EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2015年12月12日（土）
4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊受験分野は，各大学の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと．

(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(8) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(9) 問題冊子は持ち帰ること．

(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること．

(11) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\mathbf{23}}$ は $\left(\boxed{\mathbf{23}}\right)$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{17}$ 〕

(注意) $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1}x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問１　(1)　次の 2 つの極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\tan^{-1}x - \dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}} = \boxed{2}$$

$\boxed{1}$ ・ $\boxed{2}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ π	⑤ $\dfrac{\pi}{2}$
⑥ ∞	⑦ -1	⑧ -2	⑨ $-\dfrac{1}{2}$	ⓐ $-\pi$	ⓑ $-\dfrac{\pi}{2}$
ⓒ $-\infty$					

解説

まず，1 つ目の極限は

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)-\log 1}{x-0}$$

と書ける．これは，関数 $\log(1+2x)$ の $x=0$ における微分係数を表している．したがって，$\{\log(1+2x)\}' = \dfrac{2}{1+2x}$ に $x=0$ を代入すればよく，その値は 2 であるから，$\boxed{1}$ の答えは ② である．

次に，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ であることより，2 つ目の極限は，いわゆる $\dfrac{0}{0}$ 型の極限であり，ロピタルの定理が使えることがわかる．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{2}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}$$

であり，その値は -1 であるから，$\boxed{2}$ の答えは ⑦ である．

(2)　関数 $(1-x)e^x$ のマクローリン展開（$x=0$ を中心とするテイラー展開）を

$$(1-x)e^x = 1 + a\,x + b\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3 + \cdots$$

とするとき，$a=$ $\boxed{\textbf{3}}$，$b=$ $\boxed{\textbf{4}}$ である．

$\boxed{\textbf{3}}$ ・ $\boxed{\textbf{4}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ $\frac{1}{2}$
⑥ $\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{2}{3}$	⑧ $\frac{1}{4}$	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ $-\frac{1}{2}$	ⓔ $-\frac{1}{3}$	ⓕ $-\frac{2}{3}$	ⓖ $-\frac{1}{4}$	

解説

一般に，関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \cdots$$

と表される．$f(x)=(1-x)e^x$ とすれば，

$$f'(x) = -xe^x, \quad f''(x) = -(1+x)e^x, \quad f'''(x) = -(2+x)e^x, \quad \ldots$$

と計算でき，$f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=-2, \ldots$ となるので，

$$f(x) = 1 + 0\,x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

を得る．よって，$\boxed{\textbf{3}}$，$\boxed{\textbf{4}}$ の答えはそれぞれ ⓪, ⓓ である．

また，別の解法として，e^x のマクローリン展開

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

とそれに x を掛けたもの

$$xe^x = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots$$

との差をとって，

$$(1-x)e^x = 1 + 0\,x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

を得る方法もある．

問 2　xy 平面において，方程式

$$(*)\qquad \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{4} \qquad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3},\quad 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{3} \right)$$

が表す曲線 C を考える.

(1)　曲線 C は点 P $\left(\frac{\pi}{6},\ \boxed{\mathbf{5}}\right)$ を通る.

(2)　y を x の関数とみなし，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を y' で表すとき，$\dfrac{d}{dx}\sin^2 y = \boxed{\mathbf{6}}$ である.

(3)　方程式 $(*)$ の両辺を x で微分し，(2) の結果を用い，さらに $(x, y) = \left(\frac{\pi}{6},\ \boxed{\mathbf{5}}\right)$ を代入すると，点 P における曲線 C の接線の傾き $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\mathbf{7}}$ を得る.

$\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{3}$	④ $\frac{1}{4}$	⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
⑥ $\frac{\pi}{3}$	⑦ $\frac{\pi}{4}$	⑧ $\frac{\pi}{6}$	⑨ $\frac{\pi}{8}$	ⓐ $\frac{\pi}{12}$	ⓑ $\frac{\pi}{24}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ の解答群

⓪ $\sin^2 y'$	① $\cos^2 y'$	② $2\,y' \sin y$
③ $2\,y' \cos y$	④ $y' \sin^2 y$	⑤ $y' \cos^2 y$
⑥ $2\,y' \sin y\, \cos y$	⑦ $2\,y' \sin^{-1} y$	⑧ $2\,y' \cos^{-1} y$

$\boxed{\mathbf{7}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\sqrt{3}$	④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	⑥ $\frac{1}{\sqrt{2}}$	⑦ $\frac{1}{\sqrt{3}}$	⑧ -1	⑨ -2
ⓐ $-\sqrt{3}$	ⓑ $-\frac{1}{2}$	ⓒ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	ⓓ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$	ⓔ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

解説

(1) 方程式 $(*)$ に $x=\dfrac{\pi}{6}$ を代入すると，$\dfrac{3}{4}-\sin^2 y=\dfrac{1}{4}$ となるから，$\sin^2 y=\dfrac{1}{2}$ である．y の範囲 $0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{3}$ から $\sin y \geqq 0$ であることがわかるので，$\sin y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る．したがって，点 P の y 座標は $\dfrac{\pi}{4}$ であり，$\boxed{\mathbf{5}}$ の答えは ⑦ である．

(2) まず，$\sin^2 y$ を y で微分したときは，

$$\frac{d}{dy}\sin^2 y=\frac{d\,(\sin y)^2}{d\,\sin y}\frac{d\,\sin y}{dy}=2\sin y\cos y$$

となる．これに注意し，問題のように $\sin^2 y(x)$ を x で微分すれば，

$$\frac{d}{dx}\sin^2 y=\frac{d\,\sin^2 y}{dy}\frac{dy}{dx}=2y'\sin y\cos y$$

となるから，$\boxed{\mathbf{6}}$ の答えは ⑥ である．

(3) 方程式 $(*)$ の両辺を x で微分しよう．「(2) の結果を用い」とあるので，x に関する微分は偏微分ではなく，常微分であることがわかるはずである．実際に微分すると，

$$-2\cos x\sin x-2y'\sin y\cos y=0$$

を得る．これに $x=\dfrac{\pi}{6}$ と $y=\dfrac{\pi}{4}$ を代入すると，

$$-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0 \quad \text{すなわち}\quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

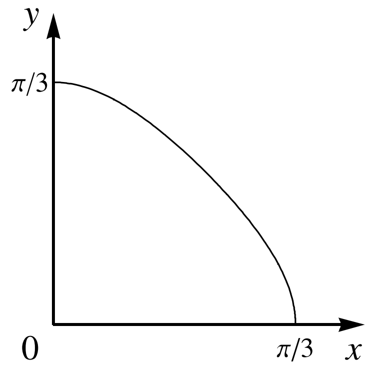
となる．したがって，$\boxed{\mathbf{7}}$ の答えは ⓒ である．

別の解法として，陰関数定理を $F(x,y)=\cos^2 x-\sin^2 y$ に適用し，

$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\dfrac{\pi}{6},\,\dfrac{\pi}{4}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\dfrac{\pi}{6},\,\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\frac{-2\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{6}}{-2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

とする方法もある．

参考のため，曲線 C のグラフを描くと下図のようになる．



問 3　広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ の値を求める.

(1)　$0 < a < \dfrac{1}{2}$ を満たす a に対して

$$J(a) = \int_a^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$$

とおく．このとき，$t = x - 1$ とおくことにより，

$$J(a) = \boxed{\mathbf{8}} - \sin^{-1} \boxed{\mathbf{9}}$$

を得る.

$\boxed{\mathbf{8}}$ の解答群

⓪ 0	① π	② $\dfrac{\pi}{2}$	③ $\dfrac{3\pi}{2}$	④ $\dfrac{\pi}{3}$
⑤ $\dfrac{5\pi}{3}$	⑥ $\dfrac{\pi}{4}$	⑦ $\dfrac{7\pi}{4}$	⑧ $\dfrac{\pi}{6}$	⑨ $\dfrac{11\pi}{6}$
ⓐ $-\pi$	ⓑ $-\dfrac{\pi}{2}$	ⓒ $-\dfrac{\pi}{3}$	ⓓ $-\dfrac{\pi}{4}$	ⓔ $-\dfrac{\pi}{6}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ の解答群

⓪ a	① $2a$	② $a+1$	③ $a+2$
④ $a-1$	⑤ $a-2$	⑥ $1-a$	⑦ $2-a$
⑧ $2(a+1)$	⑨ $2(a-1)$	ⓐ $2(1-a)$	ⓑ $a(2-a)$

(2)　(1) の結果を用いると，$I = \lim_{a \to +0} J(a) = \boxed{\mathbf{10}}$ が導かれる．

$\boxed{\mathbf{10}}$ の解答群

⓪ 0	① π	② $\frac{\pi}{2}$	③ $\frac{\pi}{3}$	④ $\frac{7\pi}{3}$
⑤ $\frac{\pi}{4}$	⑥ $\frac{9\pi}{4}$	⑦ $\frac{\pi}{6}$	⑧ $\frac{13\pi}{6}$	⑨ $-\frac{\pi}{2}$
ⓐ $-\frac{\pi}{3}$	ⓑ $-\frac{2\pi}{3}$	ⓒ $-\frac{\pi}{4}$	ⓓ $-\frac{3\pi}{4}$	ⓔ $-\frac{\pi}{6}$
ⓕ $-\frac{5\pi}{6}$	ⓖ ∞	ⓗ $-\infty$		

解説

(1)　$t = x - 1$ であるから，$x(2-x) = (1+t)(1-t) = 1 - t^2$ である．また，積分区間 $a \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ を t で表せば，$a - 1 \leqq t \leqq -\frac{1}{2}$ となる．したがって，

$$J(a) = \int_{a-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \Big[\ \sin^{-1} t\ \Big]_{a-1}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{6} - \sin^{-1}(a-1)$$

を得るので，$\boxed{\mathbf{8}}$，$\boxed{\mathbf{9}}$ の答えは，それぞれ ⓔ, ④ である．

(2)　$\lim_{a \to +0} \sin^{-1}(a-1) = \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$ であるから，

$$I = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

を得る．ゆえに，$\boxed{\mathbf{10}}$ の答えは ③ である．

問 4　xyz 空間において，

$$z = 5x^3 + 4x^2y - 6xy^2 + y^3$$

で与えられる曲面 S を考える．

(1)　点 A $(1, 2,$ $\boxed{\mathbf{11}}$ $)$ は曲面 S 上の点である．

(2)　点 A において，曲面 S に接する平面 T は，方程式

$$z - \boxed{\mathbf{11}} = \boxed{\mathbf{12}}\,(x-1) + \boxed{\mathbf{13}}\,(y-2)$$

で与えられる．

(3)　接平面 T 上において，点 A と異なる点 Q (x, y, z) をとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z - \boxed{\mathbf{11}} \end{pmatrix}$$

は接平面 T に平行なベクトルである．一方，ベクトル

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{12}} \\ \boxed{\mathbf{13}} \\ \boxed{\mathbf{14}} \end{pmatrix}$$

は $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と直交するので，接平面 T の法線ベクトルである．

$\boxed{\mathbf{11}}$ ～ $\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

解説

(1) 曲面 S の方程式に $x=1$, $y=2$ を代入すると，$z=5+8-24+8=-3$ となるので，$\boxed{\mathbf{11}}$ の答えは ⓑ である．

(2) 一般に，方程式 $z=f(x,y)$ が表す曲面上において，点 $(a,b,f(a,b))$ での接平面は

$$z-f(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)$$

なる方程式で与えられる．これを

$$f(x,y)=5x^3+4x^2y-6xy^2+y^3 \quad \text{および} \quad (a,b,f(a,b))=(1,2,-3)$$

の場合に考えると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=15x^2+8xy-6y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=15+16-24=7$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4x^2-12xy+3y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=4-24+12=-8$$

であることより，接平面 T の方程式として

$$z+3=7(x-1)-8(y-2)$$

を得る．したがって，$\boxed{\mathbf{12}}$，$\boxed{\mathbf{13}}$ の答えは，それぞれ ⑦, ⓖ である．

(3) 上で得られた接平面 T の方程式は，

$$7(x-1)-8(y-2)-(z+3)=0 \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix}7\\-8\\-1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$$

と書ける．よって，$\boxed{\mathbf{14}}$ の答えは ⑨ である．

問 5　累次積分 $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx \right) dy$ の値を求める．

集合 D を

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leqq y \leqq 1,\ \ y \leqq x \leqq 1 \right\}$$

とすると，それは

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq 1,\ \ \boxed{\mathbf{15}} \leqq y \leqq \boxed{\mathbf{16}} \right\}$$

とも表される．このことより

$$I = \iint_D e^{-x^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\boxed{\mathbf{15}}}^{\boxed{\mathbf{16}}} e^{-x^2} dy \right) dx = \boxed{\mathbf{17}}$$

を得る．

$\boxed{\mathbf{15}}$ ・ $\boxed{\mathbf{16}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② e	③ $\dfrac{1}{e}$	④ x	⑤ $\dfrac{1}{x}$
⑥ $\sqrt{x}$	⑦ e^{-x^2}	⑧ y	⑨ $\dfrac{1}{y}$	ⓐ $\sqrt{y}$	ⓑ e^{-y^2}

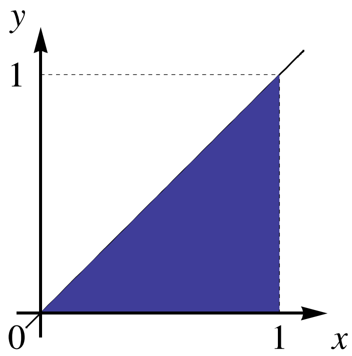
$\boxed{\mathbf{17}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $e-1$
③ $1-e$	④ e^2-1	⑤ $1-e^2$
⑥ $\dfrac{1}{e}-1$	⑦ $1-\dfrac{1}{e}$	⑧ $\dfrac{1}{e^2}-1$
⑨ $1-\dfrac{1}{e^2}$	ⓐ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e}-1\right)$	ⓑ $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$
ⓒ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e^2}-1\right)$	ⓓ $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e^2}\right)$	

解説

不等式 $0 \leqq y \leqq 1$ および $y \leqq x \leqq 1$ を満たす x と y の大小関係を数直線を用いて表すと

となり，ひとまとめに $0 \leqq y \leqq x \leqq 1$ と書ける．これにより定まる xy 平面上の集合 D は，正方形の形をした集合 $\{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ のうち，x 座標の方が y 座標より大きいか等しい場所である (下図の着色部分).



再び上の数直線に戻り，条件 $0 \leqq y \leqq x \leqq 1$ を考えると，それは $0 \leqq x \leqq 1$ および $0 \leqq y \leqq x$ に分離できることがわかる．(まず x を 0 と 1 の間に定め，その後に y を 0 と x の間にとればよい)　したがって，$\boxed{\textbf{15}}$，$\boxed{\textbf{16}}$ の答えは，それぞれ ⓪, ④ である．

積分 I を計算すると，

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 e^{-x^2} \left(\int_0^x dy \right) dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$$

となり，$t = -x^2$ とおいて更に計算を進めると，

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^{-1} e^t dt = -\frac{1}{2} \Big[e^t \Big]_0^{-1} = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

を得る．したがって，$\boxed{\textbf{17}}$ の答えは ⓑ である．

第２分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{18}}$ 〜 $\boxed{\textbf{33}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\mathrm{rank}\,A$ は A の階数（ランク）を表す．また，1 次独立，1 次従属はそれぞれ線形独立，線形従属ともいう．

問 1　行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(1)　行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\textbf{18}}$ である．

(2)　行列式 $|A|$ を第 2 行に関して余因子展開すると，

$$|A| = \boxed{\textbf{19}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

となる．

$\boxed{\textbf{18}}$ ・ $\boxed{\textbf{19}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

解説

(1) 2 次や 3 次行列式と違い，4 次行列式の値の計算には，たすき掛けやサラスの方法のような簡単な方法はなく，行列式の性質

- ある行 (または列) の何倍かしたものを他の行 (または列) に加えても，行列式の値は変わらない．
- 2 つの行 (または列) どうしを入れ替えると，行列式の値は -1 倍になる．
- 上三角行列 (対角成分よりも下側の成分がすべて 0 の行列) の行列式の値は，対角成分の積に等しい．

を利用するのが一般的である．実際に A に対して実行すると，

$$|A| \quad = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{第 1 行の }-1\text{ 倍を第 3, 4 行に加えた}} = \underbrace{-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{第 2 行と第 3 行を入れ替えた}}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{第 3 列と第 4 列を入れ替えた}} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{第 3 行の }-1\text{ 倍を第 4 行に加えた}} = 3$$

が得られるので， $\boxed{\textbf{18}}$ の答えは ③ である．

(2) A の (i,j) 成分を a_{ij} で表し，A の (i,j) 余因子を $\hat{A}_{ij}$ で表す．なお，$\hat{A}_{ij}$ は，A から 第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる 3 次正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けた値で定義される．このとき，$|A|$ の第 2 行に関する余因子展開は，

$$\begin{aligned} |A| &= a_{21}\hat{A}_{21} + a_{22}\hat{A}_{22} + a_{23}\hat{A}_{23} + a_{24}\hat{A}_{24} \\ &= 0 + 0 + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad (= -2 \cdot 3 + 9 = 3) \end{aligned}$$

となる．したがって， $\boxed{\textbf{19}}$ の答えは ⓐ である．なお，この答えは，余因子展開を忘れてしまった場合でも，(1) の結果 ($|A| = 3$) から逆算できるように配慮されている．

問 2　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -4 \\ -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

に対し，$a =$ **20**，$b =$ **21** であるとき，$(AB)^{-1} = C$ が成り立つ．

20 ・ **21** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

解説

まず，積 AB を計算すると，

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る．この行列 AB の逆行列が行列 C に等しいということは，AB と C の積が単位行列になるということである．ABC を計算すると，

$$ABC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ (a-1)b & 2a-1 & 0 \\ b+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，これが単位行列になるのは，$a = 1,\ b = -1$ のときである．よって，$\boxed{\textbf{20}}$，$\boxed{\textbf{21}}$ の答えは，それぞれ ①, ⑨ である．

別の解法として，$(AB)^{-1}$ を掃き出し法や余因子を用いる方法で計算し，C と比較する方法もある．実際に計算すると，

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \dfrac{a-1}{2a-1} & \dfrac{1}{2a-1} & 0 \\ \dfrac{-1}{2a-1} & \dfrac{2}{2a-1} & 0 \end{pmatrix}$$

となるが，これが C に等しくなるのは $a = 1, b = -1$ のときである．また，C^{-1} を計算し，AB と比較してもよい．

問 3　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，3 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を考える．

(1)　θ を定数とし，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ は $\boxed{\mathbf{22}}$．

(2)　p, q, r を正の定数とし，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{q}{p} \\ \dfrac{r}{p} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \dfrac{p}{q} \\ 1 \\ \dfrac{r}{q} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \dfrac{p}{r} \\ \dfrac{q}{r} \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ は $\boxed{\mathbf{23}}$．このとき，$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ が張る $\mathbb{R}^3$ の部分空間の次元は $\boxed{\mathbf{24}}$ である．

$\boxed{\mathbf{22}}$・$\boxed{\mathbf{23}}$ の解答群

⓪ 1 次独立であり，どの 2 つのベクトルも互いに直交する

① 1 次独立であり，どの 2 つのベクトルも互いに直交しない

② 1 次従属であり，どの 2 つのベクトルも互いに直交する

③ 1 次従属であり，どの 2 つのベクトルも互いに直交しない

$\boxed{\mathbf{24}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 6　⑥ 9

解説

ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ に対し，$a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ を満たす定数 a,b,c が $a=b=c=0$ 以外に存在するとき,「$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$ は 1 次従属である」といい，$a=b=c=0$ しか存在しないとき,「$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$ は 1 次独立である」という．この定義を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ のいずれもゼロベクトルでない場合に幾何学的に言い換えると $\cdots$ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ が同一平面に平行ならば 1 次従属，そのような平面が存在しないならば 1 次独立である $\cdots$ となる．

(1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ のどの 2 つのベクトルも互いに直交することは，内積をとることにより容易にわかる．この場合，3 つのベクトルが同一平面に平行となることはないので，$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$ は 1 次独立である．よって，$\boxed{\textbf{22}}$ の答えは ⓪ である．

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ の間には

$$\boldsymbol{y}=\frac{p}{q}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{z}=\frac{q}{r}\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x}=\frac{r}{p}\boldsymbol{z}$$

すなわち

$$p\boldsymbol{x}-q\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0},\quad q\boldsymbol{y}-r\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0},\quad r\boldsymbol{z}-p\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

という関係がある．したがって，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ のどの 2 つも互いに平行なベクトルであり，それらは無数の平面と平行であるから (あるいは，$a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ を満たす定数 a,b,c が $(a,b,c)=(p,-q,0)$, $(0,q,-r)$, $(-p,0,r)$ と存在するから)，1 次従属である．よって，$\boxed{\textbf{23}}$ の答えは ③ である．

また，$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$ が張る部分空間は直線となり，その次元は 1 である．よって，$\boxed{\textbf{24}}$ の答えは ① である．

問 4　a を定数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}$$

とする．また，A に第 4 列として $\boldsymbol{b}$ を追加した行列を

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & a \end{pmatrix}$$

とおく．

(1)　$a \neq$ $\boxed{\textbf{25}}$ のとき，$\mathrm{rank}\,A < \mathrm{rank}\,B =$ $\boxed{\textbf{26}}$ であり，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は存在しない．

(2)　$a =$ $\boxed{\textbf{25}}$ のとき，$\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,B =$ $\boxed{\textbf{27}}$ であり，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{28}} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ \boxed{\textbf{29}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

と表される無数の解をもつ．

$\boxed{\textbf{25}}$ ～ $\boxed{\textbf{29}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

解説

行列の階数 (ランク) は，与えられた行列に「行基本操作」と呼ばれる 3 つの操作

- 1 つの行に 0 でない数を掛ける
- 1 つの行の何倍かしたものを別の行に加える
- 2 つの行を入れ替える

を繰り返し行い，左下方にそれ以上 0 を増やせない状態に変形したとき，1 行すべて 0 とはなっていない行の個数で定義される．すなわち，行基本操作は階数を保つ変形といえる．

行列 B に行基本操作を行うと

$$B \xrightarrow[\text{を第 3 行に加える}]{\substack{\text{第 1 行の } -2 \text{ 倍} \\ \text{を第 2 行に加え，} \\ \text{第 1 行の } -1 \text{ 倍}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を第 3 行に加える}]{\text{第 2 行の 1 倍}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

となる．以降，最後の行列を C とおく．この行列 B から行列 C への変形で，第 4 列を無視すると，行列 A の行基本操作による変形と同じものとなる．したがって，$\operatorname{rank} A = 2$ であり，それが $\operatorname{rank} B$ $(= \operatorname{rank} C)$ と等しいか否かは，行列 C の $(3, 4)$ 成分 $a + 2$ が 0 か否かで決まることがわかる．

また，行列 B が行基本操作で行列 C に変形されるということは，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，すなわち $\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 5 \\ x - 3y + 4z = a \end{cases}$ が辺々の足し算や定数倍により $\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y - 2z = 3 \\ 0 = a + 2 \end{cases}$ に変形されることと同じである．

(1) $a + 2 \neq 0$ のとき，$\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = 3$ である．このとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は，上の連立方程式の変形からわかる通り，$0 = a + 2 \neq 0$ なる矛盾を含んでいるので，解をもたない．以上より，$\boxed{\mathbf{25}}$，$\boxed{\mathbf{26}}$ の答えは，それぞれ ⓐ, ③ である．

(2) $a + 2 = 0$ のとき，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = 2$ であるから，$\boxed{\mathbf{27}}$ の答えは ② である．このとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は $\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y - 2z = 3 \end{cases}$ に変形され，その第 2 式の 2 倍を第 1 式に加えると，$\begin{cases} x - 2z = 7 \\ y - 2z = 3 \end{cases}$ を得る．問題文に $z = t$ が与えられているから，$x = 7 + 2t$, $y = 3 + 2t$ となる．したがって，$\boxed{\mathbf{28}}$，$\boxed{\mathbf{29}}$ の答えは，それぞれ ⑦, ② である．

なお，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解 (任意定数 t を含む解) は，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の一般解と $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のある 1 つの解の和で与えられる．また，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の一般解は，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のある 1 つの解 ($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 以外) に任意定数 t を掛けたもので与えられる．この事実 (常微分方程式の問 4 や問 5 の解説に似た話が出てくる) を知っていれば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のうちの 1 式，例えば $x - 2y + 2z = 1$ に $y = 3$, $z = 0$ を代入することで $x = \boxed{\mathbf{28}} = 7$ が得られるし，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のうちの 1 式，例えば $x - 2y + 2z = 0$ に $x = 2$, $z = 1$ を代入することで $y = \boxed{\mathbf{29}} = 2$ が得られる．

問 5　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　A の固有値のうち 1 つは 2 であり，残りの 2 つは $\boxed{\mathbf{30}}$ と $\boxed{\mathbf{31}}$ である．ただし，$\boxed{\mathbf{30}} < 2 < \boxed{\mathbf{31}}$ とする．

$\boxed{30}$ ・ $\boxed{31}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5	

(2)　ベクトル $\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{32}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 固有値 2 に対する固有ベクトルであり，

ベクトル $\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{33}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 固有値 $\boxed{\mathbf{31}}$ に対する固有ベクトルである．

$\boxed{32}$ ・ $\boxed{33}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{3}{2}$	⑥ $\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{2}{3}$	⑧ -1	⑨ -2
ⓐ -3	ⓑ $-\frac{1}{2}$	ⓒ $-\frac{3}{2}$	ⓓ $-\frac{1}{3}$	ⓔ $-\frac{2}{3}$

解説

(1) 求める固有値を λ で表すとき，それは固有方程式 $|\lambda E - A| = 0$ (E は単位行列) の解として導かれる．サラスの方法により

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -3 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 6(\lambda-2)$$

$$= \{\lambda(\lambda-1) - 6\}(\lambda-2) = (\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda-2)$$

と計算できるから，$\lambda = -2, 2, 3$ を得る．したがって，$\boxed{\mathbf{30}}$，$\boxed{\mathbf{31}}$ の答えは，それぞれ ⑦, ③ である．

(2) $\lambda = 2$ のとき，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は $A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$, すなわち

$$\begin{cases} 2y = 2x \\ 3x + y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases}$$

から得られる．これを解くと，$x = 0, y = 0$ が得られる一方，z は 0 以外ならばどのような数でもよいことがわかるので，固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は } 0 \text{ 以外の任意定数})$$

と表され，特に $t = 1$ とおくと，問題文のベクトルとなる．したがって，$\boxed{\mathbf{32}}$ の答えは ⓪である．

同様に，$\lambda = 3$ のとき，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $A\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x}$ から得られる．これを解くと，$z = 0, 3x - 2y = 0$ が得られるので，固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は } 0 \text{ 以外の任意定数})$$

と表され，特に $t = \frac{1}{3}$ とおくと，問題文のベクトルとなる．したがって，$\boxed{\mathbf{33}}$ の答えは $\frac{2}{3}$, すなわち ⑦ である．

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{34}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{50}}$ 〕

(注意)　各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．また，特殊解は特解ともいう．

問 1　微分方程式

$$y' = \frac{1}{y^2}$$

の一般解は，任意定数 C を用いて $y = \boxed{\mathbf{34}}$ と表される．また，$y(0) = -2$ となるように C を定めるとき，$y(x) = 1$ を満たすのは $x = \boxed{\mathbf{35}}$ である．

$\boxed{\mathbf{34}}$ **の解答群**

⓪ C	① $\sqrt[3]{x} + C$	② $\sqrt[3]{x + C}$	③ $3x + C$
④ $\sqrt[3]{3x} + C$	⑤ $\sqrt[3]{3x + C}$	⑥ $y^2 + C$	⑦ $\dfrac{y^3}{3} + C$
⑧ $-\dfrac{1}{y} + C$	⑨ $\dfrac{x}{y^2} + C$		

$\boxed{\mathbf{35}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 8
⑤ 9	⑥ 16	⑦ 27	⑧ -1	⑨ -2
ⓐ -3	ⓑ -8	ⓒ -9	ⓓ -16	ⓔ -27

解説

問題の方程式は変数分離形であるから，

$$
\begin{aligned}
& y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2} \\
& \Longrightarrow \quad \int y^2\, dy = \int dx \\
& \Longrightarrow \quad \frac{1}{3} y^3 = x + C_1 \qquad (C_1 \text{ は任意定数}) \\
& \Longrightarrow \quad y = \sqrt[3]{3x + 3C_1} \\
& \therefore \quad y = \sqrt[3]{3x + C} \qquad (3C_1 \text{ を } C \text{ とおいた})
\end{aligned}
$$

と解ける．したがって，$\boxed{\mathbf{34}}$ の答えは ⑤ である．

次に，初期条件 $y(0) = \sqrt[3]{C} = -2$ より $C = -8$ であることがわかる．このとき，$y(x) = \sqrt[3]{3x - 8} = 1$ を満たす x は $x = 3$ である．したがって，$\boxed{\mathbf{35}}$ の答えは ③ である．

問 2 次の微分方程式 (i), (ii), (iii) を $x > 0$ の範囲で考える．

(i) $y' = xy$

(ii) $y' = \dfrac{y}{x}$

(iii) $y' = -\dfrac{y}{x}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ である特殊解 y をもつ方程式は，すべて挙げると， **36** である．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} y(x) = \infty$ である特殊解 y をもつ方程式は，すべて挙げると， **37** である．

(3) $y > 0$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to+0} y(x) = 0$ である特殊解 y をもつ方程式は，すべて挙げると， **38** である．

36 〜 **38** **の解答群**

⓪ (i), (ii), (iii)　① (i), (ii)　② (i), (iii)　③ (ii), (iii)

④ (i)　⑤ (ii)　⑥ (iii)

解説

微分方程式 (i), (ii), (iii) はそれぞれ変数分離形であるから，問 1 のようにして解けるが，1 階線形方程式 $y' = a(x)y$ の形であることに気付けば，より簡単で統一的な方法で解くことができる．その方法は，$A(x)$ を $a(x)$ の原始関数の 1 つ，すなわち

$$\int a(x)\,dx = A(x) + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数})$$

を満たすものとすると，方程式 $y' = a(x)y$ の一般解が

$$y = Ce^{A(x)} \quad (C \text{ は任意定数})$$

で与えられるというものである．実際，この y は

$$y' = \left\{Ce^{A(x)}\right\}' = A'(x)Ce^{A(x)} = a(x)Ce^{A(x)} = a(x)y$$

と方程式を満たすことが確かめられる．これより，(i), (ii), (iii) の一般解は，それぞれ次のようになる．

(i) $a(x) = x$ より $A(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ とおくことができ，一般解は $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ である．

(ii) $a(x) = \dfrac{1}{x}$ より $A(x) = \log x$ とおくことができ，一般解は $y = Ce^{\log x} = Cx$ である．

(iii) $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ より $A(x) = -\log x$ とおくことができ，一般解は $y = Ce^{-\log x} = Ce^{\log\frac{1}{x}} = \dfrac{C}{x}$ である．

以上のことを考慮すると，各問は次のように解答できる．

(1) 例えば $C = 1$ とおいて得られる (i) の特殊解 $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$ と (ii) の特殊解 $y = x$ は $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ を満たす．一方，(iii) の解については，C をいかなる数にしても $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ が成り立つ．したがって，$\boxed{\textbf{36}}$ の答えは ① である．

(2) 例えば $C = 1$ とおいて得られる (iii) の特殊解 $y = \dfrac{1}{x}$ は $\lim_{x\to+0} y(x) = \infty$ を満たす．一方，(i) の解については $\lim_{x\to+0} y(x) = C$ であり，(ii) の解については $\lim_{x\to+0} y(x) = 0$ が C の値によらず成り立つ．したがって，$\boxed{\textbf{37}}$ の答えは ⑥ である．

(3) 例えば $C = 1$ とおいて得られる (ii) の特殊解 $y = x$ は，条件 $y > 0$ および $\lim_{x\to+0} y(x) = 0$ を満たす．一方，(i) または (iii) の解について $\lim_{x\to+0} y(x) = 0$ が成り立つのは，$C = 0$ のとき，すなわち解が定数解 $y = 0$ の場合のみであるが，その場合は条件 $y > 0$ に反する．したがって，$\boxed{\textbf{38}}$ の答えは ⑤ である．

問 3　a を正の定数とし，微分方程式

$$y'' + ay = 0$$

の解 y のうち，定数解 $y = 0$ 以外を考える．

(1)　$y(0) = 0$ を満たす解は，0 でない任意の定数 C を用いて $y = \boxed{\textbf{39}}$ と表される．

(2)　$a = \boxed{\textbf{40}}$ のとき，(1) の解は $y(1) = 0$ を満たす．

$\boxed{\textbf{39}}$ の解答群

⓪ $C\left(e^{ax} - e^{-ax}\right)$	① $C\left(e^{\sqrt{a}\,x} - e^{-\sqrt{a}\,x}\right)$	② $C\,x\,e^{ax}$
③ $C\,x\,e^{\sqrt{a}\,x}$	④ $C\,\cos ax$	⑤ $C\,\cos\sqrt{a}\,x$
⑥ $C\,x\cos ax$	⑦ $C\,x\cos\sqrt{a}\,x$	⑧ $C\,\sin ax$
⑨ $C\,\sin\sqrt{a}\,x$	ⓐ $C\,x\sin ax$	ⓑ $C\,x\sin\sqrt{a}\,x$

$\boxed{\textbf{40}}$ の解答群

⓪ n	① n^2	② $\sqrt{n}$	
③ $n\pi$	④ $(n\pi)^2$	⑤ $\sqrt{n\pi}$	(n は自然数)

解説

同次な2階線形微分方程式 $y''+py'+qy=0$ (p,q は定数) に対し，2次方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ をその微分方程式の特性方程式と呼ぶ．特性方程式が複素数解 $\alpha\pm\beta i$ ($\beta\neq 0$) をもつとき，微分方程式の一般解は

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\quad (C_1, C_2\ \text{は任意定数})$$

と表される．

　問題の微分方程式を考えよう．特性方程式は $\lambda^2+a=0$ ($a>0$) であり，その解は $\lambda=\pm\sqrt{a}\,i$ である．したがって，定数解 $y=0$ でない解 y は

$$(\#)\qquad y=C_1\cos\sqrt{a}\,x+C_2\sin\sqrt{a}\,x\quad (C_1\neq 0\ \text{または}\ C_2\neq 0)$$

と書ける．

(1) (#) で与えられる y のうち，$y(0)=0$ を満たすのは，$C_1=0$ (したがって $C_2\neq 0$) としたものである．その C_2 を C と書き直せば，$y=C\sin\sqrt{a}\,x$ を得る．よって，$\boxed{\textbf{39}}$ の答えは ⑨ である．

(2) まず，$\sin\theta=0$ が成り立つためには，$\theta=m\pi$ (m は任意の整数) であることが必要十分条件である．このことから，$a=(n\pi)^2$ (n は自然数)，すなわち $\sqrt{a}=n\pi$ ならば，(1) の解 y に対して $y(1)=C\sin\sqrt{a}=C\sin n\pi=0$ となる一方，a が解答群の他の選択肢に等しいときは $y(1)=0$ とならないことがわかる．したがって，$\boxed{\textbf{40}}$ の答えは ④ である．

問 4 微分方程式

$$(*) \qquad y'' - y' - 2y = 40 \sin 2x$$

の解 y のうち，初期条件

$$(**) \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

を満たすものを求める．

(1) $(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' - y' - 2y = 0$$

の一般解は，任意定数 C_1, C_2 を用いて

$$y = C_1 e^{\boxed{\mathbf{41}}x} + C_2 e^{\boxed{\mathbf{42}}x} \quad (\text{ただし } \boxed{\mathbf{41}} < \boxed{\mathbf{42}})$$

と表される．

(2) $(*)$ の特殊解のうち，定数 A, B を用いて

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x$$

と表されるものを求めると，$A = \boxed{\mathbf{43}}$，$B = \boxed{\mathbf{44}}$ となる．

(3) $(*)$ の一般解は

$$y = C_1 e^{\boxed{\mathbf{41}}x} + C_2 e^{\boxed{\mathbf{42}}x} + \boxed{\mathbf{43}} \cos 2x + \boxed{\mathbf{44}} \sin 2x$$

であるから，初期条件 $(**)$ を満たすように C_1, C_2 を定めると

$$C_1 = \boxed{\mathbf{45}}, \quad C_2 = \boxed{\mathbf{46}}$$

となる．

$\boxed{41}$ 〜 $\boxed{46}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ $\frac{1}{2}$	⑧ $\frac{3}{2}$	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ $-\frac{1}{2}$	ⓖ $-\frac{3}{2}$	

解説

非同次な 2 階線形微分方程式 $y'' + py' + qy = Q(x)$ (p, q は定数) の一般解 y は，対応する同次方程式 $y'' + py' + qy = 0$ の一般解 $y = y_h$ と非同次方程式 $y'' + py' + qy = Q(x)$ の特殊解 $y = \eta$ を用いて

$$y = y_h + \eta$$

と表される．

同次方程式の特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が相異なる 2 つの実数解 μ, ν をもつ場合，y_h は

$$y_h = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{\nu x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

で与えられる．この場合，$Q(x)$ が $a\cos\alpha x + b\sin\alpha x$ (a, b は定数) の形をしているならば，η も同じ形をしていて $\eta = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$ (A, B は定数) とおくことができる．その η を非同次方程式 $y'' + py' + qy = Q(x)$ の y に代入し，両辺に含まれる $\cos\alpha x, \sin\alpha x$ それぞれの係数を比較することにより，A, B を定めることができる．

(1) 同次方程式 $y'' - y' - 2y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ であり，その解は -1 と 2 であるので，求める一般解は

$$y = y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

である．したがって，$\boxed{\mathbf{41}}$，$\boxed{\mathbf{42}}$ の答えは，それぞれ ⑨, ② である．

(2) 方程式 $(*)$ の左辺に $y = \eta = A\cos 2x + B\sin 2x$ を代入して整理すると

$$-2(3A + B)\cos 2x + 2(A - 3B)\sin 2x = 40\sin 2x$$

となる．両辺にある $\cos 2x, \sin 2x$ それぞれの係数を比較することにより，

$$3A + B = 0, \quad A - 3B = 20$$

が得られる．これらを満たすのは $A = 2$，$B = -6$ であるので，$\boxed{\mathbf{43}}$，$\boxed{\mathbf{44}}$ の答えは，それぞれ ②, ⓔ である．

(3) $(*)$ の一般解

$$y = y_h + \eta = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 2\cos 2x - 6\sin 2x$$

について，$y(0), y'(0)$ を計算し，$(**)$ と合わせると

$$y(0) = C_1 + C_2 + 2 = 2, \quad y'(0) = -C_1 + 2C_2 - 12 = 3$$

を得る．これらを満たすのは $C_1 = -5$, $C_2 = 5$ であるので，$\boxed{\mathbf{45}}$，$\boxed{\mathbf{46}}$ の答えは，それぞれ ⓓ, ⑤ である．

問 5　物体を真上に投げたとき，その物体の時刻 t における速度 $v(t)$ が微分方程式

$$(*) \qquad \frac{dv}{dt} = -kv - g \qquad (k,\ g \text{ は正の定数})$$

を満たす場合を考える．ただし，物体の運動は直線的で，上昇時に $v(t)$ は正の値をとり，下降時に $v(t)$ は負の値をとるものとする．

(1)　微分方程式 $(*)$ の一般解は，任意定数 C を用いて

$$v(t) = C\,e^{\boxed{\mathbf{47}}\,t} + \boxed{\mathbf{48}}$$

と表される．

$\boxed{47}$ ・ $\boxed{48}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ -1	④ -2
⑤ k	⑥ g	⑦ kg	⑧ $\dfrac{k}{g}$	⑨ $\dfrac{g}{k}$
ⓐ $-k$	ⓑ $-g$	ⓒ $-kg$	ⓓ $-\dfrac{k}{g}$	ⓔ $-\dfrac{g}{k}$

(2)　V_0 を正の定数とするとき，$v(0) = V_0$ を満たす微分方程式 $(*)$ の解は

$$v(t) = \boxed{\mathbf{49}}\ e^{\boxed{\mathbf{47}}\,t} + \boxed{\mathbf{48}}$$

である．

$\boxed{49}$ の解答群

⓪ V_0	① $-V_0$	② $V_0 + k$	③ $V_0 - k$
④ $V_0 + g$	⑤ $V_0 - g$	⑥ $V_0 + kg$	⑦ $V_0 - kg$
⑧ $V_0 + \dfrac{k}{g}$	⑨ $V_0 - \dfrac{k}{g}$	ⓐ $V_0 + \dfrac{g}{k}$	ⓑ $V_0 - \dfrac{g}{k}$

(3) (2) で求めた解 $v(t)$ の符号が正から負に変わる時刻 T は，$v(T)=0$ から導かれ，$T=$ $\boxed{\textbf{50}}$ である．

$\boxed{\textbf{50}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{kV_0}{g}$	① $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{V_0+kg}{kg}$	② $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{V_0-kg}{kg}$
③ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{kg}{V_0+kg}$	④ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{kg}{V_0-kg}$	⑤ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{kV_0+g}{g}$
⑥ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{kV_0-g}{g}$	⑦ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{g}{kV_0+g}$	⑧ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{g}{kV_0-g}$

解説

非同次な 1 階線形微分方程式 $y'+ay=Q(x)$ (a は定数) の一般解は，対応する同次方程式 $y'+ay=0$ (すなわち $y'=-ay$) の一般解 $y=C\,e^{-ax}$ (問 2 の解説より) および非同次方程式 $y'+ay=Q(x)$ の特殊解 $y=\eta$ を用いて $y=Ce^{-ax}+\eta$ と表される．$Q(x)$ が d 次の多項式であるとき，η も d 次の多項式と仮定でき，$\eta=Ax^d+Bx^{d-1}+\cdots+Z$ ($A,B,\ldots,Z$ は定数) とおくことができる．そして，それを $y'+ay=Q(x)$ の y に代入することで，$A,B,\ldots,Z$ が決定できる．

(1) 上の記述により，非同次方程式 $(*)$ の一般解は，その特殊解 $v=\eta(t)$ を用い，$v=Ce^{-kt}+\eta(t)$ と表される．$Q(t)$ は $-g$, すなわち定数 (0 次の多項式) であるから，特殊解 $\eta(t)$ も定数 A とおける．その A を $(*)$ の v に代入すると，$0=-kA-g$ となり，$A=-\dfrac{g}{k}$ を得る．したがって，$(*)$ の一般解は $v(t)=C\,e^{-kt}-\dfrac{g}{k}$ となるから，$\boxed{\textbf{47}}$, $\boxed{\textbf{48}}$ の答えは，それぞれ ⓐ, ⓔ である．

(2) (1) の一般解に $t=0$ を代入すると，$v(0)=C-\dfrac{g}{k}=V_0$ となり，$C=V_0+\dfrac{g}{k}$ を得る．すなわち，$v(0)=V_0$ を満たす $(*)$ の特殊解は

$$v(t)=\left(V_0+\frac{g}{k}\right)e^{-kt}-\frac{g}{k}$$

である．したがって，$\boxed{\textbf{49}}$ の答えは ⓐ である．

(3) (2) の特殊解に $t=T$ を代入し，$v(T)=0$ を考慮すると，

$$v(T)=\left(V_0+\frac{g}{k}\right)e^{-kT}-\frac{g}{k}=0 \quad \text{すなわち} \quad e^{kT}=\frac{k}{g}\left(V_0+\frac{g}{k}\right)=\frac{kV_0+g}{g}$$

を得る．したがって，$kT=\log\dfrac{kV_0+g}{g}$ であるから，$\boxed{\textbf{50}}$ の答えは ⑤ である．

第4分野　確率・統計

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{51}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{70}}$ 〕

(注意)　事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1　確率変数 X の確率分布が

X の値	2	4	6	8
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	a

(a は定数)

で与えられている．このとき，$a = \boxed{\mathbf{51}}$ であり，$E(X) = \boxed{\mathbf{52}}$ である．また，$E(X^2) = \boxed{\mathbf{53}}$ であるから，$V(X)$ は $\boxed{\mathbf{53}} - \boxed{\mathbf{52}}^2$ に等しい．

$\boxed{\mathbf{51}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{53}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 30	⑦ $\frac{1}{2}$	⑧ $\frac{1}{3}$	⑨ $\frac{1}{4}$	ⓐ $\frac{1}{5}$	ⓑ $\frac{8}{3}$
ⓒ $\frac{13}{3}$	ⓓ $\frac{16}{3}$	ⓔ $\frac{19}{3}$	ⓕ $\frac{92}{3}$	ⓖ $\frac{98}{3}$	ⓗ $\frac{104}{3}$

解説

全事象の確率は 1 であるから，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+a=1\\ \therefore\quad &a=P(X=8)=1-\frac{2+3+4}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となり，$\boxed{\textbf{51}}$ の答えは ⑨ である．

また，期待値 $E(X)$ は，X の値とその確率の積をすべて足し合わせたものであるから，

$$\begin{aligned}E(X)&=2\cdot P(X=2)+4\cdot P(X=4)+6\cdot P(X=6)+8\cdot P(X=8)\\&=2\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{3}+8\cdot\frac{1}{4}\\&=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

となる．したがって，$\boxed{\textbf{52}}$ の答えは ⓓ である．

同様に，$E(X^2)$ は

$$\begin{aligned}E(X^2)&=2^2\cdot P(X=2)+4^2\cdot P(X=4)+6^2\cdot P(X=6)+8^2\cdot P(X=8)\\&=2^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{4}+6^2\cdot\frac{1}{3}+8^2\cdot\frac{1}{4}\\&=\frac{98}{3}\end{aligned}$$

と計算できるので，$\boxed{\textbf{53}}$ の答えは ⓖ である．

問 2　ある工場では，同じ型の部品が a, b, c の 3 社から $5:3:2$ の割合で納入されている．a 社が自社の部品を調査したところ，不良品の割合は 1% であった．同様に，b 社では 2%, c 社では 2.5% であった．

工場に納入された全部品の中から無作為に取り出した 1 個が a, b, c 社からのものである事象をそれぞれ A, B, C とする．また，その取り出した 1 個が不良品である事象を F とする．

(1)　$P(A) = \boxed{\mathbf{54}}$，　$P(A \cap F) = \boxed{\mathbf{55}}$ である．

(2)　(1) と同様に $P(B \cap F)$, $P(C \cap F)$ を求めることにより，$P(F) = \boxed{\mathbf{56}}$ を得る．

(3)　取り出した部品 1 個が不良品であったとき，それが a 社から納入されたものである確率，すなわち事象 F が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率 $P(A|F)$ の値は $\boxed{\mathbf{57}}$ である．

$\boxed{\mathbf{54}}$ ～ $\boxed{\mathbf{57}}$ の解答群

⓪ 0	① $\dfrac{1}{2}$	② $\dfrac{3}{8}$	③ $\dfrac{5}{8}$	④ $\dfrac{2}{11}$
⑤ $\dfrac{5}{16}$	⑥ $\dfrac{1}{20}$	⑦ $\dfrac{4}{25}$	⑧ $\dfrac{1}{55}$	⑨ $\dfrac{1}{100}$
ⓐ $\dfrac{2}{125}$	ⓑ $\dfrac{1}{200}$	ⓒ $\dfrac{11}{200}$	ⓓ $\dfrac{1}{2000}$	ⓔ $\dfrac{3}{2000}$

解説

(1) a, b, c の 3 社から 5 : 3 : 2 の割合で部品が納入されているということは，全部品の

$$\frac{5}{5+3+2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

が a 社からの納入ということを意味する．これが $P(A)$ に等しいので，$\boxed{\mathbf{54}}$ の答えは ① である．また，全部品の $\dfrac{1}{2}$ を占める a 社からの部品が 1% の不良品を含むということより，

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{200}$$

が全部品に占める a 社からの不良品の割合である．これが $P(A \cap F)$ に等しいので，$\boxed{\mathbf{55}}$ の答えは ⓑ である．

(2) (1) と同様に，

$$P(B \cap F) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{100} = \frac{6}{1000}, \quad P(C \cap F) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2.5}{100} = \frac{5}{1000}$$

となるので，

$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) = \frac{5+6+5}{1000} = \frac{2}{125}$$

を得る．したがって，$\boxed{\mathbf{56}}$ の答えは ⓐ である．

(3) 一般に，事象 H が起こったときの事象 K の起こる条件付き確率 $P(K|H)$ は

$$P(K \,|\, H) = \frac{P(K \cap H)}{P(H)}$$

で定義される．これを踏まえ，(1) と (2) の結果を用いると，

$$P(A \,|\, F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{200}}{\frac{16}{1000}} = \frac{5}{16}$$

であるから，$\boxed{\mathbf{57}}$ の答えは ⑤ である．

また，条件付き確率の定義を知らなくても，(1) と (2) で求めた $P(A \cap F)$, $P(B \cap F)$, $P(C \cap F)$ から，不良品が 5 : 6 : 5 の割合で a, b, c 社から入ってくることがわかり，不良品に占める a 社納入の割合は

$$\frac{5}{5+6+5} = \frac{5}{16}$$

である，といった具合に正解を導くこともできる．

問 3　確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が定数 k を用いて

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & (|x| \leqq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と表されるとする．このとき，$k = \boxed{\mathbf{58}}$ であり，$P\left(|X| \leqq \frac{1}{2}\right) = \boxed{\mathbf{59}}$ である．

また，$E(X) = \boxed{\mathbf{60}}$，$V(X) = \boxed{\mathbf{61}}$ である．

$\boxed{58}$ 〜 $\boxed{61}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ $\frac{1}{2}$	⑤ $\frac{3}{2}$
⑥ $\frac{5}{2}$	⑦ $\frac{1}{3}$	⑧ $\frac{2}{3}$	⑨ $\frac{4}{3}$	ⓐ $\frac{5}{3}$	ⓑ $\frac{1}{5}$
ⓒ $\frac{2}{5}$	ⓓ $\frac{3}{5}$	ⓔ $\frac{4}{5}$	ⓕ $\frac{1}{8}$	ⓖ $\frac{3}{8}$	ⓗ $\frac{5}{8}$

解説

確率密度関数 $f(x)$ は，全確率が 1 であることより，

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

を満たす．したがって，

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} kx^2\,dx = k\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2k}{3}$$

から $k = \dfrac{3}{2}$ が導かれるので，$\boxed{\textbf{58}}$ の答えは ⑤ である．

また，

$$P\left(|X| \leqq \frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} kx^2\,dx = k\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2k}{3}\cdot\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

であるから，$\boxed{\textbf{59}}$ の答えは ⓕ である．

次に，

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-1}^{1} kx^3\,dx = 0$$

(奇関数の原点に関して対称な区間での積分は 0 だから)

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} kx^4\,dx = k\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2k}{5} = \frac{3}{5}$$

であるから，

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = \frac{3}{5}$$

を得る．したがって，$\boxed{\textbf{60}}$，$\boxed{\textbf{61}}$ の答えは，それぞれ ⓪, ⓓ である．

ところで，$V(X)$ が $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ より計算できることは，確率・統計の超基本的事項であるが，万が一忘れてしまった人のためのヒントとして，問 1 の問題文 (p.33) にその式 (離散型確率分布ではあるが) が出ていることに気付いただろうか．

問 4 コインを 1 回投げたとき，表と裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるものとする．そのコインを 10 回投げ，各回において表が出たら 2 点，裏が出たら -1 点の点数を与える．また，表が出る回数を X, 点数の合計を Y とおく．

(1) X は二項分布 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ に従い，$E(X) = \boxed{62}$, $V(X) = \boxed{63}$ である．

62 ・ **63** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ 5	⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9
ⓐ $\frac{1}{2}$	ⓑ $\frac{3}{2}$	ⓒ $\frac{5}{2}$	ⓓ $\frac{7}{2}$	ⓔ $\frac{9}{2}$

(2) Y を X の式で表すと $Y = \boxed{64}$ となるので，$E(Y) = \boxed{65}$, $V(Y) = \boxed{66}$ である．

64 の解答群

⓪ $X + 10$	① $X - 10$	② $2X$	③ $2X - 1$
④ $2X + 10$	⑤ $2X - 10$	⑥ $3X$	⑦ $3X - 1$
⑧ $3X + 10$	⑨ $3X - 10$	ⓐ X^2	ⓑ $10 - X$

65 ・ **66** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 5	④ 10	⑤ 15
⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ $\frac{5}{2}$	⑧ $\frac{15}{2}$	⑨ $\frac{25}{2}$	ⓐ $\frac{45}{2}$	ⓑ $\frac{75}{2}$
ⓒ $\frac{1}{4}$	ⓓ $\frac{5}{4}$	ⓔ $\frac{15}{4}$	ⓕ $\frac{25}{4}$	ⓖ $\frac{45}{4}$	ⓗ $\frac{75}{4}$

解説

(1) 一般に，二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数 X の平均は $E(X)=np$ であり，分散は $V(X)=np(1-p)$ である．これを $n=10,\ p=\dfrac{1}{2}$ の場合に適用すると，$E(X)=5$, $V(X)=\dfrac{5}{2}$ となるので， $\boxed{\textbf{62}}$, $\boxed{\textbf{63}}$ の答えは, それぞれ ⑤, ⓒ である.

(2) 表が出る回数が X であるから，裏の出る回数は $10-X$ である．したがって，$Y=2X-(10-X)=3X-10$ であるから， $\boxed{\textbf{64}}$ の答えは ⑨ である.

ここで，公式

$$E(aX+b)=aE(X)+b,\quad V(aX+b)=a^2V(X)\quad (a,b \text{ は定数})$$

を用いると，

$$E(Y)=E(3X-10)=3E(X)-10=3\cdot 5-10=5$$
$$V(Y)=V(3X-10)=3^2V(X)=9\cdot\frac{5}{2}=\frac{45}{2}$$

を得る．よって， $\boxed{\textbf{65}}$, $\boxed{\textbf{66}}$ の答えは，それぞれ ③, ⓐ である.

問 5　ある工場で生産される薬剤 1 個あたりの質量の分布は，平均 μ mg, 標準偏差 σ mg の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従い，これまでの経験から標準偏差は $\sigma = 50$ と仮定してよいことがわかっている．いま，生産された薬剤から無作為に何個かを標本として取り出し，それぞれの質量を測定することにより，μ の値を信頼度 95% で区間推定する．そして，信頼区間の幅を 35 mg 以下にするために必要な標本の個数の最小値を求める．

　まず，標本の個数を n とし，それぞれの質量を表す確率変数を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とすると，これらは互いに独立であり，いずれも正規分布 $N(\mu, 50^2)$ に従う．よって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

は正規分布 $N(\boxed{\mathbf{67}}, \boxed{\mathbf{68}})$ に従うので，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\boxed{\mathbf{69}}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．正規分布表から

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

であることがわかり，

$$P\left(\overline{X} - 1.96 \times \boxed{\mathbf{69}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \times \boxed{\mathbf{69}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

を得る．これは，信頼度 95% の信頼区間の幅が $2 \times 1.96 \times \boxed{\mathbf{69}}$ であることを意味する．したがって，その幅を 35 以下にする個数 n の最小値は $\boxed{\mathbf{70}}$ である．

$\boxed{\mathbf{67}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② μ	③ 2μ	④ $n\mu$
⑤ $\dfrac{\mu}{n}$	⑥ μ^2	⑦ $2\mu^2$	⑧ $n\mu^2$	⑨ $\dfrac{\mu^2}{n}$

$\boxed{68}$ ・ $\boxed{69}$ の解答群

⓪ 50	① $50\,n$	② $50\,n^2$	③ $50\sqrt{n}$	④ $\dfrac{50}{n}$
⑤ $\dfrac{50}{n^2}$	⑥ $\dfrac{50}{\sqrt{n}}$	⑦ 50^2	⑧ $50^2\,n$	⑨ $50^2\,n^2$
ⓐ $\dfrac{50^2}{n}$	ⓑ $\dfrac{50^2}{n^2}$	ⓒ $\sqrt{50}$	ⓓ $\sqrt{50}\,n$	ⓔ $\dfrac{\sqrt{50}}{n}$

$\boxed{70}$ の解答群

⓪ 3	① 5	② 6	③ 15	④ 16	⑤ 17
⑥ 25	⑦ 32	⑧ 33	⑨ 35	ⓐ 36	ⓑ 50
ⓒ 68	ⓓ 83	ⓔ 85	ⓕ 100	ⓖ 256	ⓗ 280

解説

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ がすべて正規分布 $N(\mu,\,50^2)$ に従い，互いに独立ならば，

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

も正規分布に従い，

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\} = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$$

$$V(\overline{X}) = \left(\frac{1}{n}\right)^2\{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\} = \frac{1}{n^2}\cdot 50^2 n = \frac{50^2}{n}$$

が成り立つ．これは，$\overline{X}$ の分布が正規分布 $N\left(\mu, \dfrac{50^2}{n}\right)$ であることを意味するので，$\boxed{67}$，$\boxed{68}$ の答えは，それぞれ ②, ⓐ である．

次に，$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{s}$ (s は正の定数) に対し，

$$E(Z) = \frac{E(\overline{X}) - \mu}{s} = 0, \quad V(Z) = \frac{V(\overline{X})}{s^2} = \frac{\frac{50^2}{n}}{s^2}$$

が成り立つので，$s = \dfrac{50}{\sqrt{n}}$ とすれば $V(Z) = 1$ となる．したがって，$\boxed{69}$ の答えは ⑥ である．

また，$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{50/\sqrt{n}}$ について，

$$\begin{aligned}
-1.96 \leqq Z \leqq 1.96 &\iff -1.96 \leqq -Z \leqq 1.96 \\
&\iff -1.96 \leqq \frac{\mu - \overline{X}}{50/\sqrt{n}} \leqq 1.96 \\
&\iff -1.96 \times \frac{50}{\sqrt{n}} \leqq \mu - \overline{X} \leqq 1.96 \times \frac{50}{\sqrt{n}} \\
&\iff \overline{X} - 1.96 \times \frac{50}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \times \frac{50}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

となるから，

$$P\left(\overline{X} - 1.96 \times \frac{50}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \times \frac{50}{\sqrt{n}}\right) = P\left(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96\right) \fallingdotseq 0.95$$

である．したがって，求める信頼区間の幅は

$$1.96 \times \frac{50}{\sqrt{n}} \times 2 = \frac{196}{\sqrt{n}}$$

となる．これを 35 以下にするためには，

$$35 \geqq \frac{196}{\sqrt{n}} \iff \sqrt{n} \geqq \frac{196}{35} = 5.6 \iff n \geqq (5.6)^2 = 31.36$$

より，個数 (自然数) n が 32 以上であればよい．すなわち，$\boxed{\textbf{70}}$ の答えは ⑦ である．