^{-2x} - 2xe^{-2x})$ であるから，$y'(0) = C_2 > 0$ なる不等式も成り立つ．よって，C_2 を正の数 A と書き換えることにより，求める解として $y = Axe^{-2x}$ を得るので，**42** の答えは ④ である．

(iii) の微分方程式に対する特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ であり，$\lambda = -1 \pm 2i$ なる実数でない解をもつ．これは上の (c) の $\alpha \pm i\beta$ に相当するので，一般解 $y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x$ を得る．初期条件 $y(0) = 0$ より $C_1 = 0$ が成り立つ．更に $y' = (C_2 e^{-x} \sin 2x)' = C_2 e^{-x}(-\sin 2x + 2\cos 2x)$ であるから，$y'(0) = 2C_2 > 0$, すなわち $C_2 > 0$ も成り立つ．よって，C_2 を正の数 A と書き換えることにより，求める解として $y = Ae^{-x} \sin 2x$ を得るので，**43** の答えは ⓖ である．

(2) (1) で求めた解の $x > 0$ におけるグラフの概形は，

(i) の場合は $\boxed{\mathbf{44}}$，

(ii) の場合は $\boxed{\mathbf{45}}$，

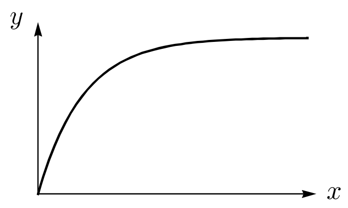
(iii) の場合は $\boxed{\mathbf{46}}$

となる．

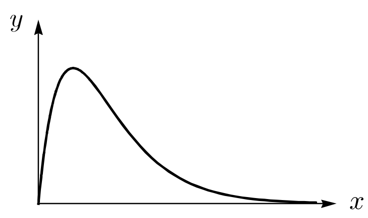
(注意) 解答群中のグラフでは，A の値および x 軸の縮尺はグラフごとに異なる．

$\boxed{44}$ 〜 $\boxed{46}$ の解答群

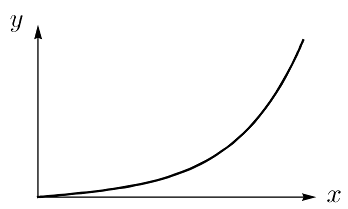
⓪



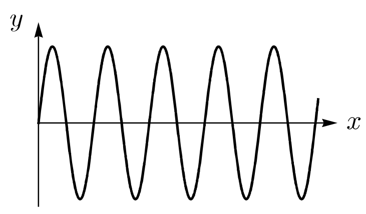
①



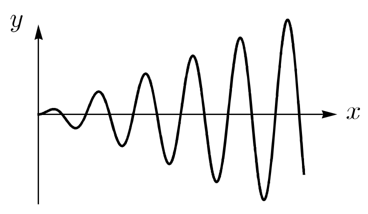
②



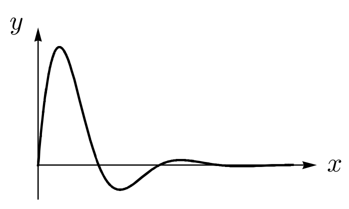
③



④



⑤



解説

(i) $y = A(e^{2x} - e^{-2x})$ のグラフは，x が大きくなればなるほど $y = Ae^{2x}$ のグラフに近づくから，$\boxed{\mathbf{44}}$ の答えとして ② を得る．

(ii) $y = Axe^{-2x} > 0$ が任意の正の数 x について成り立つこと，および

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{A}{2e^{2x}} = 0 \quad \text{(ロピタルの定理を用いた)}$$

であることに気をつければ，$\boxed{\mathbf{45}}$ の答えとして ① を得る．

(iii) $\sin 2x$ が正負どちらの符号も取り得ること，および $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ が

$$0 = \lim_{x\to\infty} (-Ae^{-x}) \leqq \lim_{x\to\infty} Ae^{-x} \sin 2x \leqq \lim_{x\to\infty} Ae^{-x} = 0$$

から導かれることに気をつければ，$\boxed{\mathbf{46}}$ の答えとして ⑤ を得る．

問 4 $y(x), z(x)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = y + 3\,z \\ z' = k\,y \end{cases}$$

を初期条件 $y(0) = 2,\ \ z(0) = 1$ のもとで考える．ただし k は定数とする．

(1) $(*)$ の 2 つの方程式から z を消去し，y に関する単独の 2 階微分方程式を導くと，

$$(**) \qquad y'' - y' - 6\,y = 0$$

となるのは $k = \boxed{\mathbf{47}}$ のときである．$(**)$ に対する初期条件は $y(0) = 2$, $y'(0) = \boxed{\mathbf{48}}$ となる．

$\boxed{47}$ ・ $\boxed{48}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6
	⑦ -1	⑧ -2	⑨ -3	ⓐ -4	ⓑ -5	ⓒ -6

解説

$y' = y + 3z$ を微分したものに $z' = ky$ を代入すると，$y'' = y' + 3z' = y' + 3ky$, すなわち $y'' - y' - 3ky = 0$ となるから，$k = 2$ を得る．したがって，$\boxed{\mathbf{47}}$ の答えは ② である．また，$y'(0) = y(0) + 3z(0) = 5$ であるから，$\boxed{\mathbf{48}}$ の答えは ⑤ である．

(2) 初期条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = $ 48 を満たす方程式 $(**)$ の解は,
$y(x) = \boxed{\mathbf{49}}$ である.

$\boxed{\mathbf{49}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{2}{5}e^{-3x} + \dfrac{8}{5}e^{2x}$　① $\dfrac{1}{5}e^{-3x} + \dfrac{9}{5}e^{2x}$　② $-\dfrac{1}{5}e^{-3x} + \dfrac{11}{5}e^{2x}$

③ $\dfrac{6}{5}e^{3x} + \dfrac{4}{5}e^{-2x}$　④ $\dfrac{7}{5}e^{3x} + \dfrac{3}{5}e^{-2x}$　⑤ $\dfrac{9}{5}e^{3x} + \dfrac{1}{5}e^{-2x}$

解説

$(**)$ の特性方程式は $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ で，その解 λ は 3 と -2 である．$(**)$ の一般解は，問 3(1) の解説の (a) でも述べた通り，任意定数 C_1, C_2 を用いて $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$ と表される．$(y(0) =)\ C_1 + C_2 = 2$ と $(y'(0) =)\ 3C_1 - 2C_2 = 5$ なる連立方程式を解けば，$C_1 = \dfrac{9}{5}, C_2 = \dfrac{1}{5}$ を得る．よって，$\boxed{\mathbf{49}}$ の答えは ⑤ である．

問 5　微分方程式

$$(*) \qquad y'' + 9y = K\cos ax$$

を考える．ここで K, a は定数で，$K \neq 0$，$a > 0$ とする．

(1)　方程式 $(*)$ が $y = A\cos ax$ (A は定数) なる形の特殊解をもつのは，
$a \neq$ $\boxed{\textbf{50}}$ の場合である．このとき，$A =$ $\boxed{\textbf{51}}$ となる．

$\boxed{\textbf{50}}$ **の解答群**

⓪ 3　① 6　② 9　③ 81　④ $\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{6}$

$\boxed{\textbf{51}}$ **の解答群**

⓪ $K(3+a^2)$　① $K(3-a^2)$　② $\dfrac{K}{3+a^2}$　③ $\dfrac{K}{3-a^2}$

④ $K(9+a^2)$　⑤ $K(9-a^2)$　⑥ $\dfrac{K}{9+a^2}$　⑦ $\dfrac{K}{9-a^2}$

解説

$y = A\cos ax$ を $(*)$ に代入すると，等式 $A(-a^2+9)\cos ax = K\cos ax$ を得る．両辺の係数部分を比較すると，a が 3 でない正の数であるとき，$A = \dfrac{K}{9-a^2}$ が成り立つことがわかる．したがって，$\boxed{\textbf{50}}$ の答えは ⓪ であり，$\boxed{\textbf{51}}$ の答えは ⑦ である．

(2)　$a = \boxed{50}$ のとき，方程式 $(*)$ は，関数 $\varphi(x) = \boxed{\mathbf{52}}$ とすると，$y = B\varphi(x)\sin ax$ (B は定数) なる形の特殊解をもつ．

52 **の解答群**

⓪ e^{-ax}　① e^{ax}　② $\cos ax$　③ $\cos a^2 x$　④ x　⑤ x^2

解説

$a = 3$ とした $(*)$ に $y = B\varphi(x)\sin 3x$ を代入すると

$$B\varphi''\sin 3x + 6B\varphi'\cos 3x = K\cos 3x$$

を得る．これは，関数 $\varphi(x)$ と定数 B が $B\varphi'' = 0$ および $6B\varphi' = K$ を満たすことを意味する．$6B\varphi' = K \neq 0$ より $B = 0$ はありえないので，$B\varphi'' = 0$ は $\varphi'' = 0$ とできる．これを満たす $\varphi(x)$ の候補は，解答群の中では x しかない．そこで，$\varphi(x) = x$ とすると，$B = \dfrac{K}{6}$ であるとき，$6B\varphi' = K$ が成り立つことが確かめられる．よって，$\boxed{\mathbf{52}}$ の答えは ④ である．

(3)　$(*)$ において $K = 6$，$a = 3$ とおいた方程式

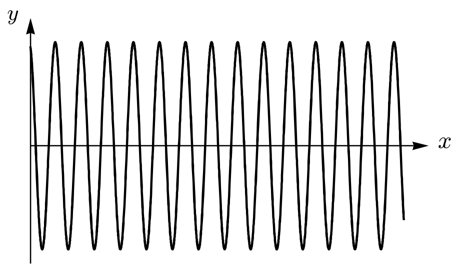
$$y'' + 9y = 6\cos 3x$$

を初期条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = -1$ のもとで考える．このとき解の $x \geqq 0$ におけるグラフの概形は $\boxed{\mathbf{53}}$ である．

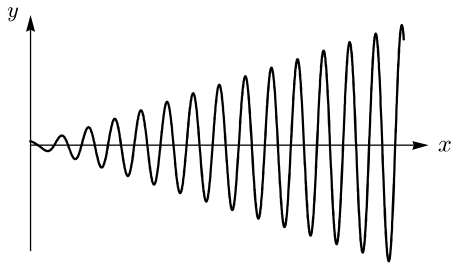
（注意）解答群中のグラフでは，y 軸の縮尺はグラフごとに異なる．

$\boxed{\textbf{53}}$ **の解答群**

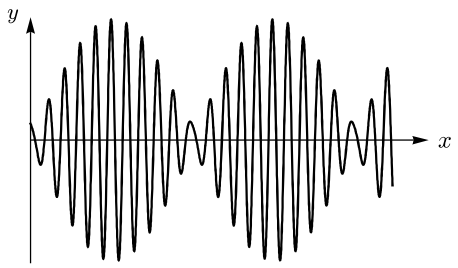
⓪



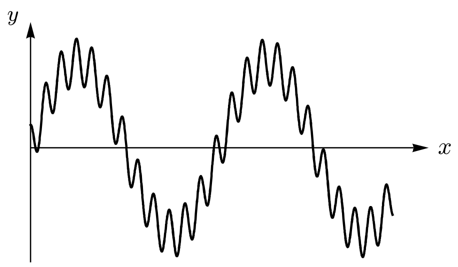
①



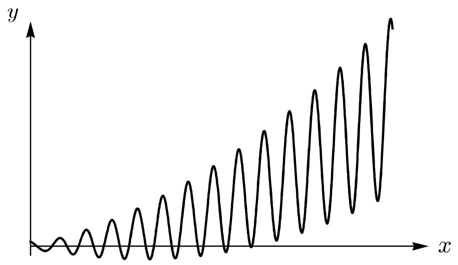
②



③



④



解説

$K = 6,\ a = 3$ とした $(*)$ の一般解は，$(*)$ に対応する同次方程式 $z'' + 9z = 0$ の一般解 $z = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$（問 3(1) の解説の (c) を参照）と (2) で得られた特殊解 $\dfrac{K}{6} x \sin 3x = x \sin 3x$ の和で表される．

$y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ が成り立つように C_1, C_2 を定めると

$$\begin{aligned} y &= \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x + x \sin 3x \\ &= \frac{\sqrt{10}}{3} \sin(3x + \theta) + x \sin 3x \\ &\qquad \left(\text{ただし } \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}},\ \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \end{aligned}$$

を得る．式中の $x \sin 3x$ の各 $x\ (> 0)$ における値は $-x$ 以上 x 以下の範囲にあるから，x が $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ より十分に大きいとき，y の変動は $x \sin 3x$ の変動とほぼ同じとみなせる．このことを考慮すれば，$\boxed{\mathbf{53}}$ の答えとして ① を得る．

第4分野　確率・統計

〔問1〜問5：解答番号 $\boxed{??}$ 〜 $\boxed{??}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$, $D(X)$ はそれぞれ X の期待値 (平均，平均値)，分散，標準偏差を表す．$\emptyset$ は空事象を表す．

問1 (1) 確率変数 X の確率分布が，

X の値	0	10	20	30
確率	a	b	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

（a, b は定数）

で与えられている．このとき，$E(X)=10$ ならば $b=\boxed{54}$ であり，$V(X)=\boxed{55}$ である．

$\boxed{54}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{1}{4}$　⑥ $\frac{3}{4}$　⑦ $\frac{1}{5}$　⑧ $\frac{2}{5}$　⑨ $\frac{3}{5}$　ⓐ $\frac{4}{5}$

ⓑ $\frac{1}{10}$　ⓒ $\frac{3}{10}$　ⓓ $\frac{7}{10}$　ⓔ $\frac{9}{10}$

$\boxed{55}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ 10　⑦ 20　⑧ 30　⑨ 40　ⓐ 50

ⓑ 100　ⓒ 200　ⓓ 300　ⓔ 400　ⓕ 500

(2) 確率変数 X の期待値と分散が $E(X)=2$, $V(X)=1$ であるとする．いま確率変数 Y が X と同じ確率分布に従っているとき, $\boxed{\textbf{56}}$.

$\boxed{\textbf{56}}$ **の解答群**

⓪ $E(Y)$ も $V(Y)$ も定まらない

① $V(Y)=1$ とは限らないが, $E(Y)=2$ である

② $E(Y)=2$ とは限らないが, $V(Y)=1$ である

③ $E(Y)=2$, $V(Y)=1$ である

解説

(1) （離散型）確率変数の期待値の定義から,

$$E(X)=0\cdot a+10b+20\cdot\frac{1}{5}+30\cdot\frac{1}{10}=10b+7$$

となり, $E(X)=10$ から, $b=\frac{3}{10}$ を得る．また,

$$E(X^2)=0^2\cdot a+10^2\cdot b+20^2\frac{1}{5}+30^2\cdot\frac{1}{10}=200$$

であるから, 公式 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ を用いて,

$$V(X)=200-10^2=100$$

となる． $\boxed{\textbf{54}}$, $\boxed{\textbf{55}}$ の答えは順に, ⓒ, ⓑとなる．

(2) 確率変数が異っても, 確率分布が等しければ分布関数などはすべて同一となる．言い換えれば, 確率分布によって期待値, 分散など分布を特徴づけるパラメータは決定される．したがって, この問題では, $E(Y)=2, V(Y)=1$ となり, $\boxed{\textbf{56}}$ の答えは③である．

問 2　2 つの事象 A, B に対し，$P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$ とする．また，事象 A が起こったときの事象 B の起こる条件付き確率を $P(B\,|\,A)$ で表すとき，$P(B\,|\,A)=\dfrac{1}{6}$ であるとする．

(1)　A と B は $\boxed{\mathbf{57}}$．

(2)　$P(A\cap B)=\boxed{\mathbf{58}}$，$P(A\cup B)=\boxed{\mathbf{59}}$ である．

(3)　事象 C が $P(C)=\dfrac{1}{2}$ かつ $A\cap B\subset C$ を満たすとき，$P(A\cap B\,|\,C)=\boxed{\mathbf{60}}$ である．

$\boxed{57}$ の解答群

⓪ 独立である　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

$\boxed{58}$ 〜 $\boxed{60}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{1}{3}$	④ $\dfrac{2}{3}$	
⑤ $\dfrac{1}{4}$	⑥ $\dfrac{3}{4}$	⑦ $\dfrac{1}{5}$	⑧ $\dfrac{2}{5}$	⑨ $\dfrac{3}{5}$	ⓐ $\dfrac{4}{5}$
ⓑ $\dfrac{1}{6}$	ⓒ $\dfrac{5}{6}$	ⓓ $\dfrac{1}{12}$	ⓔ $\dfrac{5}{12}$	ⓕ $\dfrac{7}{12}$	ⓖ $\dfrac{11}{12}$

解説

2 つの事象の独立性に関する問題である．2 つの事象 A, B は，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ が成り立つとき独立であり，そうでないとき従属である．また，$P(A)\neq 0$ のとき，A と B が互いに独立であることと，$P(B)=P(B|A)$ は同値となる．(1) 題意から，$P(B)\neq P(B|A)$ であるので，A と B は独立ではない．$\boxed{\mathbf{57}}$ の答えは ①となる．

(2) 条件付き確率の定義から，

$$P(A\cap B)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

である．また，加法定理を用いて．

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

となる． $\boxed{\textbf{58}}$, $\boxed{\textbf{59}}$ の答えは順に，ⓓ, ⑥となる．

(3) 条件付き確率の定義より，

$$P(A \cap B | C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

となり，題意から，$P(C) = \dfrac{1}{2}$, $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \dfrac{1}{12}$ であるから，

$$P(A \cap B | C) = \frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6}$$

である． $\boxed{\textbf{60}}$ の答えは ⓑとなる．

問 3 (1) 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & (0 \leqq x < 1) \\ \dfrac{5}{6} & (1 \leqq x < 2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で与えられている．このとき，$P(X \leqq x) = \dfrac{1}{2}$ を満たすのは $x = \boxed{\textbf{61}}$ である．また，$E(X) = \boxed{\textbf{62}}$，$V(X) = \boxed{\textbf{63}}$ である．

61 〜 63 の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ $\dfrac{3}{2}$	⑤ $\dfrac{1}{3}$
⑥ $\dfrac{2}{3}$	⑦ $\dfrac{4}{3}$	⑧ $\dfrac{5}{3}$	⑨ $\dfrac{1}{5}$	ⓐ $\dfrac{2}{5}$	ⓑ $\dfrac{6}{5}$
ⓒ $\dfrac{7}{5}$	ⓓ $\dfrac{1}{9}$	ⓔ $\dfrac{2}{9}$	ⓕ $\dfrac{10}{9}$	ⓖ $\dfrac{11}{9}$	

(2) 確率変数 Y が区間 $[0, a]$ 上の一様分布に従っているとする．このとき，$P(0 \leqq Y \leqq 1) = \dfrac{1}{6}$ とすると，$a = \boxed{\textbf{64}}$ で，

$$P(2 \leqq Y \leqq 4) = \boxed{\textbf{65}}$$

である．

64 ・ 65 の解答群

⓪ 0	① $\dfrac{1}{6}$	② $\dfrac{1}{5}$	③ $\dfrac{1}{4}$	④ $\dfrac{1}{3}$	⑤ $\dfrac{1}{2}$	
⑥ 1	⑦ 2	⑧ 3	⑨ 4	ⓐ 5	ⓑ 6	ⓒ 7

解説

(1) $P(X \leqq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ で，$P(X \leqq 1) = \dfrac{1}{6}$ に注意すると，$P(X \leqq x) = \dfrac{1}{2}$ を満たす x は $1 < x < 2$ である．したがって，

$$\frac{1}{2} = P(X \leqq x) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}(x-1)$$

を解いて，$x = \dfrac{7}{5}$ を得る． $\boxed{\textbf{61}}$ の答えは ⓒとなる．

また，

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{1} \frac{x}{6}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{5x}{6}\,dx = \frac{4}{3},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{6}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{5x^2}{6}\,dx = 2$$

から，公式 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ を用いて，$V(X) = 2 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{9}$ を得る． $\boxed{\textbf{62}}$, $\boxed{\textbf{63}}$ の答えは順に ⑦, ⓔとなる．

(2) 一般に，確率変数 Y が区間 $[0, a]$ 上の一様分布に従っているとき，確率 $P(c \leqq Y \leqq d)$, $0 \leqq c < d \leqq 1$ の値は，全区間 $[0, a]$ に対する区間 $[c, d]$ の長さの比に等しいことに注意すると，$P(0 \leqq Y \leqq 1) = \dfrac{1}{a}$ であるから，題意より $a = 6$ を得る．また，$P(2 \leqq Y \leqq 4) = \dfrac{1}{3}$ である． $\boxed{\textbf{64}}$, $\boxed{\textbf{65}}$ の答えは順に ⓑ, ④となる．

問 4 A 大学の U 教授の研究室では，毎年生物実験用の魚の一種を飼育している．今年は昨年までよりも栄養の豊かな環境で飼育したため，体長が大きくなることが予想される．今までの経験から，この魚の体長は正規分布に従い，昨年までの体長の母平均は 5.90 cm で，さらに体長の母分散は飼育環境によって変化はなく，1.17^2 cm^2 と仮定してよいことがわかっている．今年成魚になった魚のうち，100 匹 を選び，これらの体長を測定したところ，標本平均値は 6.10 cm であった．

今年の魚の体長について，母平均 μ の変化を調べるために，μ に対する片側検定を行うことにし，$\mu_0 = 5.90,\ \ \sigma^2 = 1.17^2,\ \ \overline{x} = 6.10,\ \ n = 100$ とおき

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$,

対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$

と設定する．選び出した 100 匹の魚の体長を表す確率変数をそれぞれ $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とすると，これらはすべて独立で平均 μ, 分散 1.17^2 の正規分布 $N(\mu,\ 1.17^2)$ に従っている．したがって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

は平均 $\boxed{\textbf{66}}$，分散 $\boxed{\textbf{67}}$ の $\boxed{\textbf{68}}$ に従う．帰無仮説 H_0 のもとでは，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 5.90}{1.17/\sqrt{100}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従い，正規分布表から，

$$P(-1.64 < Z < 1.64) \fallingdotseq 0.9$$

がわかる．この式から，$1.64 \times \dfrac{1.17}{\sqrt{100}} \fallingdotseq 0.192$ に注意すると，

$$P(\overline{X} - 5.90 \geqq 0.192) \fallingdotseq \boxed{\textbf{69}}$$

となる．一方，$\overline{x}$ は，

$$\overline{x} - 5.90 = 6.10 - 5.90 > 0.192$$

を満たすので，H_0 は有意水準 $\boxed{\textbf{70}}$ % で $\boxed{\textbf{71}}$．

66 ・ **67** の解答群

⓪ $\frac{\mu}{100}$　① 100μ　② μ　③ 100×1.17

④ 1.17^2　⑤ 100×1.17^2　⑥ $100^2 \times 1.17^2$　⑦ $\frac{1.17^2}{100}$　⑧ $\frac{1.17^2}{100^2}$

68 の解答群

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布

④ 指数分布　⑤ t 分布

69 の解答群

⓪ 0　① 0.05　② 0.1　③ 0.15　④ 0.2　⑤ 0.25

⑥ 0.75　⑦ 0.8　⑧ 0.85　⑨ 0.9　ⓐ 0.95

70 の解答群

⓪ 0　① 5　② 10　③ 20　④ 30　⑤ 40

⑥ 60　⑦ 70　⑧ 80　⑨ 90　ⓐ 95

71 の解答群

⓪ 棄却される　① 採択される

解説

一般に，正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っている独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対し，

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$$

であるから，題意より $\overline{X}$ は $E(\overline{X}) = \mu, V(\overline{X}) = \dfrac{1.17^2}{100}$ である正規分布に従う．ただし，期待値と分散の値は，$E(X_k) = \mu, V(X_k) = 1.17^2$ と独立性から，

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \mu,$$

$$V(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1.17^2}{100}$$

としても求められる．$\boxed{\textbf{66}}$ 〜 $\boxed{\textbf{68}}$ の答えは順に ②, ⑦, ③となる．

また，$P(-1.64 < Z < 1.64) \fallingdotseq 0.9$ から，$P(Z \geqq 1.64) \fallingdotseq 0.05$ であるから，

$$P\left(\frac{\overline{X} - 5.90}{1.17/\sqrt{100}} \geqq 1.64\right) \fallingdotseq 0.05$$

を得る．$\boxed{\textbf{69}}$ の答えは①となる．一方，$\overline{x} - 5.90 > 0.192$ であるから，帰無仮説 H_0 は有意水準 5% で棄却され，今年は体長が大きくなったと判断される．$\boxed{\textbf{70}}$，$\boxed{\textbf{71}}$ の答えは順に ①, ⓪となる．