EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2018年12月8日（土）

4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分

2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分

1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) 机の右上に学生証を提示すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(4) マークには **HB** または **B** の鉛筆 (またはシャープペンシル) を使用すること．

(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．

(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(8) 問題冊子は持ち帰ること．

(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\textbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ には $\boxed{\textbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\textbf{23}}$ は ($\boxed{\textbf{23}}$) という意味である．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\textbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問 1　次の 2 つの極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 + x + 3}\right) = \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2} = \boxed{\mathbf{2}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{3}{2}$	④ $\dfrac{5}{2}$	⑤ $\dfrac{1}{3}$
⑥ $\dfrac{2}{3}$	⑦ $\dfrac{4}{3}$	⑧ -1	⑨ $-\dfrac{1}{2}$	ⓐ $-\dfrac{3}{2}$	ⓑ $-\dfrac{5}{2}$
ⓒ $-\dfrac{1}{3}$	ⓓ $-\dfrac{2}{3}$	ⓔ $-\dfrac{4}{3}$	ⓕ ∞	ⓖ $-\infty$	

計算用紙

問 2　$-1 \leqq x \leqq 1$ において，関数

$$f(x) = \sin^{-1}x + \cos^{-1}(x^2)$$

を考える.

(1)　$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{\mathbf{3}}$ である.

$\boxed{\mathbf{3}}$ の解答群

⓪ 0	① π	② $\dfrac{\pi}{2}$	③ $\dfrac{\pi}{4}$	④ $\dfrac{3\pi}{4}$
⑤ $\dfrac{\pi}{12}$	⑥ $\dfrac{5\pi}{12}$	⑦ $\dfrac{7\pi}{12}$	⑧ $\dfrac{11\pi}{12}$	⑨ $-\pi$
ⓐ $-\dfrac{\pi}{2}$	ⓑ $-\dfrac{\pi}{4}$	ⓒ $-\dfrac{3\pi}{4}$	ⓓ $-\dfrac{\pi}{12}$	ⓔ $-\dfrac{5\pi}{12}$
ⓕ $-\dfrac{7\pi}{12}$	ⓖ $-\dfrac{11\pi}{12}$			

(2)　$f(x)$ は $x = \boxed{\mathbf{4}}$ で最大となり，$x = \boxed{\mathbf{5}}$ で最小となる.

$\boxed{\mathbf{4}}$・$\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{1}{3}$	④ $\dfrac{1}{4}$
⑤ $\dfrac{1}{5}$	⑥ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	⑨ -1
ⓐ $-\dfrac{1}{2}$	ⓑ $-\dfrac{1}{3}$	ⓒ $-\dfrac{1}{4}$	ⓓ $-\dfrac{1}{5}$	ⓔ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
ⓕ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	ⓖ $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$			

計算用紙

問 3　不定積分

$$I = \int \frac{x^4+6x^2+27}{x^2-2x+5}\,dx$$

を計算する．被積分関数は

$$\frac{x^4+6x^2+27}{x^2-2x+5} = x^2+2x+\boxed{\textbf{6}}+\frac{\boxed{\textbf{7}}}{x^2-2x+5}$$

と変形され，さらに

$$x^2-2x+5=(x-1)^2+4$$

であるから

$$I = \frac{1}{3}x^3+x^2+\boxed{\textbf{6}}\,x+\boxed{\textbf{8}}+C \qquad (C\text{ は積分定数})$$

となる．

$\boxed{\textbf{6}}$ ・ $\boxed{\textbf{7}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

$\boxed{\textbf{8}}$ の解答群

⓪ $\log\{(x-1)^2+4\}$	① $2\log\{(x-1)^2+4\}$
② $\tan^{-1}(x-1)$	③ $2\tan^{-1}(x-1)$
④ $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x-1)$	⑤ $\tan^{-1}\frac{x-1}{2}$
⑥ $2\tan^{-1}\frac{x-1}{2}$	⑦ $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-1}{2}$

計算用紙

問 4　(1)　xyz 空間において，関数

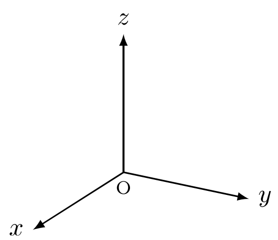
$$z = \sqrt{1 - x^2}$$

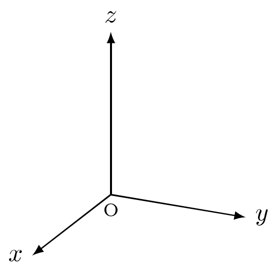
が表す曲面の概形は $\boxed{\textbf{9}}$ であり，関数

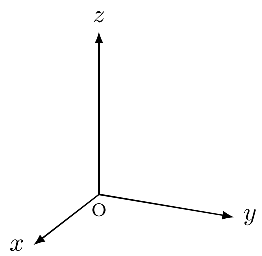
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

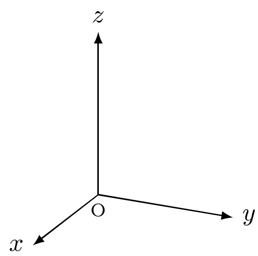
が表す曲面の概形は $\boxed{\textbf{10}}$ である．

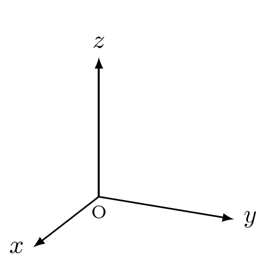
$\boxed{\textbf{9}}$ ・ $\boxed{\textbf{10}}$ の解答群

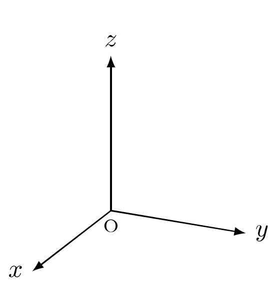
⓪


①


②


③


④


⑤


(2) 関数 $f(t)$ は t について 2 回微分可能とする．いま，$g(x,y)=f(x-2y)$ とおくと

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \boxed{\textbf{11}}\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

が成り立つ．特に，$f(t)=\sin t$ すなわち $g(x,y)=\sin(x-2y)$ であるとき

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \boxed{\textbf{12}}\,g$$

が成り立つ．

$\boxed{\textbf{11}}$ ・ $\boxed{\textbf{12}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

問 5 a, b を正の定数とする．xy 平面内の集合 D が

$$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D xy\,dxdy$$

の値を求める．変数変換 $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ を行うと，(r, θ) の集合

$$E = \left\{ (r, \theta) \,\middle|\, 0 \leqq r \leqq \boxed{\mathbf{13}},\ 0 \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{14}} \right\}$$

は D に対応する．また，変数変換のヤコビ行列式（ヤコビアン）は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{15}}$$

であるので

$$I = \iint_E \boxed{\mathbf{16}} \sin\theta\cos\theta\,drd\theta = \boxed{\mathbf{17}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{13}}$ ・ $\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{4}$	① $\dfrac{1}{2}$	② $\dfrac{3}{4}$	③ 1	④ $\dfrac{3}{2}$	⑤ 2
⑥ $\dfrac{\pi}{4}$	⑦ $\dfrac{\pi}{2}$	⑧ $\dfrac{3\pi}{4}$	⑨ π	ⓐ $\dfrac{3\pi}{2}$	ⓑ 2π

$\boxed{\mathbf{15}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{17}}$ の解答群

⓪ 0	① ab	② $\dfrac{ab}{2}$	③ $\dfrac{ab}{4}$	④ $\dfrac{ab}{8}$
⑤ a^2b^2	⑥ $\dfrac{a^2b^2}{2}$	⑦ $\dfrac{a^2b^2}{4}$	⑧ $\dfrac{a^2b^2}{8}$	⑨ abr
ⓐ abr^2	ⓑ abr^3	ⓒ a^2b^2r	ⓓ $a^2b^2r^2$	ⓔ $a^2b^2r^3$

計算用紙

第 2 分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{18}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{33}}$ 〕

問 1　(1)　等式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つように a, b, c を定めるとき，$a = \boxed{\mathbf{18}}$，$b = \boxed{\mathbf{19}}$ である．

$\boxed{\mathbf{18}}$ ・ $\boxed{\mathbf{19}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

(2)　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ におけるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える．ただし，$p^2 + q^2 > 0$ とする．$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{x}$ がなす角は $\boxed{\mathbf{20}}$ である．

$\boxed{\mathbf{20}}$ の解答群

⓪ 0	① π	② $\dfrac{\pi}{2}$	③ $\dfrac{\pi}{3}$	④ $\dfrac{2\pi}{3}$	⑤ $\dfrac{\pi}{4}$
⑥ $\dfrac{3\pi}{4}$	⑦ $\dfrac{\pi}{6}$	⑧ $\dfrac{5\pi}{6}$			

計算用紙

問 2　次の行列 A, B, C, D を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)　逆行列をもつものをすべてあげると，$\boxed{\textbf{21}}$ である．

(2)　列ベクトル 3 つが 1 次従属（線形従属）であるものをすべてあげると，$\boxed{\textbf{22}}$ である．

(3)　行列式の値が 1 に等しいものをすべてあげると，$\boxed{\textbf{23}}$ である．

$\boxed{\textbf{21}}$ 〜 $\boxed{\textbf{23}}$ の解答群

⓪ A	① B	② C
③ D	④ A, B	⑤ A, C
⑥ A, D	⑦ B, C	⑧ B, D
⑨ C, D	ⓐ A, B, C	ⓑ A, B, D
ⓒ A, C, D	ⓓ B, C, D	ⓔ A, B, C, D

計算用紙

問 3　定数 a を含む連立 1 次方程式

$$(*)\quad \begin{cases} x - y + az = a \\ -6x + 2ay - (5a+3)z = -9a+9 \\ -ax + ay - (2a+3)z = -2a-3 \end{cases}$$

について考える．なお，その拡大係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & a \\ -6 & 2a & -5a-3 & -9a+9 \\ -a & a & -2a-3 & -2a-3 \end{pmatrix}$$

とする．

(1)　A の階数（ランク）が 2 となるのは，$a = \boxed{\mathbf{24}}$ のときである．このとき，方程式 $(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \boxed{\mathbf{24}} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \boxed{\mathbf{25}} \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

と表される．

(2)　A の階数（ランク）が 1 となるのは，$a = \boxed{\mathbf{26}}$ のときである．このとき，方程式 $(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{26}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{27}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s,\ t \text{ は任意定数})$$

と表される．

$\boxed{\mathbf{24}}$ ～ $\boxed{\mathbf{27}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ −1	ⓐ −2	ⓑ −3
ⓒ −4	ⓓ −5	ⓔ −6	ⓕ −7	ⓖ −8	

計算用紙

問 4　座標平面において，点 $\mathrm{P}(x, y)$ を点 $\mathrm{Q}(u, v)$ にうつす線形写像 f を

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める．

(1)　直線 $y = x + 2$ 上の点 $(t,\, t+2)$ を f によりうつした点が同じ直線 $y = x + 2$ 上にあるのは，$t =$ $\boxed{\mathbf{28}}$ のときである．

(2)　a, b を定数とする．直線 $y = ax - 2$ が f により直線 $x = b$ にうつされるのは，$a =$ $\boxed{\mathbf{29}}$ のときである．このとき，$b =$ $\boxed{\mathbf{30}}$ である．

$\boxed{\mathbf{28}}$ ～ $\boxed{\mathbf{30}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ $\frac{1}{3}$	⑧ $\frac{1}{4}$	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ $-\frac{1}{2}$	ⓕ $-\frac{1}{3}$	ⓖ $-\frac{1}{4}$	

計算用紙

問 5 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを考える．

(1) 固有値は $\boxed{\mathbf{31}}$ と $\boxed{\mathbf{32}}$ である．ただし，$\boxed{\mathbf{31}} < \boxed{\mathbf{32}}$ とする．

$\boxed{\mathbf{31}}$ ・ $\boxed{\mathbf{32}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 10	⑦ 15	⑧ 20	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -10	ⓕ -15	ⓖ -20	

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\mathbf{33}} \end{pmatrix}$ は 固有値 $\boxed{\mathbf{31}}$ に対する固有ベクトルである．

$\boxed{\mathbf{33}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ $\frac{1}{3}$	⑧ $\frac{1}{4}$	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ $-\frac{1}{2}$	ⓕ $-\frac{1}{3}$	ⓖ $-\frac{1}{4}$	

計算用紙

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{34}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{51}}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．

問 1　微分方程式

$$(*) \qquad y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

の一般解を求める．

(1)　対応する同次方程式

$$y' - \frac{2}{x^2}y = 0$$

の一般解は，C を任意定数とすると

$$(**) \qquad y = C\,\boxed{\mathbf{34}}$$

と表される．

(2)　$(**)$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x) \cdot \boxed{\mathbf{34}}$ を $(*)$ に代入すると

$$u' = \boxed{\mathbf{35}}$$

が得られる．この方程式の一般解を求めると

$$u(x) = \boxed{\mathbf{36}}$$

であるので，$(*)$ の一般解は $y = \boxed{\mathbf{36}} \cdot \boxed{\mathbf{34}}$ であり，$\displaystyle\lim_{x \to +0} y = \boxed{\mathbf{37}}$ を満たす．

$\boxed{\mathbf{34}}$ ・ $\boxed{\mathbf{35}}$ の解答群

⓪ $e^{-\frac{1}{x}}$　① $e^{-\frac{2}{x}}$　② $e^{-\frac{4}{x}}$　③ $e^{-\frac{1}{2x}}$　④ $e^{-\frac{1}{4x}}$

⑤ $\dfrac{e^{-\frac{2}{x}}}{x}$　⑥ $\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}$　⑦ $\dfrac{e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}$　⑧ $\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{x^3}$　⑨ $\dfrac{e^{\frac{4}{x}}}{x^4}$

$\boxed{\mathbf{36}}$ の解答群

⓪ $e^{\frac{1}{4x}}+\tilde{C}$　① $2e^{\frac{2}{x}}+\tilde{C}$　② $3e^{\frac{1}{4x}}+\tilde{C}$

③ $4e^{\frac{4}{x}}+\tilde{C}$　④ $-2e^{\frac{2}{x}}+\tilde{C}$　⑤ $-4e^{-\frac{2}{x}}+\tilde{C}$

⑥ $\dfrac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}+\tilde{C}$　⑦ $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2x}}+\tilde{C}$　⑧ $-\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{x}}+\tilde{C}$

⑨ $-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}}+\tilde{C}$　ⓐ $-\dfrac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}+\tilde{C}$　ⓑ $-\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{3x}}+\tilde{C}$

($\tilde{C}$ は任意定数)

$\boxed{\mathbf{37}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{3}$

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ $-\dfrac{1}{2}$　ⓐ $-\dfrac{1}{3}$

ⓑ ∞　ⓒ $-\infty$

問 2　微分方程式

$$(*) \qquad y' = \frac{xy + 4x^2 + y^2}{x^2}$$

を $x > 0$ の範囲で考える．いま

$$z = \frac{y}{x}$$

とおくと

$$y' = z + xz'$$

である．すると，$(*)$ より関数 $z(x)$ についての微分方程式

$$z' = \frac{\boxed{\mathbf{38}}}{\boxed{\mathbf{39}}}$$

すなわち

$$(**) \qquad \frac{z'}{\boxed{\mathbf{38}}} = \frac{1}{\boxed{\mathbf{39}}}$$

が得られる．ここで

$$\int \frac{dz}{\boxed{\mathbf{38}}} = \boxed{\mathbf{40}}$$

なので，$(**)$ より

$$z(x) = \boxed{\mathbf{41}}$$

を得る．したがって，$(*)$ の一般解は $y = x \cdot \boxed{\mathbf{41}}$ である．

38 の解答群

⓪ $4 + z^2$	① $4 - z^2$	② $4 + z + z^2$
③ $4 + z - z^2$	④ $4 - z + z^2$	⑤ $4 - z + 2z^2$
⑥ $4 + 2z + z^2$	⑦ $4 + 2z - z^2$	⑧ $4 - 2z + z^2$

39 の解答群

⓪ x	① $2x$	② x^2	③ $2x^2$
④ $-x$	⑤ $-2x$	⑥ $-x^2$	⑦ $-2x^2$

$\boxed{\mathbf{40}}$ の解答群

⓪ $\tan^{-1} z + C$ ① $\dfrac{1}{2}\tan^{-1} z + C$ ② $\dfrac{1}{2}\tan^{-1} 2z + C$

③ $\dfrac{1}{2}\tan^{-1} \dfrac{z}{2} + C$ ④ $-\tan^{-1} z + C$ ⑤ $-\tan^{-1} 2z + C$

⑥ $-2\tan^{-1} 2z + C$ ⑦ $-\dfrac{1}{2}\tan^{-1} 2z + C$ ⑧ $-\dfrac{1}{2}\tan^{-1} \dfrac{z}{2} + C$

(C は任意定数)

$\boxed{\mathbf{41}}$ の解答群

⓪ $\tan(\log x + \tilde{C})$ ① $\tan(2\log x + \tilde{C})$

② $2\tan(\log x + \tilde{C})$ ③ $2\tan(2\log x + \tilde{C})$

④ $2\tan\left(\dfrac{1}{2}\log x + \tilde{C}\right)$ ⑤ $\dfrac{1}{2}\tan(\log x + \tilde{C})$

⑥ $-\tan(2\log x + \tilde{C})$ ⑦ $-2\tan(\log x + \tilde{C})$

⑧ $-2\tan(2\log x + \tilde{C})$ ⑨ $-2\tan\left(\dfrac{1}{2}\log x + \tilde{C}\right)$

($\tilde{C}$ は任意定数)

問 3　微分方程式

$$(*) \qquad y'' - y' - 2y = x^2 + 1$$

の解 $y(x)$ で，初期条件

$$(**) \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

を満たすものを求める．

(1)　$(*)$ の特殊解 (特解) で

$$y_0(x) = Ax^2 + Bx + C, \qquad A,\, B,\, C \text{ は定数}$$

の形のものを求めると，$A =$ **42** , $B =$ **43** , $C =$ **44** である．

42 ～ **44** の解答群

⓪ 0	① $\frac{1}{2}$	② $-\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{3}$	④ $-\frac{1}{3}$
	⑤ $\frac{2}{3}$	⑥ $-\frac{2}{3}$	⑦ $\frac{1}{4}$	⑧ $-\frac{1}{4}$
	⑨ $\frac{3}{4}$	ⓐ $-\frac{3}{4}$	ⓑ $\frac{5}{4}$	ⓒ $-\frac{5}{4}$

(2)　$(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' - y' - 2y = 0$$

の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{45}}$$

であるから，$(*)$ の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{45}} + y_0(x)$$

である．

$\boxed{\mathbf{45}}$ の解答群

⓪ $C_1e^{x} + C_2e^{-x}$　　① $C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$

② $C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$　　③ $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

④ $C_1\cos x + C_2\sin x$　　⑤ $C_1\cos x + C_2\sin 2x$

⑥ $C_1\cos 2x + C_2\sin x$　　⑦ $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

(C_1, C_2 は任意定数)

(3)　(2) で求めた解 $y(x) = \boxed{\mathbf{45}} + y_0(x)$ が初期条件 ($**$) を満たすのは

$$C_1 = \boxed{\mathbf{46}},\quad C_2 = \boxed{\mathbf{47}}$$

のときである．これによって，求める解 $y(x)$ が得られる．

$\boxed{\mathbf{46}}$ ・ $\boxed{\mathbf{47}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{3}{4}$　⑥ $\frac{5}{4}$　⑦ -1　⑧ -2

⑨ $-\frac{1}{2}$　ⓐ $-\frac{1}{4}$　ⓑ $-\frac{3}{4}$　ⓒ $-\frac{5}{4}$

問 4 微分方程式

$$(*) \qquad y'' + 4y = \cos kx$$

について考える．ただし，k は正の定数である．

(1) $(*)$ に対応する同次方程式 $y'' + 4y = 0$ の一般解は $y =$ $\boxed{\mathbf{48}}$ である．

$\boxed{\mathbf{48}}$ の解答群

⓪ $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ ① $C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

② $C_1e^{-2x} + C_2xe^{2x}$ ③ $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

④ $C_1\cos 2x + C_2x\cos 2x$ ⑤ $C_1\cos 2x + C_2x\sin 2x$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2) $k \neq$ $\boxed{\mathbf{49}}$ のとき，$(*)$ の一般解は，定数 A を用いて $y =$ $\boxed{\mathbf{48}}$ $+ A\cos kx$ と表すことができる．A は k を用いて $A =$ $\boxed{\mathbf{50}}$ と表される．

$\boxed{\mathbf{49}}$ の解答群

⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ $\sqrt{2}$ ⑥ $\sqrt{3}$ ⑦ $2\sqrt{2}$

$\boxed{\mathbf{50}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{k^2}$ ① $-\dfrac{1}{k^2}$ ② $\dfrac{1}{1-k^2}$ ③ $-\dfrac{1}{1-k^2}$

④ $\dfrac{1}{2-k^2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{2-k^2}$ ⑥ $\dfrac{1}{3-k^2}$ ⑦ $-\dfrac{1}{3-k^2}$

⑧ $\dfrac{1}{4-k^2}$ ⑨ $-\dfrac{1}{4-k^2}$

(3)　$k =$ $\boxed{\mathbf{49}}$ のとき，(∗) の一般解は $y =$ $\boxed{\mathbf{48}}$ $+$ $\boxed{\mathbf{51}}$ である．

$\boxed{\mathbf{51}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{4}xe^{x}$	① $-\dfrac{1}{2}xe^{-x}$	② xe^{-2x}
③ $\dfrac{1}{2}xe^{-2x}$	④ $\dfrac{1}{2}x\cos 2x$	⑤ $\dfrac{1}{2}x\cos\sqrt{2}x$
⑥ $x\sin 2x$	⑦ $2x\sin 2x$	⑧ $\dfrac{1}{4}x\sin 2x$

第4分野　確率・統計

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{52}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{70}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1　(1)　確率変数 X の確率分布が

X の値	0	1	2	4	8
確率	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

（a は定数）

で与えられているとき，$E(X) = \boxed{\mathbf{52}}$ であり，$V(X) = \boxed{\mathbf{53}}$ である．また，$V(-X) = \boxed{\mathbf{54}} \cdot V(X)$ である．

$\boxed{\mathbf{52}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{54}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$

⑥ $\frac{7}{2}$　⑦ $-\frac{3}{2}$　⑧ $-\frac{5}{2}$　⑨ $-\frac{7}{2}$　ⓐ -1

(2) 2 つの事象 A, B に対し，事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す．$P(A) = \dfrac{1}{4}$，$P(B) = \dfrac{1}{2}$，$P(A \cup B) = \dfrac{5}{8}$ のとき，$P(A|B) = \boxed{\textbf{55}}$ であり，A と B は $\boxed{\textbf{56}}$．

$\boxed{\textbf{55}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{1}{3}$	④ $\dfrac{1}{4}$
⑤ $\dfrac{1}{5}$	⑥ $\dfrac{2}{3}$	⑦ $\dfrac{3}{4}$	⑧ $\dfrac{2}{5}$	⑨ $\dfrac{4}{5}$

$\boxed{\textbf{56}}$ の解答群

⓪ 独立である　　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

問 2　確率変数 X の確率密度関数が，ある定数 c に対して

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(x-2)^2}, & x < 0, \\ 0, & x \geqq 0 \end{cases}$$

で与えられているとき，$c = \boxed{\mathbf{57}}$ である．また，分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とすると

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{\mathbf{58}}, & x < 0, \\ \boxed{\mathbf{59}}, & x \geqq 0 \end{cases}$$

となる．したがって，$P(|X| \leqq 1) = \boxed{\mathbf{60}}$ である．

$\boxed{\mathbf{57}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{3}$　⑥ $\dfrac{1}{4}$

$\boxed{\mathbf{58}}$ ・ $\boxed{\mathbf{59}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{x-2}$　③ $\dfrac{-1}{x-2}$

④ $\dfrac{2}{x-2}$　⑤ $\dfrac{-2}{x-2}$　⑥ $\dfrac{4}{(x-2)^3}$　⑦ $\dfrac{-4}{(x-2)^3}$

$\boxed{\mathbf{60}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{4}$

⑤ $\dfrac{1}{5}$　⑥ $\dfrac{2}{3}$　⑦ $\dfrac{3}{4}$　⑧ $\dfrac{2}{5}$　⑨ $\dfrac{3}{5}$

計算用紙

問 3 (1) 確率変数 X が区間 $[1, e]$ 上の一様分布に従うとき，$P(1 \leqq X \leqq 2) = \boxed{\textbf{61}}$ である．また，$E(X) = \boxed{\textbf{62}}$ であり，$E\left(\dfrac{1}{X}\right) = \boxed{\textbf{63}}$ である．

61 ～ **63** の解答群

⓪ $e+1$　① $\dfrac{e+1}{2}$　② $\dfrac{e+1}{3}$　③ $\dfrac{1}{e-1}$　④ $\dfrac{2}{e-1}$

⑤ $e-1$　⑥ $\dfrac{e-1}{2}$　⑦ $\dfrac{1}{e+1}$　⑧ $\dfrac{2}{e+1}$　⑨ 1

(2) 確率変数 X, Y が独立で，ともにパラメータ 2 のポアソン分布に従っているとする．すなわち

$$P(X=k) = P(Y=k) = e^{-2}\frac{2^k}{k\,!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

とする．このとき，$P(X=1, Y=1) = \boxed{\textbf{64}}$ であり，$P(X+Y=2) = \boxed{\textbf{65}}$ である．

64 ・ **65** の解答群

⓪ $2e^{-2}$　① $3e^{-2}$　② $4e^{-2}$　③ $5e^{-2}$

④ $6e^{-2}$　⑤ $8e^{-2}$　⑥ $2e^{-4}$　⑦ $3e^{-4}$

⑧ $4e^{-4}$　⑨ $5e^{-4}$　ⓐ $6e^{-4}$　ⓑ $8e^{-4}$

計算用紙

問 4 あるアナログ音響機器製造メーカーで，部品の仕入れ先を変更することになり，この変更による性能の変化を調べることになった．製品の音声出力の歪率（%）は正規分布に従い，変更前の母平均は 0.30 で，母分散は 0.07^2 であった．経験的に歪率の母分散は仕入れ先の変更に影響を受けないことが分かっている．部品の仕入れ先の変更後に製造された 50 台の製品を無作為に選び，これらの歪率を測定したところ，標本平均値は 0.27 であった．

歪率の母平均 μ の変化を調べるために，μ に対する両側検定を有意水準（危険率）5% で行うことにし，$\mu_0 = 0.30,\ \ \sigma^2 = 0.07^2,\ \ \overline{x} = 0.27,\ \ n = 50$ とおき

帰無仮説 H_0：$\mu = \mu_0$,

対立仮説 H_1：$\mu \neq \mu_0$

と設定する．選び出した 50 台の製品の歪率をそれぞれ確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$ とすると，これらはすべて独立で平均 μ, 分散 0.07^2 の $\boxed{\textbf{66}}$ に従っている．したがって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50}$$

は平均 $\boxed{\textbf{67}}$，分散 $\boxed{\textbf{68}}$ の $\boxed{\textbf{66}}$ に従う．帰無仮説 H_0 のもとでは

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 0.30}{0.07/\sqrt{50}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従い，正規分布表から

$$P(-1.96 < Z < 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

がわかる．この式から，$1.96 \times \dfrac{0.07}{\sqrt{50}} \fallingdotseq 0.019$ に注意すると

$$P(\left|\overline{X} - 0.30\right| \geqq 0.019) \fallingdotseq \boxed{\textbf{69}}$$

となる．一方，$\overline{x}$ は，

$$|\overline{x} - 0.30| = |0.27 - 0.30| = 0.03 > 0.019$$

を満たすので，H_0 は有意水準（危険率） 5%で $\boxed{\textbf{70}}$．

66 の解答群

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布

④ 指数分布　⑤ t 分布

67 ・ **68** の解答群

⓪ $\dfrac{\mu}{50}$　① 50μ　② μ　③ 50×0.07

④ 0.07^2　⑤ 50×0.07^2　⑥ $50^2 \times 0.07^2$　⑦ $\dfrac{0.07^2}{50}$　⑧ $\dfrac{0.07^2}{50^2}$

69 の解答群

⓪ 0　① 0.05　② 0.1　③ 0.15　④ 0.2　⑤ 0.25

⑥ 0.75　⑦ 0.8　⑧ 0.85　⑨ 0.9　ⓐ 0.95

70 の解答群

⓪ 棄却される　① 採択される