EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2015年12月12日（土）
4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

＊受験分野は，各大学の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと．
(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．
(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．
(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(8) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(9) 問題冊子は持ち帰ること．
(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること．
(11) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\mathbf{23}}$ は ($\boxed{\mathbf{23}}$) という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1}x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問１　(1)　次の２つの極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x} = \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\tan^{-1}x - \dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}} = \boxed{\mathbf{2}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ π	⑤ $\dfrac{\pi}{2}$
⑥ ∞	⑦ -1	⑧ -2	⑨ $-\dfrac{1}{2}$	ⓐ $-\pi$	ⓑ $-\dfrac{\pi}{2}$
ⓒ $-\infty$					

(2)　関数 $(1-x)e^x$ のマクローリン展開（$x=0$ を中心とするテイラー展開）を

$$(1-x)e^x = 1 + a\,x + b\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3 + \cdots$$

とするとき，$a=$ $\boxed{\textbf{3}}$，$b=$ $\boxed{\textbf{4}}$ である．

$\boxed{\textbf{3}}$・$\boxed{\textbf{4}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ $\frac{1}{2}$
⑥ $\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{2}{3}$	⑧ $\frac{1}{4}$	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ $-\frac{1}{2}$	ⓔ $-\frac{1}{3}$	ⓕ $-\frac{2}{3}$	ⓖ $-\frac{1}{4}$	

問 2 xy 平面において，方程式

$$(*) \qquad \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{4} \qquad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{3} \right)$$

が表す曲線 C を考える．

(1) 曲線 C は点 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{6},\ \boxed{\mathbf{5}}\right)$ を通る．

(2) y を x の関数とみなし，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を y' で表すとき，$\dfrac{d}{dx}\sin^2 y = \boxed{\mathbf{6}}$ である．

(3) 方程式 $(*)$ の両辺を x で微分し，(2) の結果を用い，さらに $(x, y) = \left(\frac{\pi}{6},\ \boxed{\mathbf{5}}\right)$ を代入すると，点 P における曲線 C の接線の傾き $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\mathbf{7}}$ を得る．

5 の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{1}{3}$	④ $\dfrac{1}{4}$	⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
⑥ $\dfrac{\pi}{3}$	⑦ $\dfrac{\pi}{4}$	⑧ $\dfrac{\pi}{6}$	⑨ $\dfrac{\pi}{8}$	ⓐ $\dfrac{\pi}{12}$	ⓑ $\dfrac{\pi}{24}$

6 の解答群

⓪ $\sin^2 y'$	① $\cos^2 y'$	② $2\,y' \sin y$
③ $2\,y' \cos y$	④ $y' \sin^2 y$	⑤ $y' \cos^2 y$
⑥ $2\,y' \sin y\, \cos y$	⑦ $2\,y' \sin^{-1} y$	⑧ $2\,y' \cos^{-1} y$

7 の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\sqrt{3}$	④ $\dfrac{1}{2}$
⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	⑥ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	⑧ -1	⑨ -2
ⓐ $-\sqrt{3}$	ⓑ $-\dfrac{1}{2}$	ⓒ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	ⓓ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	ⓔ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

計算用紙

問 3　広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ の値を求める.

(1)　$0 < a < \dfrac{1}{2}$ を満たす a に対して

$$J(a) = \int_a^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$$

とおく．このとき，$t = x - 1$ とおくことにより，

$$J(a) = \boxed{\mathbf{8}} - \sin^{-1} \boxed{\mathbf{9}}$$

を得る.

$\boxed{\mathbf{8}}$ の解答群

⓪ 0	① π	② $\dfrac{\pi}{2}$	③ $\dfrac{3\pi}{2}$	④ $\dfrac{\pi}{3}$
⑤ $\dfrac{5\pi}{3}$	⑥ $\dfrac{\pi}{4}$	⑦ $\dfrac{7\pi}{4}$	⑧ $\dfrac{\pi}{6}$	⑨ $\dfrac{11\pi}{6}$
ⓐ $-\pi$	ⓑ $-\dfrac{\pi}{2}$	ⓒ $-\dfrac{\pi}{3}$	ⓓ $-\dfrac{\pi}{4}$	ⓔ $-\dfrac{\pi}{6}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ の解答群

⓪ a	① $2a$	② $a+1$	③ $a+2$
④ $a-1$	⑤ $a-2$	⑥ $1-a$	⑦ $2-a$
⑧ $2(a+1)$	⑨ $2(a-1)$	ⓐ $2(1-a)$	ⓑ $a(2-a)$

(2)　(1) の結果を用いると，$I = \lim_{a \to +0} J(a) = \boxed{\textbf{10}}$ が導かれる．

$\boxed{\textbf{10}}$ **の解答群**

⓪ 0	① π	② $\dfrac{\pi}{2}$	③ $\dfrac{\pi}{3}$	④ $\dfrac{7\pi}{3}$
⑤ $\dfrac{\pi}{4}$	⑥ $\dfrac{9\pi}{4}$	⑦ $\dfrac{\pi}{6}$	⑧ $\dfrac{13\pi}{6}$	⑨ $-\dfrac{\pi}{2}$
ⓐ $-\dfrac{\pi}{3}$	ⓑ $-\dfrac{2\pi}{3}$	ⓒ $-\dfrac{\pi}{4}$	ⓓ $-\dfrac{3\pi}{4}$	ⓔ $-\dfrac{\pi}{6}$
ⓕ $-\dfrac{5\pi}{6}$	ⓖ ∞	ⓗ $-\infty$		

問 4 xyz 空間において，

$$z = 5x^3 + 4x^2y - 6xy^2 + y^3$$

で与えられる曲面 S を考える．

(1) 点 A $(1, 2, \boxed{\textbf{11}})$ は曲面 S 上の点である．

(2) 点 A において，曲面 S に接する平面 T は，方程式

$$z - \boxed{\textbf{11}} = \boxed{\textbf{12}}\,(x-1) + \boxed{\textbf{13}}\,(y-2)$$

で与えられる．

(3) 接平面 T 上において，点 A と異なる点 Q (x, y, z) をとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z - \boxed{\textbf{11}} \end{pmatrix}$$

は接平面 T に平行なベクトルである．一方，ベクトル

$$\begin{pmatrix} \boxed{\textbf{12}} \\ \boxed{\textbf{13}} \\ \boxed{\textbf{14}} \end{pmatrix}$$

は $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と直交するので，接平面 T の法線ベクトルである．

$\boxed{\textbf{11}}$ 〜 $\boxed{\textbf{14}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

計算用紙

問 5　累次積分 $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx \right) dy$ の値を求める．

集合 D を

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leqq y \leqq 1,\ \ y \leqq x \leqq 1 \right\}$$

とすると，それは

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq 1,\ \ \boxed{\textbf{15}} \leqq y \leqq \boxed{\textbf{16}} \right\}$$

とも表される．このことより

$$I = \iint_D e^{-x^2} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\boxed{\textbf{15}}}^{\boxed{\textbf{16}}} e^{-x^2} dy \right) dx = \boxed{\textbf{17}}$$

を得る．

$\boxed{\textbf{15}}$ ・ $\boxed{\textbf{16}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② e	③ $\dfrac{1}{e}$	④ x	⑤ $\dfrac{1}{x}$
⑥ $\sqrt{x}$	⑦ e^{-x^2}	⑧ y	⑨ $\dfrac{1}{y}$	ⓐ $\sqrt{y}$	ⓑ e^{-y^2}

$\boxed{\textbf{17}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $e-1$
③ $1-e$	④ e^2-1	⑤ $1-e^2$
⑥ $\dfrac{1}{e}-1$	⑦ $1-\dfrac{1}{e}$	⑧ $\dfrac{1}{e^2}-1$
⑨ $1-\dfrac{1}{e^2}$	ⓐ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e}-1\right)$	ⓑ $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$
ⓒ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e^2}-1\right)$	ⓓ $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e^2}\right)$	

計算用紙

第２分野　線形代数

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{18}}$ ～ $\boxed{\textbf{33}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\mathrm{rank}\,A$ は A の階数（ランク）を表す．また，1 次独立，1 次従属はそれぞれ線形独立，線形従属ともいう．

問 1 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) 行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\textbf{18}}$ である．

(2) 行列式 $|A|$ を第 2 行に関して余因子展開すると，

$$|A| = \boxed{\textbf{19}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

となる．

$\boxed{\textbf{18}}$ ・ $\boxed{\textbf{19}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

計算用紙

問 2　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -4 \\ -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

に対し，$a = \boxed{\mathbf{20}}$，$b = \boxed{\mathbf{21}}$ であるとき，$(AB)^{-1} = C$ が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{20}}$ ・ $\boxed{\mathbf{21}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

計算用紙

問 3　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，3 つのベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ を考える．

(1)　θ を定数とし，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ は $\boxed{\mathbf{22}}$ ．

(2)　p, q, r を正の定数とし，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{q}{p} \\ \dfrac{r}{p} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \dfrac{p}{q} \\ 1 \\ \dfrac{r}{q} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \dfrac{p}{r} \\ \dfrac{q}{r} \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ は $\boxed{\mathbf{23}}$ ．このとき，$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ が張る $\mathbb{R}^3$ の部分空間の次元は $\boxed{\mathbf{24}}$ である．

$\boxed{\mathbf{22}}$ ・ $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答群

⓪ 1 次独立であり，どの 2 つのベクトルも互いに直交する

① 1 次独立であり，どの 2 つのベクトルも互いに直交しない

② 1 次従属であり，どの 2 つのベクトルも互いに直交する

③ 1 次従属であり，どの 2 つのベクトルも互いに直交しない

$\boxed{\mathbf{24}}$ の解答群

⓪ 0　　① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 6　　⑥ 9

計算用紙

問 4　a を定数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}$$

とする．また，A に第 4 列として $\boldsymbol{b}$ を追加した行列を

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & a \end{pmatrix}$$

とおく．

(1)　$a \neq \boxed{\textbf{25}}$ のとき，$\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} B = \boxed{\textbf{26}}$ であり，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は存在しない．

(2)　$a = \boxed{\textbf{25}}$ のとき，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = \boxed{\textbf{27}}$ であり，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{28}} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ \boxed{\textbf{29}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

と表される無数の解をもつ．

$\boxed{\textbf{25}}$ 〜 $\boxed{\textbf{29}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ −1	ⓐ −2	ⓑ −3
ⓒ −4	ⓓ −5	ⓔ −6	ⓕ −7	ⓖ −8	

計算用紙

問 5　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　A の固有値のうち 1 つは 2 であり，残りの 2 つは $\boxed{\mathbf{30}}$ と $\boxed{\mathbf{31}}$ である．ただし，$\boxed{\mathbf{30}} < 2 < \boxed{\mathbf{31}}$ とする．

$\boxed{30}$ ・ $\boxed{31}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5	

(2)　ベクトル $\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{32}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 固有値 2 に対する固有ベクトルであり，

ベクトル $\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{33}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 固有値 $\boxed{\mathbf{31}}$ に対する固有ベクトルである．

$\boxed{32}$ ・ $\boxed{33}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{3}{2}$	⑥ $\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{2}{3}$	⑧ -1	⑨ -2
ⓐ -3	ⓑ $-\frac{1}{2}$	ⓒ $-\frac{3}{2}$	ⓓ $-\frac{1}{3}$	ⓔ $-\frac{2}{3}$

計算用紙

第3分野　常微分方程式

〔問 1 〜 問 5 ： 解答番号　$\boxed{\mathbf{34}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{50}}$ 〕

(注意)　各問における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す. また, 特殊解は特解ともいう.

問 1　微分方程式

$$y' = \frac{1}{y^2}$$

の一般解は，任意定数 C を用いて $y = \boxed{\mathbf{34}}$ と表される．また，$y(0) = -2$ となるように C を定めるとき，$y(x) = 1$ を満たすのは $x = \boxed{\mathbf{35}}$ である．

$\boxed{\mathbf{34}}$ の解答群

⓪ C	① $\sqrt[3]{x} + C$	② $\sqrt[3]{x + C}$	③ $3x + C$
④ $\sqrt[3]{3x} + C$	⑤ $\sqrt[3]{3x + C}$	⑥ $y^2 + C$	⑦ $\dfrac{y^3}{3} + C$
⑧ $-\dfrac{1}{y} + C$	⑨ $\dfrac{x}{y^2} + C$		

$\boxed{\mathbf{35}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 8
⑤ 9	⑥ 16	⑦ 27	⑧ -1	⑨ -2
ⓐ -3	ⓑ -8	ⓒ -9	ⓓ -16	ⓔ -27

計算用紙

問 2 次の微分方程式 (i), (ii), (iii) を $x>0$ の範囲で考える.

(i) $y' = xy$

(ii) $y' = \dfrac{y}{x}$

(iii) $y' = -\dfrac{y}{x}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ である特殊解 y をもつ方程式は，すべて挙げると， $\boxed{\textbf{36}}$ である.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} y(x) = \infty$ である特殊解 y をもつ方程式は，すべて挙げると， $\boxed{\textbf{37}}$ である.

(3) $y>0$ であり， $\displaystyle\lim_{x\to+0} y(x) = 0$ である特殊解 y をもつ方程式は，すべて挙げると， $\boxed{\textbf{38}}$ である.

$\boxed{36}$ ～ $\boxed{38}$ の解答群

⓪ (i), (ii), (iii)　① (i), (ii)　② (i), (iii)　③ (ii), (iii)

④ (i)　⑤ (ii)　⑥ (iii)

計算用紙

問 3　a を正の定数とし，微分方程式

$$y'' + ay = 0$$

の解 y のうち，定数解 $y = 0$ 以外を考える．

(1)　$y(0) = 0$ を満たす解は，0 でない任意の定数 C を用いて $y = \boxed{\textbf{39}}$ と表される．

(2)　$a = \boxed{\textbf{40}}$ のとき，(1) の解は $y(1) = 0$ を満たす．

$\boxed{\textbf{39}}$ の解答群

⓪ $C\,(e^{ax} - e^{-ax})$	① $C\,(e^{\sqrt{a}\,x} - e^{-\sqrt{a}\,x})$	② $C\,x\,e^{ax}$
③ $C\,x\,e^{\sqrt{a}\,x}$	④ $C\,\cos ax$	⑤ $C\,\cos\sqrt{a}\,x$
⑥ $C\,x\cos ax$	⑦ $C\,x\cos\sqrt{a}\,x$	⑧ $C\,\sin ax$
⑨ $C\,\sin\sqrt{a}\,x$	ⓐ $C\,x\sin ax$	ⓑ $C\,x\sin\sqrt{a}\,x$

$\boxed{\textbf{40}}$ の解答群

⓪ n	① n^2	② $\sqrt{n}$	
③ $n\pi$	④ $(n\pi)^2$	⑤ $\sqrt{n\pi}$	(n は自然数)

計算用紙

問 4　微分方程式

$$(*) \qquad y'' - y' - 2y = 40\sin 2x$$

の解 y のうち，初期条件

$$(**) \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

を満たすものを求める．

(1)　$(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' - y' - 2y = 0$$

の一般解は，任意定数 C_1, C_2 を用いて

$$y = C_1\, e^{\boxed{\mathbf{41}}\,x} + C_2\, e^{\boxed{\mathbf{42}}\,x} \quad (\text{ただし } \boxed{\mathbf{41}} < \boxed{\mathbf{42}})$$

と表される．

(2)　$(*)$ の特殊解のうち，定数 A, B を用いて

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x$$

と表されるものを求めると，$A = \boxed{\mathbf{43}}$，　$B = \boxed{\mathbf{44}}$ となる．

(3)　$(*)$ の一般解は

$$y = C_1\, e^{\boxed{\mathbf{41}}\,x} + C_2\, e^{\boxed{\mathbf{42}}\,x} + \boxed{\mathbf{43}}\cos 2x + \boxed{\mathbf{44}}\sin 2x$$

であるから，初期条件 $(**)$ を満たすように C_1, C_2 を定めると

$$C_1 = \boxed{\mathbf{45}}, \quad C_2 = \boxed{\mathbf{46}}$$

となる．

$\boxed{41}$ ～ $\boxed{46}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ $\frac{1}{2}$	⑧ $\frac{3}{2}$	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ $-\frac{1}{2}$	ⓖ $-\frac{3}{2}$	

計算用紙

問 5　物体を真上に投げたとき，その物体の時刻 t における速度 $v(t)$ が微分方程式

$$(*) \qquad \frac{dv}{dt} = -kv - g \qquad (k,\ g \text{ は正の定数})$$

を満たす場合を考える．ただし，物体の運動は直線的で，上昇時に $v(t)$ は正の値をとり，下降時に $v(t)$ は負の値をとるものとする．

(1)　微分方程式 $(*)$ の一般解は，任意定数 C を用いて

$$v(t) = C\,e^{\boxed{\mathbf{47}}\,t} + \boxed{\mathbf{48}}$$

と表される．

$\boxed{47}$ ・ $\boxed{48}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ -1	④ -2
⑤ k	⑥ g	⑦ kg	⑧ $\dfrac{k}{g}$	⑨ $\dfrac{g}{k}$
ⓐ $-k$	ⓑ $-g$	ⓒ $-kg$	ⓓ $-\dfrac{k}{g}$	ⓔ $-\dfrac{g}{k}$

(2)　V_0 を正の定数とするとき，$v(0) = V_0$ を満たす微分方程式 $(*)$ の解は

$$v(t) = \boxed{\mathbf{49}}\ e^{\boxed{\mathbf{47}}\,t} + \boxed{\mathbf{48}}$$

である．

$\boxed{49}$ の解答群

⓪ V_0	① $-V_0$	② $V_0 + k$	③ $V_0 - k$
④ $V_0 + g$	⑤ $V_0 - g$	⑥ $V_0 + kg$	⑦ $V_0 - kg$
⑧ $V_0 + \dfrac{k}{g}$	⑨ $V_0 - \dfrac{k}{g}$	ⓐ $V_0 + \dfrac{g}{k}$	ⓑ $V_0 - \dfrac{g}{k}$

(3)　(2) で求めた解 $v(t)$ の符号が正から負に変わる時刻 T は，$v(T)=0$ から導かれ，$T=$ $\boxed{\textbf{50}}$ である．

$\boxed{\textbf{50}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{kV_0}{g}$　① $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{V_0+kg}{kg}$　② $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{V_0-kg}{kg}$

③ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{kg}{V_0+kg}$　④ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{kg}{V_0-kg}$　⑤ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{kV_0+g}{g}$

⑥ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{kV_0-g}{g}$　⑦ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{g}{kV_0+g}$　⑧ $\dfrac{1}{k}\log\dfrac{g}{kV_0-g}$

第4分野　確率・統計

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{51}}$ ～ $\boxed{\mathbf{70}}$ 〕

(注意)　事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1　確率変数 X の確率分布が

X の値	2	4	6	8
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	a

(a は定数)

で与えられている．このとき，$a = \boxed{\mathbf{51}}$ であり，$E(X) = \boxed{\mathbf{52}}$ である．また，$E(X^2) = \boxed{\mathbf{53}}$ であるから，$V(X)$ は $\boxed{\mathbf{53}} - \boxed{\mathbf{52}}^2$ に等しい．

$\boxed{\mathbf{51}}$ ～ $\boxed{\mathbf{53}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 30	⑦ $\frac{1}{2}$	⑧ $\frac{1}{3}$	⑨ $\frac{1}{4}$	ⓐ $\frac{1}{5}$	ⓑ $\frac{8}{3}$
ⓒ $\frac{13}{3}$	ⓓ $\frac{16}{3}$	ⓔ $\frac{19}{3}$	ⓕ $\frac{92}{3}$	ⓖ $\frac{98}{3}$	ⓗ $\frac{104}{3}$

計算用紙

問 2　ある工場では，同じ型の部品が a, b, c の 3 社から 5 : 3 : 2 の割合で納入されている．a 社が自社の部品を調査したところ，不良品の割合は 1% であった．同様に，b 社では 2%, c 社では 2.5% であった．

工場に納入された全部品の中から無作為に取り出した 1 個が a, b, c 社からのものである事象をそれぞれ A, B, C とする．また，その取り出した 1 個が不良品である事象を F とする．

(1)　$P(A) = \boxed{\mathbf{54}}$，　$P(A \cap F) = \boxed{\mathbf{55}}$　である．

(2)　(1) と同様に $P(B \cap F)$, $P(C \cap F)$ を求めることにより，$P(F) = \boxed{\mathbf{56}}$　を得る．

(3)　取り出した部品 1 個が不良品であったとき，それが a 社から納入されたものである確率，すなわち事象 F が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率 $P(A|F)$ の値は $\boxed{\mathbf{57}}$　である．

$\boxed{\mathbf{54}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{57}}$ の解答群

⓪ 0	① $\dfrac{1}{2}$	② $\dfrac{3}{8}$	③ $\dfrac{5}{8}$	④ $\dfrac{2}{11}$
⑤ $\dfrac{5}{16}$	⑥ $\dfrac{1}{20}$	⑦ $\dfrac{4}{25}$	⑧ $\dfrac{1}{55}$	⑨ $\dfrac{1}{100}$
ⓐ $\dfrac{2}{125}$	ⓑ $\dfrac{1}{200}$	ⓒ $\dfrac{11}{200}$	ⓓ $\dfrac{1}{2000}$	ⓔ $\dfrac{3}{2000}$

計算用紙

問 3 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が定数 k を用いて

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & (|x| \leqq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と表されるとする．このとき，$k =$ $\boxed{\mathbf{58}}$ であり，$P\left(|X| \leqq \dfrac{1}{2}\right) =$ $\boxed{\mathbf{59}}$ である．

また，$E(X) =$ $\boxed{\mathbf{60}}$，$V(X) =$ $\boxed{\mathbf{61}}$ である．

$\boxed{\mathbf{58}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{61}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ $\dfrac{1}{2}$	⑤ $\dfrac{3}{2}$
⑥ $\dfrac{5}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{3}$	⑧ $\dfrac{2}{3}$	⑨ $\dfrac{4}{3}$	ⓐ $\dfrac{5}{3}$	ⓑ $\dfrac{1}{5}$
ⓒ $\dfrac{2}{5}$	ⓓ $\dfrac{3}{5}$	ⓔ $\dfrac{4}{5}$	ⓕ $\dfrac{1}{8}$	ⓖ $\dfrac{3}{8}$	ⓗ $\dfrac{5}{8}$

計算用紙

問 4　コインを 1 回投げたとき，表と裏の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ であるものとする．そのコインを 10 回投げ，各回において表が出たら 2 点，裏が出たら -1 点の点数を与える．また，表が出る回数を X, 点数の合計を Y とおく．

(1)　X は二項分布 $B\left(10, \dfrac{1}{2}\right)$ に従い，$E(X) = \boxed{\textbf{62}}$, $V(X) = \boxed{\textbf{63}}$ である．

$\boxed{62}$ ・ $\boxed{63}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ 5	⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9
ⓐ $\dfrac{1}{2}$	ⓑ $\dfrac{3}{2}$	ⓒ $\dfrac{5}{2}$	ⓓ $\dfrac{7}{2}$	ⓔ $\dfrac{9}{2}$

(2)　Y を X の式で表すと $Y = \boxed{\textbf{64}}$ となるので，$E(Y) = \boxed{\textbf{65}}$, $V(Y) = \boxed{\textbf{66}}$ である．

$\boxed{64}$ の解答群

⓪ $X + 10$	① $X - 10$	② $2X$	③ $2X - 1$
④ $2X + 10$	⑤ $2X - 10$	⑥ $3X$	⑦ $3X - 1$
⑧ $3X + 10$	⑨ $3X - 10$	ⓐ X^2	ⓑ $10 - X$

$\boxed{65}$ ・ $\boxed{66}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 5	④ 10	⑤ 15
⑥ $\dfrac{1}{2}$	⑦ $\dfrac{5}{2}$	⑧ $\dfrac{15}{2}$	⑨ $\dfrac{25}{2}$	ⓐ $\dfrac{45}{2}$	ⓑ $\dfrac{75}{2}$
ⓒ $\dfrac{1}{4}$	ⓓ $\dfrac{5}{4}$	ⓔ $\dfrac{15}{4}$	ⓕ $\dfrac{25}{4}$	ⓖ $\dfrac{45}{4}$	ⓗ $\dfrac{75}{4}$

計算用紙

問 5 ある工場で生産される薬剤 1 個あたりの質量の分布は，平均 μ mg, 標準偏差 σ mg の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従い，これまでの経験から標準偏差は $\sigma = 50$ と仮定してよいことがわかっている．いま，生産された薬剤から無作為に何個かを標本として取り出し，それぞれの質量を測定することにより，μ の値を信頼度 95% で区間推定する．そして，信頼区間の幅を 35 mg 以下にするために必要な標本の個数の最小値を求める．

まず，標本の個数を n とし，それぞれの質量を表す確率変数を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とすると，これらは互いに独立であり，いずれも正規分布 $N(\mu, 50^2)$ に従う．よって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

は正規分布 $N(\boxed{\mathbf{67}}, \boxed{\mathbf{68}})$ に従うので，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\boxed{\mathbf{69}}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．正規分布表から

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

であることがわかり，

$$P\left(\overline{X} - 1.96 \times \boxed{\mathbf{69}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \times \boxed{\mathbf{69}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

を得る．これは，信頼度 95% の信頼区間の幅が $2 \times 1.96 \times \boxed{\mathbf{69}}$ であることを意味する．したがって，その幅を 35 以下にする個数 n の最小値は $\boxed{\mathbf{70}}$ である．

$\boxed{\mathbf{67}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② μ　③ 2μ　④ $n\mu$

⑤ $\dfrac{\mu}{n}$　⑥ μ^2　⑦ $2\mu^2$　⑧ $n\mu^2$　⑨ $\dfrac{\mu^2}{n}$

$\boxed{68}$ ・ $\boxed{69}$ の解答群

⓪ 50	① $50\,n$	② $50\,n^2$	③ $50\sqrt{n}$	④ $\dfrac{50}{n}$
⑤ $\dfrac{50}{n^2}$	⑥ $\dfrac{50}{\sqrt{n}}$	⑦ 50^2	⑧ $50^2\,n$	⑨ $50^2\,n^2$
ⓐ $\dfrac{50^2}{n}$	ⓑ $\dfrac{50^2}{n^2}$	ⓒ $\sqrt{50}$	ⓓ $\sqrt{50}\,n$	ⓔ $\dfrac{\sqrt{50}}{n}$

$\boxed{70}$ の解答群

⓪ 3	① 5	② 6	③ 15	④ 16	⑤ 17
⑥ 25	⑦ 32	⑧ 33	⑨ 35	ⓐ 36	ⓑ 50
ⓒ 68	ⓓ 83	ⓔ 85	ⓕ 100	ⓖ 256	ⓗ 280