EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2014年12月13日（土）

4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分

2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分

1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊受験分野は，各大学の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと．

(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(8) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(9) 問題冊子は持ち帰ること．

(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること．

(11) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選んでその記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合にはⓘをマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号ⓒを選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\mathbf{23}}$ は $(\boxed{\mathbf{23}})$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問１～問６ ： 解答番号 $\boxed{\textbf{1}}$ ～ $\boxed{\textbf{19}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問１　次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2} = \boxed{\textbf{1}}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \left\{ \log(3x+1) - \log 3x \right\} = \boxed{\textbf{2}}$

$\boxed{\textbf{1}}$ **の解答群**

⓪ 0　① ∞　② $-\infty$

③ $\dfrac{2}{\pi}$　④ $\dfrac{1}{\pi}$　⑤ $\dfrac{1}{2\pi}$　⑥ $\dfrac{1}{3\pi}$　⑦ $\dfrac{1}{4\pi}$

⑧ $-\dfrac{2}{\pi}$　⑨ $-\dfrac{1}{\pi}$　ⓐ $-\dfrac{1}{2\pi}$　ⓑ $-\dfrac{1}{3\pi}$　ⓒ $-\dfrac{1}{4\pi}$

$\boxed{\textbf{2}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 6

⑤ $\dfrac{1}{6}$　⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\dfrac{1}{2}$　⑧ $\log 3$　⑨ ∞

計算用紙

問 2 関数 $f(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{3}\ \sin^{-1} x$ の閉区間 $[-1,\,1]$ における最大値と最小値を求める．

(1) $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \boxed{\mathbf{3}}$$

であるから，開区間 $(-1,\,1)$ における $f'(x) = 0$ の解は $x = \boxed{\mathbf{4}}$ である．

$\boxed{3}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{1-x^2}}$　① $\dfrac{\sqrt{3}x+2}{\sqrt{1-x^2}}$　② $\dfrac{2x+\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}}$　③ $\dfrac{4x+\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{1-x^2}}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}x-2}{\sqrt{1-x^2}}$　⑥ $\dfrac{-2x+\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}}$　⑦ $\dfrac{-4x+\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{4}$ の解答群

⓪ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

④ $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　⑦ $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(2)　$f(x)$ の最大値と最小値の候補は，$f(\,\boxed{\mathbf{4}}\,)$ と閉区間 $[-1, 1]$ の両端における値 $f(1)$，$f(-1)$ になる．$f(x)$ の増減を調べ，これらの値を計算することにより，

最大値 $= \boxed{\mathbf{5}}$，　　最小値 $= \boxed{\mathbf{6}}$

を得る．

$\boxed{5}$ ・ $\boxed{6}$ の解答群

⓪ $\sqrt{3}$　① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$　② $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$　③ $1+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$　④ $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

⑤ $-\sqrt{3}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$　⑦ $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$　⑧ $1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$　⑨ $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

ⓐ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　ⓑ $\dfrac{\sqrt{13}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$

ⓒ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　ⓓ $\dfrac{\sqrt{13}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$

問 3　関数　$f(x) = 4e^x - 2e^{-x}$　のマクローリン展開（$x = 0$ を中心とするテイラー展開）を

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

とするとき，$a_2 = \boxed{\mathbf{7}}$，$a_3 = \boxed{\mathbf{8}}$ である．

$\boxed{7}$ ・ $\boxed{8}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ −1　⑧ −2　⑨ −3　ⓐ −4　ⓑ −5　ⓒ −6

計算用紙

問 4　2 つの積分を計算する．

(1)　$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}\,(4+x)}\,dx$　に対して，$\sqrt{x} = t$ と変数変換すると，

$$I_1 \;=\; \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \boxed{\mathbf{9}}\; dt \;=\; \boxed{\mathbf{10}}$$

となる．

(2)　$I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$ に対して，部分積分を繰り返すと，

$$I_2 = \boxed{\mathbf{11}} - I_2$$

となる．これより $I_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \boxed{\mathbf{11}}$ である．

9 の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2(4+t^2)}$　① $\dfrac{1}{4+t^2}$　② $\dfrac{2}{4+t^2}$

③ $\dfrac{1}{2t(4+t^2)}$　④ $\dfrac{1}{t(4+t^2)}$　⑤ $\dfrac{2}{t(4+t^2)}$

10 ・ 11 の解答群

⓪ $\dfrac{\pi}{6}$　① $\dfrac{\pi}{4}$　② $\dfrac{\pi}{3}$　③ $\dfrac{\pi}{2}$

④ $\dfrac{e^\pi}{2}$　⑤ e^π　⑥ $1+e^\pi$　⑦ $1-e^\pi$

⑧ $-\dfrac{e^\pi}{2}$　⑨ $-e^\pi$　ⓐ $-1-e^\pi$　ⓑ $-1+e^\pi$

計算用紙

問 5　2 変数関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3+y^2+2xy$ の極値について考える．

(1)　連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

の解は $(x,y)=(2,\,-2)$ と $(x,y)=$ $\boxed{\mathbf{12}}$ の 2 つである．

$\boxed{12}$ の解答群

⓪ $(-2,\ 2)$　① $(-1,\ 1)$　② $(0,\ 0)$　③ $(1,\ -1)$

(2)　点 $(2,-2)$ において $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-2)=$ $\boxed{\mathbf{13}}$ >0 であり，

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,-2) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,-2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-2) \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{14}}$$

であるから，関数 $f(x,y)$ は $(2,-2)$ で $\boxed{\mathbf{15}}$．

$\boxed{13}$ ・ $\boxed{14}$ の解答群

⓪ 2　① 4　② 8　③ 12

④ -2　⑤ -4　⑥ -8　⑦ -12

$\boxed{15}$ の解答群

⓪ 極大値をとる　① 極小値をとる　② 極値をとらない

計算用紙

問 6　xy 平面上の集合 D を $D = \{\,(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とし，重積分

$$I = \iint_D (x^2 + 3y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

の値を求める．極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を行うと，I は

$$I_1 = \int_0^{\infty} r^{\boxed{\mathbf{16}}} e^{-r^2}\, dr \quad と \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \boxed{\mathbf{17}}\ \sin^2\theta)\, d\theta$$

の積 $I_1 I_2$ に等しいことがわかる．

I_1 の値は，$s = r^2$ として置換積分を行い，さらに部分積分を適用すると，$I_1 = \boxed{\mathbf{18}}$ となる．また，I_2 の値は三角関数の倍角公式を用いて計算できる．したがって

$$I = I_1 I_2 = \boxed{\mathbf{19}}$$

である．

$\boxed{16}$ 〜 $\boxed{18}$ の解答群

⓪ 0	① ∞	② $-\infty$			
③ 1	④ 2	⑤ 3	⑥ 4		
⑦ -1	⑧ -2	⑨ -3	ⓐ -4		
ⓑ $\frac{1}{2}$	ⓒ $\frac{1}{3}$	ⓓ $\frac{1}{4}$	ⓔ $-\frac{1}{2}$	ⓕ $-\frac{1}{3}$	ⓖ $-\frac{1}{4}$

$\boxed{19}$ の解答群

⓪ 0	① ∞				
② π	③ 2π	④ $\frac{\pi}{2}$	⑤ $\frac{3\pi}{2}$	⑥ $\frac{5\pi}{2}$	
⑦ $\frac{\pi}{4}$	⑧ $\frac{3\pi}{4}$	⑨ $\frac{5\pi}{4}$	ⓐ $\frac{\pi}{8}$	ⓑ $\frac{3\pi}{8}$	ⓒ $\frac{5\pi}{8}$

計算用紙

第２分野　線形代数

〔 問１〜問５ ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{20}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{36}}$ 〕

問１ (1) ３次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を O とし, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をその正規直交基底とする．２つのベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{e}_1 + 3\,\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_3$$

によって作られる三角形 △OAB の面積は $\boxed{\mathbf{20}}$ である.

$\boxed{\mathbf{20}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ 6　⑦ $\dfrac{1}{2}$　⑧ $\dfrac{3}{2}$　⑨ $\dfrac{5}{2}$　ⓐ $\sqrt{2}$　ⓑ $\sqrt{3}$

ⓒ $\sqrt{5}$　ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　ⓔ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ⓕ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\mathbf{21}}$ である.

$\boxed{\mathbf{21}}$ **の解答群**

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ -4　ⓒ -5　ⓓ -6　ⓔ -7

(3)　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} の $(1,1)$ 成分は $\boxed{\textbf{22}}$ であり,

$(3,2)$ 成分は $\boxed{\textbf{23}}$ である.

$\boxed{\textbf{22}}$ ・ $\boxed{\textbf{23}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　⑥ $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ $-\dfrac{1}{2}$　ⓐ $-\sqrt{2}$　ⓑ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

問 2　a, b を実数として連立 1 次方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} 2x + y + az = b \\ x \phantom{{}+y} + 2z = 1 \\ x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

を考える．方程式の拡大係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & b \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(1)　$(*)$ が解を 1 つだけもつのは，$a \neq$ $\boxed{\mathbf{24}}$ のときである．

(2)　$(*)$ が無数に解をもつのは，$a =$ $\boxed{\mathbf{24}}$，$b =$ $\boxed{\mathbf{25}}$ のときである．
このとき，A の階数 (ランク) は $\boxed{\mathbf{26}}$ である．

$\boxed{24}$ 〜 $\boxed{26}$ の解答群

⓪　0

①　1　②　2　③　3　④　4　⑤　5　⑥　6

⑦　-1　⑧　-2　⑨　-3　ⓐ　-4　ⓑ　-5　ⓒ　-6

計算用紙

問 3　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ においてベクトルの組

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (s \text{ は定数})$$

が 1 次独立になるのは $s \neq \boxed{\mathbf{27}}$ のときである．
また，$s = \boxed{\mathbf{27}}$ のとき，

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{27}} \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{28}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \boxed{\mathbf{29}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．

$\boxed{\mathbf{27}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{29}}$ の解答群

⓪ 0					
① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6
⑦ -1	⑧ -2	⑨ -3	ⓐ -4	ⓑ -5	ⓒ -6

計算用紙

問 4 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 f が

$$f(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix}\boxed{\mathbf{30}}\\\boxed{\mathbf{31}}\end{pmatrix}$ となる．

$\boxed{30}$ ・ $\boxed{31}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

(2) $\mathbb{R}^3$ のすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列は $A = \boxed{\mathbf{32}}$ である．

$\boxed{32}$ の解答群

⓪ $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$　⑧ $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

⑨ $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$　ⓐ $\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$　ⓑ $\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

計算用紙

問 5 (1) 2 次形式 $x^2+4xy-2y^2$ は，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと 2 次の実対称行列 $A=$ $\boxed{\textbf{33}}$ を用いて

$$x^2+4xy-2y^2={}^t\boldsymbol{x}A\,\boldsymbol{x}$$

と表される．ただし ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表し ${}^t\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ である．

(2) A の固有値は -3 と $\boxed{\textbf{34}}$ である．

(3) $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} w \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\boxed{\textbf{34}}$ に対する A の固有ベクトルとすると $w=$ $\boxed{\textbf{35}}$ である．

$\boldsymbol{p}$ は定数 $k=$ $\boxed{\textbf{36}}$ に関して

$${}^t\boldsymbol{p}\,A\,\boldsymbol{p}=k\,({}^t\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p})$$

を満たす．

$\boxed{\textbf{33}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ⑦ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{34}}$ 〜 $\boxed{\textbf{36}}$ **の解答群**

⓪ 0

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6

⑦ -1 ⑧ -2 ⑨ -3 ⓐ -4 ⓑ -5 ⓒ -6

計算用紙

第3分野　常微分方程式

〔問１～問５：解答番号 $\boxed{\textbf{37}}$ ～ $\boxed{\textbf{53}}$ 〕

(注意)　各問における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す. また, 特殊解は特解ともいう.

問１　(1)　微分方程式

$$y' = -\frac{y}{x^2}$$

の一般解は $y = \boxed{\textbf{37}}$ である.

$\boxed{\textbf{37}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{x}+C$	① $\dfrac{1}{x^2}+C$	② $e^{1/x}+C$	③ $e^{-1/x}+C$
④ $\dfrac{C}{x}$	⑤ $\dfrac{C}{x^2}$	⑥ $Ce^{1/x}$	⑦ $Ce^{-1/x}$
⑧ $e^{1/x^2}+C$	⑨ $e^{-1/x^2}+C$	ⓐ $e^{2/x^3}+C$	ⓑ $e^{-2/x^3}+C$
ⓒ Ce^{1/x^2}	ⓓ Ce^{-1/x^2}	ⓔ Ce^{2/x^3}	ⓕ Ce^{-2/x^3}

(C は任意定数)

(2) 微分方程式

$$2y'' + y' - y = 5x - 3$$

の一般解は $y = \boxed{\mathbf{38}}$ である.

$\boxed{\mathbf{38}}$ **の解答群**

⓪ $A\,e^{x/2} + B\,e^{x} + 5x + 12$　① $A\,e^{-x/2} + B\,e^{x} - 5x + 8$

② $A\,e^{x/2} + B\,e^{-x} - 5x - 2$　③ $A\,e^{x/2} + B\,e^{-x} - 5x - 18$

④ $A\,e^{x/2} + B\,e^{-x} + 5x + 12$　⑤ $A\,e^{x/2} + B\,e^{x} - 5x + 8$

⑥ $A\,e^{-x/2} + B\,e^{x} - 5x - 2$　⑦ $A\,e^{-x/2} + B\,e^{-x} - 5x - 18$

⑧ $A\,e^{x/2}\,\sin x + B\,e^{x/2}\cos x + 5x + 12$

⑨ $A\,e^{-x/2}\,\sin x + B\,e^{-x/2}\cos x - 5x + 8$

ⓐ $A\,e^{x}\,\sin\dfrac{x}{2} + B\,e^{x}\,\cos\dfrac{x}{2} - 5x - 2$

ⓑ $A\,e^{x}\,\sin\dfrac{x}{2} + B\,e^{x}\,\cos\dfrac{x}{2} - 5x - 18$

ⓒ $A\,e^{-x}\,\sin\dfrac{x}{2} + B\,e^{-x}\,\cos\dfrac{x}{2} + 5x + 12$

(A, B は任意定数)

問 2　ある物質の量 $m(t)$ は，時刻 t の関数として微分方程式

$$\frac{dm}{dt} = -k\,m + 1 \qquad (\,k \text{ は正の定数}\,)$$

に従って変化するとする．

(1)　$m(t)$ は，時刻 $t = 0$ での値 $m(0)$ によらず，時間がたてば定数 $a = \boxed{\textbf{39}}$ に近づくことがわかる．すなわち，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} m(t) = a$ となる．

(2)　$m(t)$ について $m(0) \neq a$ で，

$$|m(0) - a| = 8\,|m(4) - a|$$

が成り立つとき，$k = \boxed{\textbf{40}}$ である．

$\boxed{\textbf{39}}$ **の解答群**

⓪ k　① $\dfrac{1}{k}$　② e^{k}　③ e^{-k}　④ $e^{1/k}$　⑤ $e^{-1/k}$

$\boxed{\textbf{40}}$ **の解答群**

⓪ $\log 2$　① $2\log 2$　② $3\log 2$　③ $4\log 2$

④ $\dfrac{1}{12}\log 2$　⑤ $\dfrac{1}{4}\log 2$　⑥ $\dfrac{1}{3}\log 2$　⑦ $\dfrac{3}{4}\log 2$　⑧ $\dfrac{4}{3}\log 2$

計算用紙

問 3 次の 3 つの微分方程式を考える．

(i) $y'' - 4y = 0$

(ii) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' + 2y' + 5y = 0$

(1) $y(0) = 0$ を満たし，$y'(0) > 0$ となる解は，

(i) の場合は $y =$ **41** ,

(ii) の場合は $y =$ **42** ,

(iii) の場合は $y =$ **43**

である．

41 〜 **43** **の解答群**

⓪ $A\,e^{2x}$	① $A\,x\,e^{2x}$	② $A\,(e^{2x} - e^{-2x})$
③ $A\,e^{-2x}$	④ $A\,x\,e^{-2x}$	⑤ $A\,(e^{-2x} - e^{2x})$
⑥ $A\cos 2x$	⑦ $A\,x\,\cos 2x$	⑧ $A\,x^2\,\cos x$
⑨ $A\sin 2x$	ⓐ $A\,x\,\sin 2x$	ⓑ $A\,x^2\,\sin x$
ⓒ $A\,e^{x}\cos 2x$	ⓓ $A\,e^{-x}\cos 2x$	ⓔ $A\,e^{2x}\cos x$
ⓕ $A\,e^{x}\sin 2x$	ⓖ $A\,e^{-x}\sin 2x$	ⓗ $A\,e^{2x}\sin x$

(A は $A > 0$ である任意定数)

(2)　(1) で求めた解の $x > 0$ におけるグラフの概形は，

(i) の場合は $\boxed{\mathbf{44}}$，

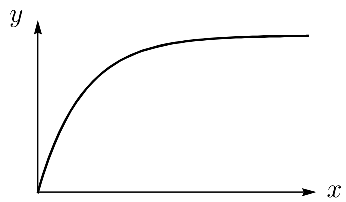
(ii) の場合は $\boxed{\mathbf{45}}$，

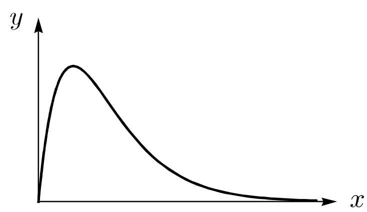
(iii) の場合は $\boxed{\mathbf{46}}$

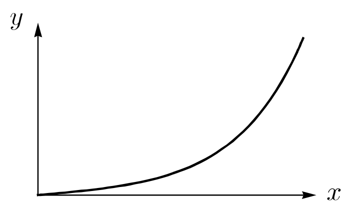
となる．

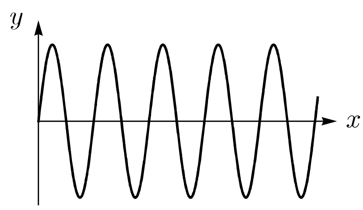
(注意) 解答群中のグラフでは，A の値および x 軸の縮尺はグラフごとに異なる．

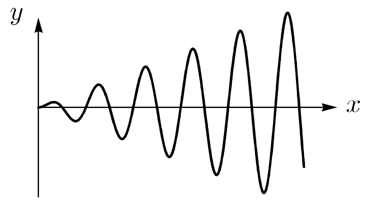
$\boxed{\mathbf{44}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{46}}$ の解答群

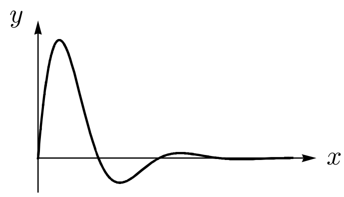
⓪


①


②


③


④


⑤


問 4 $y(x)$, $z(x)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = y + 3\,z \\ z' = k\,y \end{cases}$$

を初期条件 $y(0) = 2$, $z(0) = 1$ のもとで考える．ただし k は定数とする．

(1) $(*)$ の 2 つの方程式から z を消去し，y に関する単独の 2 階微分方程式を導くと，

$$(**) \qquad y'' - y' - 6\,y = 0$$

となるのは $k = \boxed{\textbf{47}}$ のときである．$(**)$ に対する初期条件は $y(0) = 2$, $y'(0) = \boxed{\textbf{48}}$ となる．

$\boxed{47}$ ・ $\boxed{48}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6
	⑦ -1	⑧ -2	⑨ -3	ⓐ -4	ⓑ -5	ⓒ -6

(2) 初期条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = \boxed{\textbf{48}}$ を満たす方程式 $(**)$ の解は，
$y(x) = \boxed{\textbf{49}}$ である．

$\boxed{49}$ の解答群

⓪ $\dfrac{2}{5}\,e^{-3x} + \dfrac{8}{5}\,e^{2x}$	① $\dfrac{1}{5}\,e^{-3x} + \dfrac{9}{5}\,e^{2x}$	② $-\dfrac{1}{5}\,e^{-3x} + \dfrac{11}{5}\,e^{2x}$
③ $\dfrac{6}{5}\,e^{3x} + \dfrac{4}{5}\,e^{-2x}$	④ $\dfrac{7}{5}\,e^{3x} + \dfrac{3}{5}\,e^{-2x}$	⑤ $\dfrac{9}{5}\,e^{3x} + \dfrac{1}{5}\,e^{-2x}$

計算用紙

問 5 微分方程式

$$(*) \qquad y'' + 9y = K\cos ax$$

を考える．ここで K, a は定数で，$K \neq 0,\ \ a > 0$ とする．

(1) 方程式 $(*)$ が $y = A\cos ax$ （A は定数）なる形の特殊解をもつのは，$a \neq$ $\boxed{\mathbf{50}}$ の場合である．このとき，$A =$ $\boxed{\mathbf{51}}$ となる．

$\boxed{\mathbf{50}}$ **の解答群**

⓪ 3 ① 6 ② 9 ③ 81 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{6}$

$\boxed{\mathbf{51}}$ **の解答群**

⓪ $K(3+a^2)$ ① $K(3-a^2)$ ② $\dfrac{K}{3+a^2}$ ③ $\dfrac{K}{3-a^2}$

④ $K(9+a^2)$ ⑤ $K(9-a^2)$ ⑥ $\dfrac{K}{9+a^2}$ ⑦ $\dfrac{K}{9-a^2}$

(2) $a =$ $\boxed{\mathbf{50}}$ のとき，方程式 $(*)$ は，関数 $\varphi(x) =$ $\boxed{\mathbf{52}}$ とすると，$y = B\varphi(x)\sin ax$ （B は定数）なる形の特殊解をもつ．

$\boxed{\mathbf{52}}$ **の解答群**

⓪ e^{-ax} ① e^{ax} ② $\cos ax$ ③ $\cos a^2x$ ④ x ⑤ x^2

(3) $(*)$ において $K = 6,\ \ a = 3$ とおいた方程式

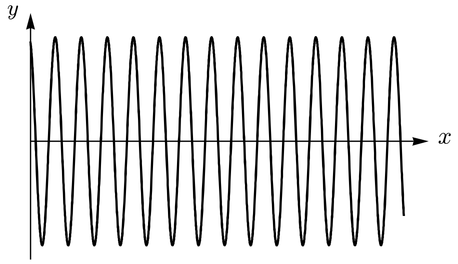
$$y'' + 9\,y = 6\cos 3x$$

を初期条件 $y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1$ のもとで考える．このとき解の $x \geqq 0$ におけるグラフの概形は $\boxed{\mathbf{53}}$ である．

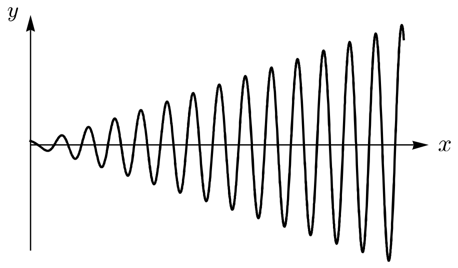
（注意）解答群中のグラフでは，y 軸の縮尺はグラフごとに異なる．

$\boxed{53}$ の解答群

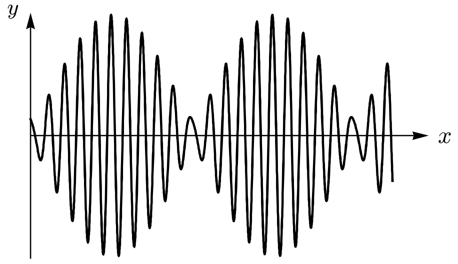
⓪



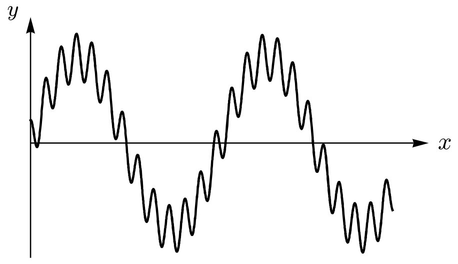
①



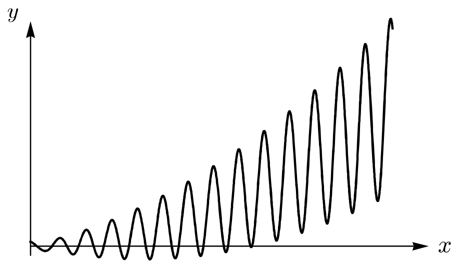
②



③



④



第４分野　確率・統計

〔 問１～問４：解答番号 $\boxed{54}$ ～ $\boxed{71}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率，A^c は A の余事象を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X), V(X), D(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散，標準偏差を表す．

問１ (1) 確率変数 X の確率分布が，

X の値	0	10	20	30
確率	a	b	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

（a, b は定数）

で与えられている．このとき，$E(X) = 10$ ならば $b =$ $\boxed{54}$ であり，$V(X) =$ $\boxed{55}$ である．

$\boxed{54}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{1}{4}$　⑥ $\frac{3}{4}$　⑦ $\frac{1}{5}$　⑧ $\frac{2}{5}$　⑨ $\frac{3}{5}$　ⓐ $\frac{4}{5}$

ⓑ $\frac{1}{10}$　ⓒ $\frac{3}{10}$　ⓓ $\frac{7}{10}$　ⓔ $\frac{9}{10}$

$\boxed{55}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ 10　⑦ 20　⑧ 30　⑨ 40　ⓐ 50

ⓑ 100　ⓒ 200　ⓓ 300　ⓔ 400　ⓕ 500

(2) 確率変数 X の期待値と分散が $E(X)=2$, $V(X)=1$ であるとする．いま確率変数 Y が X と同じ確率分布に従っているとき，$\boxed{\mathbf{56}}$ ．

$\boxed{\mathbf{56}}$ **の解答群**

⓪ $E(Y)$ も $V(Y)$ も定まらない

① $V(Y)=1$ とは限らないが，$E(Y)=2$ である

② $E(Y)=2$ とは限らないが，$V(Y)=1$ である

③ $E(Y)=2$, $V(Y)=1$ である

問 2　2 つの事象 A, B に対し，$P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$ とする．また，事象 A が起こったときの事象 B の起こる条件付き確率を $P(B\,|\,A)$ で表すとき，$P(B\,|\,A)=\dfrac{1}{6}$ であるとする．

(1)　A と B は $\boxed{\textbf{57}}$．

(2)　$P(A\cap B)=\boxed{\textbf{58}}$，$P(A\cup B)=\boxed{\textbf{59}}$ である．

(3)　事象 C が $P(C)=\dfrac{1}{2}$ かつ $A\cap B\subset C$ を満たすとき，$P(A\cap B\,|\,C)=\boxed{\textbf{60}}$ である．

$\boxed{\textbf{57}}$ の解答群

⓪ 独立である　　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

$\boxed{\textbf{58}}$ 〜 $\boxed{\textbf{60}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{1}{3}$	④ $\dfrac{2}{3}$	
⑤ $\dfrac{1}{4}$	⑥ $\dfrac{3}{4}$	⑦ $\dfrac{1}{5}$	⑧ $\dfrac{2}{5}$	⑨ $\dfrac{3}{5}$	ⓐ $\dfrac{4}{5}$
ⓑ $\dfrac{1}{6}$	ⓒ $\dfrac{5}{6}$	ⓓ $\dfrac{1}{12}$	ⓔ $\dfrac{5}{12}$	ⓕ $\dfrac{7}{12}$	ⓖ $\dfrac{11}{12}$

計算用紙

問 3 (1) 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (0 \leqq x < 1)\\[2ex] \dfrac{5}{6} & (1 \leqq x < 2)\\[2ex] 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

で与えられている．このとき，$P(X \leqq x)=\dfrac{1}{2}$ を満たすのは $x=$ $\boxed{\mathbf{61}}$ である．また，$E(X)=$ $\boxed{\mathbf{62}}$，$V(X)=$ $\boxed{\mathbf{63}}$ である．

$\boxed{61}$ 〜 $\boxed{63}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\frac{1}{2}$	④ $\frac{3}{2}$	⑤ $\frac{1}{3}$
⑥ $\frac{2}{3}$	⑦ $\frac{4}{3}$	⑧ $\frac{5}{3}$	⑨ $\frac{1}{5}$	ⓐ $\frac{2}{5}$	ⓑ $\frac{6}{5}$
ⓒ $\frac{7}{5}$	ⓓ $\frac{1}{9}$	ⓔ $\frac{2}{9}$	ⓕ $\frac{10}{9}$	ⓖ $\frac{11}{9}$	

(2) 確率変数 Y が区間 $[0, a]$ 上の一様分布に従っているとする．このとき，$P(0 \leqq Y \leqq 1)=\dfrac{1}{6}$ とすると，$a=$ $\boxed{\mathbf{64}}$ で，

$$P(2 \leqq Y \leqq 4)= \boxed{\mathbf{65}}$$

である．

$\boxed{64}$ ・ $\boxed{65}$ の解答群

⓪ 0	① $\frac{1}{6}$	② $\frac{1}{5}$	③ $\frac{1}{4}$	④ $\frac{1}{3}$	⑤ $\frac{1}{2}$	
⑥ 1	⑦ 2	⑧ 3	⑨ 4	ⓐ 5	ⓑ 6	ⓒ 7

計算用紙

問 4　A 大学の U 教授の研究室では，毎年生物実験用の魚の一種を飼育している．今年は昨年までよりも栄養の豊かな環境で飼育したため，体長が大きくなることが予想される．今までの経験から，この魚の体長は正規分布に従い，昨年までの体長の母平均は 5.90 cm で，さらに体長の母分散は飼育環境によって変化はなく，1.17^2 cm^2 と仮定してよいことがわかっている．今年成魚になった魚のうち，100 匹 を選び，これらの体長を測定したところ，標本平均値は 6.10 cm であった．

今年の魚の体長について，母平均 μ の変化を調べるために，μ に対する片側検定を行うことにし，$\mu_0 = 5.90$,　$\sigma^2 = 1.17^2$,　$\overline{x} = 6.10$,　$n = 100$ とおき

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$,

対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$

と設定する．選び出した 100 匹の魚の体長を表す確率変数をそれぞれ $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とすると，これらはすべて独立で平均 μ, 分散 1.17^2 の正規分布 $N(\mu,\, 1.17^2)$ に従っている．したがって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

は平均 $\boxed{\textbf{66}}$，分散 $\boxed{\textbf{67}}$ の $\boxed{\textbf{68}}$ に従う．帰無仮説 H_0 のもとでは，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 5.90}{1.17/\sqrt{100}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従い，正規分布表から，

$$P(-1.64 < Z < 1.64) \fallingdotseq 0.9$$

がわかる．この式から，$1.64 \times \dfrac{1.17}{\sqrt{100}} \fallingdotseq 0.192$ に注意すると，

$$P(\overline{X} - 5.90 \geqq 0.192) \fallingdotseq \boxed{\textbf{69}}$$

となる．一方，$\overline{x}$ は，

$$\overline{x} - 5.90 = 6.10 - 5.90 > 0.192$$

を満たすので，H_0 は有意水準 $\boxed{\textbf{70}}$ % で $\boxed{\textbf{71}}$．

$\boxed{66}$ ・ $\boxed{67}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{\mu}{100}$　① 100μ　② μ　③ 100×1.17

④ 1.17^2　⑤ 100×1.17^2　⑥ $100^2 \times 1.17^2$　⑦ $\dfrac{1.17^2}{100}$　⑧ $\dfrac{1.17^2}{100^2}$

$\boxed{68}$ **の解答群**

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布

④ 指数分布　⑤ t 分布

$\boxed{69}$ **の解答群**

⓪ 0　① 0.05　② 0.1　③ 0.15　④ 0.2　⑤ 0.25

⑥ 0.75　⑦ 0.8　⑧ 0.85　⑨ 0.9　ⓐ 0.95

$\boxed{70}$ **の解答群**

⓪ 0　① 5　② 10　③ 20　④ 30　⑤ 40

⑥ 60　⑦ 70　⑧ 80　⑨ 90　ⓐ 95

$\boxed{71}$ **の解答群**

⓪ 棄却される　① 採択される