

# 直交異方性円筒殻理論に基づく自転車用チューブの性能評価 Performance Estimation about Carbon Tubes for a Bicycle Frame based on the Orthotropic Cylindrical Shell Theory

正 齊藤 俊 (山口大学)

千葉洋三 (アマンダスポーツ)

Takashi SAITO, Yamaguchi University, 2557 Tokiwadai, Ube-City, Yamaguchi  
Yoza CHIBA, Amanda Sports Co., 1-11-18 Tabatashinmachi, Kita-Ku, Tokyo

The performance estimation of carbon tubes used in bicycle frames are discussed. Though several bicycles have a carbon frame, the builder does not know how to estimate the performance very much and depends on his experiences about the finishing. As important fundamental characteristics that the frame should have, we take the flexural and torsional rigidity of the tubes and evaluate the corresponding elastic constants by the parameter identification. The elastic constants are determined as to minimize the error between the experimental natural frequencies and the analytical. The results show that the CrMo material is still superior to the high elastic carbon tubes in both the flexural and torsional characters.

*Key Words:* Bicycle, Vibration, Identification, Modal Analysis, Optimized method.

自転車材料には、高強度、高剛性、軽量及び優れた振動減衰特性等が要求されており、カーボン材料は、技術的な進展ともあいまって、自転車のあらゆるパーツとして使用されるようになってきている。しかしながら、自転車用フレームの製作に際しては、各ビルダーは彼らのノウハウを基に独自の方法で製作を行っており、基本素材の特性に基づき出来上がりの評価を行うことは非常に困難である。また、開発されてきた競技用自転車は、乗り手の競技成績及び乗り手の感覚による部分が大きく、最終的に出来上がっているもの自体の性能を客観的に評価されることは少ないと考えられる。競技においては、勝者の乗る自転車が優秀な自転車と評価されがちである。しかしながら、果たしてそれが道具として優れているのかどうかは、できうる限り数値化し、客観的に判断して見る必要がある。そこで、本研究では、各自転車部品の振動特性を調べることにより、道具としての性能評価を試みる。本研究では、自転車フレーム用カーボンチューブに関する振動実験を行い、パラメータ同定による性能評価方法について述べている。

カーボン材料の各弾性係数の見積もりは、例えば、平均化近似解析による計算式により行うことができるが、炭素繊維の直角方向の弾性係数、繊維方向剪断弾性係数あるいは、硬化材の弾性係数など不明な点が多い。文献に示されている数値を用いて概算値を算出してみると、ある程度の傾向を知ることは可能であることがわかる。さらに、振動実験により固有振動数と固有モードを求め、概算値を用いた有限要素解析結果と比べてみると、固有振動数とモードの推移等はほぼ同じように変化しており、こういった概算もある程度は有効である。

さらに、できあがった自転車フレーム用カーボンチューブの性能評価をするために、パラメータ同定を行う。自転車フレーム用カーボンチューブに必要な性能としては、曲げ剛性と振り剛性である。まず、カーボンチューブを直交異方性円筒殻としてモデル化し、実験条件に対応する振動数方程式を導出している。振動数方程式を解くことにより得られるカーボンチューブの固有振動数  $f_{nm}$  は、

$$f_{nm} = g(E_x, E_\theta, \nu_{x\theta}, G_{x\theta}) \quad (A1)$$

とみなすことができるので、実験により求められる固有振動数  $f_{nm}^{exp}$  と計算により定められる固有振動数  $f_{nm}^{cal}$  の間の誤差を各弾性係数およびポアソン比の関数として表現することにより、

$$Error(E_x, E_\theta, \nu_{x\theta}, G_{x\theta}) = \sum_n \sum_m \left[ \frac{W_{nm} \{f_{nm}^{exp} - f_{nm}^{cal}\}^2}{\{f_{nm}^{exp}\}^2} \right] \quad (A2)$$

なる評価関数が求められる。従って、 $(E_x, E_\theta, \nu_{x\theta}, G_{x\theta})$  を同定するための、最適化問題の定式化が可能である。ここで、各独立変数の変域は、正の値のみであり、ポアソン比に関しては、ゴム弾性の場合でも高々0.5であるので、その値を拘束条件とすることにする。そこで、直交異方性円筒殻のパラメータ同定問題を拘束条件付きの最小値を求める最適化問題とみなし、解くことを考える。ここで、誤差関数を計算するためには、非線形の連立方程式を解く必要があり、しかも誤差関数の独立変数に関する微係数を明示的な形で表現することが容易ではない。そこで、ここでは、微係数を必要としない Downhill Simplex 法を用い、さらに、Penalty 関数法の考え方を導入して、拘束条件を満足する最小値を計算している。

自転車フレーム用に製作された6種類のカーボンチューブに対して、本手法を適用し、パラメータ同定をおこなった。同定された弾性係数を用いた固有振動数の解析結果は、実験結果と良く一致しており、モデル化および本手法の妥当性が検証できると共に、本手法により、自転車用チューブの性能評価が可能であることがわかる。本研究で得られた結論は以下の通りである。

- (1) 自転車フレーム用カーボンチューブを直交異方性円筒殻モデルでモデル化することの妥当性を示した。
- (2) モデル化に基づくパラメータ同定により、カーボンチューブの性能評価を数値的に行なうことができることを示した。
- (3) 現行のカーボンチューブの各弾性定数は、CrMo鋼を採用したものより依然として低い値を取ることが明らかとなった。

## 1. まえがき

自転車は我々にとって身近な乗り物であり、子供から老人まで、安全かつ快適に使用できる道具である必要がある。また、乗り手の質量(60kg前後)に比べて、そのものの質量(10kg前後)ははるかに軽い特異な乗り物であり、例えば、自転車と同じ形態の自動二輪車は100kg~200kgであり、約10倍の開きがある。これは、自転車を走行するために人間の脚力を動力として使用しているためであり、限られたエネルギーを効率よく前進する力に変換するために、自転車は、軽量かつ剛性を有するという相反する性質を持つ必要がある。従って、自転車材料には、高強度、高剛性、軽量及び優れた振動減衰特性等が要求されており、それらは航空宇宙産業等で開発されている材料と同様の要求性能であるため、競技用の自転車など金に糸目を付ける必要の無い車種には高価な材料がふんだんに使われている<sup>(1)</sup>。中でも、カーボン材料は、技術的な進展ともあいまって、自転車のあらゆるパーツとして使用されるようになってきており、低価格車の価格競争からの打開や、自転車の利用拡大を目指して、今後もさらに発展することが予想されている<sup>(2)</sup>。

ここで、カーボン材料とは、炭素繊維強化プラスチック(CFRP)のことであり、炭素繊維を一方向に並べたシートを型に重ねて貼っていき、熱硬化性樹脂で固め、加圧・加熱処理を行うことにより完成するものであり、各成形の方法によって目的に合った様々な特性の部品を作ることが出来る。カーボン材料を使用した最終製品である自転車の力学的特性を評価しようとする場合、一方向強化材である炭素繊維材及び母材の各種弾性係数、ポアソン比およびそれらの含有率、配向角など多くの基礎データが必要となる。しかしながら、弾性係数などの多くの基礎データは一般には公開されておらず、自転車用フレームの製作に際しても各ビルダーは彼らのノウハウを基に独自の方法で製作を行っており、基本素材の特性に基づき出来上がりの評価を行うことは非常に困難である。

一方、これまで、開発されてきた競技用自転車は、乗り手の競技成績及び乗り手の感覚による部分が大きく、最終的に出来上がっているもの自体の性能を客観的に評価されることは少ないと考えられる。競技においては、勝者の乗る自転車が優秀な自転車と評価されがちである。しかしながら、果たしてそれが道具として優れているのかどうかは、できうる限り数値化し、客観的に判断して見る必要がある。そこで、本研究では、各自転車部品の振動特性を調べることで、道具としての性能評価を試みる。ここでは、まず、自転車フレーム用カーボンチューブに関する振動実験を行い、パラメータ同定による性能評価方法について述べる。

まず、自転車フレーム用として製作された6種類のカーボンチューブに対して各種弾性係数を平均化近似解析に基づく計算式<sup>(3)</sup>により求める。次に、対応するチューブに対する振動実験を行い、固有振動数と固有モードを求め、計算式により求められた各種弾性係数に基づくFEM計算結果との比較を行う。さらに、カーボンチューブを直交異方性円筒殻とみなし、振動数方程式を導出し、計算結果と実験結果を用いたパラメータ同定を行い、直交異方性材料における各弾性係数の同定を行い、自転車用カーボンチューブの性能評価を行う。本手法により、自転車用カーボンチューブの性能評価を論理的に行うことができることを示す。

## 2. 実験用フレームチューブ

2.1 カーボンチューブ 実験に用いた6種類のチューブの仕様を表1に示す。カーボン材料はすべて、1:1の比率で外側が軸方向、内側が $\pm 45^\circ$  バイアス方向に繊維方向を有するものである。表中の数値 $a \times b$ は、使用したカーボン材料の繊維方向の縦弾性係数の値を $t/\text{mm}^2$ で示しており、 $a$ が軸方向、 $b$ が $45^\circ$  バイアス方向に巻かれたカーボン材の値である。

2.2 フレームチューブに対する力学モデル 自転車用フレームチューブとして用いられているカーボンチューブは、一般に直交異方性材料とみなすことができる。そこで、炭素繊維を用いて積層構造を生成し、平面応力状態が保たれているものと仮定し、肉厚方向を $z$ 軸に取り、炭素繊維材料の繊維方向を1、 $z$ 及びそれと直交する方向を2とすると、直交異方性材料の応力歪関係から次式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{2z} \\ \tau_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{2z} \\ \gamma_{z1} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ q_{33} &= G_{12}, & q_{44} &= G_{2z}, & q_{55} &= G_{z1} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $E_i$ 、 $G_i$ 、 $\nu_{ij}$ ( $i, j = 1, 2$ )はそれぞれ縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比を表している。したがって、ここで考えているカーボンチューブの軸方向を $x$ 、円周方向 $\theta$ とすると、繊維方向が $x$ 軸方向に対して、 $\psi$ の角

Table 1: Specification of tubes

Yong's modulus [tonf/mm <sup>2</sup> ]	Outer diameter [mm]	Inner diameter [mm]	length [mm]	Density [kg/m <sup>3</sup> ]
$E_{fL}$	$d_o$	$d_i$	$l$	$\rho$
24 × 30	28.60	25.52	610.0	1542
30 × 30	28.60	25.52	610.0	1503
30 × 40	28.60	25.48	610.0	1531
30 × 50	28.60	26.08	610.0	1485
40 × 70	28.60	26.00	610.0	1604
40 × 80	28.60	26.00	610.0	1629

度をなしている場合の  $x\theta z$  座標系に対応する応力-歪関係は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} Q_{11} &= q_{11}C^4 + 2(q_{12} + 2q_{33})S^2C^2 + q_{22}S^4 \\ Q_{12} &= (q_{11} + q_{22} - 4q_{33})S^2C^2 + q_{12}(S^4 + C^4) \\ Q_{22} &= q_{11}S^4 + 2(q_{12} + 2q_{33})S^2C^2 + q_{22}C^4 \\ Q_{13} &= (q_{11} - q_{12} - 2q_{33})SC^3 + (q_{12} - q_{22} + 2q_{33})S^3C \\ Q_{23} &= (q_{11} - q_{12} - 2q_{33})S^3C + (q_{12} - q_{22} + 2q_{33})SC^3 \\ Q_{33} &= (q_{11} + q_{22} - 2q_{12} - 2q_{33})S^2C^2 + q_{33}(S^4 + C^4) \\ Q_{44} &= q_{44}C^2 + q_{55}S^2 \\ Q_{45} &= (q_{55} - q_{44})SC \\ Q_{55} &= q_{44}S^2 + q_{55}C^2, \quad S \equiv \sin \psi, \quad C \equiv \cos \psi \end{aligned} \quad (4)$$

これらを組み上げて製作される自転車の力学的特性を把握する際に必要となるCFRP構造材の弾性係数を算出するためには、一方向強化材である炭素繊維材の基本的な直交異方性弾性係数、繊維配向角、母材となるエポキシ樹脂の弾性係数および炭素繊維含有率などが必要となる。しかしながら、これらの基礎データ全てを手に入れることは、非常に困難であり、各ビルダーのノウハウであるカーボンチューブ成形過程の加圧・加熱処理などにより、元素材の特性も変化している可能性がある。本研究におけるカーボンチューブに関しても、繊維方向の縦弾性係数  $E_{fL}$  及び炭素含有率  $V_f$  がわかっているのみで、残りの繊維と直角方向縦弾性係数  $E_{fT}$ 、繊維方向ポアソン比  $\nu_{fL}$ 、繊維方向剪断剛性率  $G_{fLT}$  等はデータが存在しない。

そこで、ここではまず、未知の値に関しては文献による値を参考にして、各種弾性係数を算出する。繊維と直角方向縦弾性係数  $E_{fT}$  に関しては、繊維方向の  $E_{fL}$  に比べて、 $1/15 \sim 1/30$  程度低いといわれているので<sup>(3)</sup>、ここでは、 $1/15$  と見なすことにする。また、文献(3)を参照して、繊維方向剪断剛性率  $G_{fLT} = 2000 \text{ kgf/mm}^2$ 、繊維方向ポアソン比に関しては、高強度繊維に対する値  $\nu_{fL} = 0.3$ 、エポキシ樹脂の値は、縦弾性係数  $E_m = 350 \text{ kgf/mm}^2$ 、ポアソン比  $\nu_m = 0.36$ 、横弾性係数  $G_m = 130 \text{ kgf/mm}^2$  を仮定する。

以上を基に、繊維含有量 50%、繊維が六角配列しているものと仮定して、繊維方向ヤング率  $E_L$ 、繊維と直交する方向のヤング率  $E_T$ 、繊維方向ポアソン比  $\nu_L$  および繊維方向剪断剛性率  $G_{LT}$  を求め、式(3)から各カーボンチューブに対する弾性定数を計算すると表2のようになる。軸方向の縦弾性係数  $E_x$  に対して、円周方向の縦弾性係数  $E_\theta$  は、半分以下の値を取るという結果となる。また、バイアス方向の弾性率を上げた場合、剪断弾性係数  $G_{x\theta}$  の上昇の方が  $E_\theta$  の上昇よりも大きく、 $G_{x\theta}$  の方が高い値を取るようになることを示している。このように、平均化近似解析の計算式により、各種弾性係数を定めることは可能であり、設計時などにおいて全体的な傾向をつかむことは可能であると考えられる。しかしながら、各値を定めていこうとする際、簡単には手に入りにくいものもいくつか存在し、不明な点が少なくない。

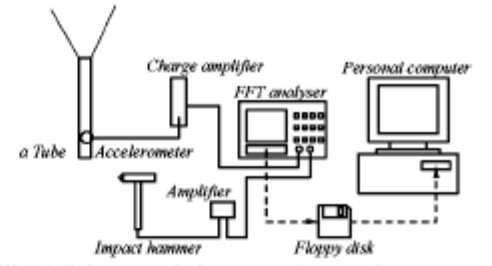


Fig.1 Scheme of the experimental setup

Table 2: Elastic constants of tubes

	$E_x$ (GPa)	$E_\theta$ (GPa)	$G_{x\theta}$ (GPa)	$\nu_{x\theta}$
24 × 30	67.4	21.1	20.9	0.238
30 × 30	82.1	22.1	20.9	0.203
30 × 40	82.5	25.8	27.1	0.251
30 × 50	82.7	29.1	33.3	0.294
40 × 70	108	37.7	45.8	0.305
40 × 80	108	40.6	51.7	0.330

### 3. 実験

**3.1 実験方法** 各自転車用チューブの打撃試験を行い、固有振動数と固有モードを測定する。実験方法の概略を図1に示す。支持条件が自由となるように、チューブを軽い糸で吊るし、インパクトハンマーにより加えられた衝撃入力に対する振動の加速度応答を加速時計により測定し、チャージアンプで増幅した後に、衝撃入力とともに、一旦、FFTアナライザーに取り込む。取り込んだデータは、フロッピーディスクを介して、パーソナルコンピュータに送られ、処理される。本実験では、各チューブに対して軸方向12箇所と円周方向には0度と90度の2方向の計24箇所のアクセラランスの測定を行っている。

**3.2 実験結果** 得られたデータに基づき、決定した固有振動数と対応する振動モードを表3～10に示す。表には、薄肉の異方性一般軸対称殻理論に基づく有限要素法<sup>(4)</sup>による計算結果を示している。有限要素計算に際しては、表2の値を用いている。また、振動モードの決定に関しては、実験結果のみで定めるのは容易ではないので、有限要素法の解析結果と両方から推定している。モードとしては、円周方向波数  $n$  および軸方向半波数  $m$  を用いて示してあり、対応する固有振動数を  $f_{nm}$  としている。

実験結果と有限要素法による計算結果を比較すると、両者とも振動数、モードの推移等ほぼ同じ傾向を示しており、概算による弾性係数の評価がある程度有効であることがわかる。また、梁状モードである円周方向波数が  $n=1$  の場合は、実験値の方が低めの値を取るのに対し、その他の場合では、実験値が高めの値を取る場合もあることがわかる。また、低次から現れるモードの順番が繊維弾性係数の組合せに応じて変化していることがわかる。すなわち、弾性係数の値を調整することにより、目的に応じた自転車チューブの製作が可能となり、どのような弾性係数を有するものが性能が良いのかということが明らかとなれば、自転車に乗る各個人毎に様々な設定された自転車フレームが構築できる。

Table 3: Natural frequency and Mode (24 × 30)

$f_{nm}$ (Hz)	$f_{nm}$ (Hz) (FEM)	$n$	$m$
640	670	1	1
1696	1796	1	2
3104	3413	1	3
3296	2952	0	1
3520	2996	2	1

Table 4: Natural frequency and Mode (30 × 30)

$f_{nm}$ (Hz)	$f_{nm}$ (Hz) (FEM)	$n$	$m$
672	740	1	1
1824	1974	1	2
3104	2990	1	3
3360	3144	0	1
3584	3187	2	1

#### 4. 弾性係数の同定

4.1 基礎方程式 実際に作り上げたカーボンチューブの性能を評価するために、解析的にカーボン材料のパラメータ同定を行う。自転車用チューブを直交異方性円筒殻でモデル化し、打撃試験により得られた固有振動数を用いたパラメータ同定を行う。チューブの寸法を半径  $R$ 、肉厚  $h$ 、長さ  $l$  で表わし、座標系  $(x, \theta, z)$  に対応する、軸方向変位、円周方向変位および半径方向変位をそれぞれ  $u, v, w$  とすると、系の運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \alpha_s (1 + \kappa^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \gamma_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\nu_{x\theta} + \alpha_s) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} \\ & + \nu_{x\theta} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \kappa^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \kappa^2 \alpha_s \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \theta^2} = 0 \\ & (\nu_{x\theta} + \alpha_s) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \alpha_s (1 + 3\kappa^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \alpha_\theta \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \\ & - \gamma_x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \alpha_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} - \kappa^2 (\nu_{x\theta} + 3\alpha_s) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \theta} = 0 \\ & \nu_{x\theta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \kappa^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + \kappa^2 \alpha_s \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \theta^2} + \alpha_\theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ & - \kappa^2 (\nu_{x\theta} + 3\alpha_s) \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \alpha_\theta w \\ & + \kappa^2 \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2(\nu_{x\theta} + 2\alpha_s) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} \right. \\ & \left. + \alpha_\theta \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \right\} + \gamma_x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

Table 5: Natural frequency and Mode (30 × 40)

$f_{nm}$ (Hz)	$f_{nm}$ (Hz) (FEM)	$n$	$m$
672	748	1	1
1792	2007	1	2
3264	3241	2	1
3456	3822	1	3
3552	3367	0	1

Table 6: Natural frequency and Mode (30 × 50)

$f_{nm}$ (Hz)	$f_{nm}$ (Hz) (FEM)	$n$	$m$
768	770	1	1
2016	2081	1	2
2208	2655	2	1
3840	3991	1	3
4064	3804	0	1

Table 7: Natural frequency and Mode (40 × 70)

$f_{nm}$ (Hz)	$f_{nm}$ (Hz) (FEM)	$n$	$m$
736	849	1	1
1904	2298	1	2
2880	2845	2	1
3904	4414	1	3
4672	4279	0	1

ここで、 $\xi = x/R$ 、 $\kappa = h^2/(12R^2)$ 、 $\alpha_s = (1 - \nu_{x\theta}\nu_{\theta x})G_{x\theta}/E_x$ 、 $\alpha_\theta = E_\theta/E_x$ 、 $\gamma_x = (1 - \nu_{x\theta}\nu_{\theta x})\rho R^2/E_x$  である。また、実験に対応する両端自由の境界条件は  $\xi = \pm l/R$  において

$$\left. \begin{aligned} & [N_{xx}]_x = 0 \\ & \left[ N_{x\theta} - \frac{1}{R} M_{x\theta} \right]_x = 0 \\ & \left[ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} \right]_x = 0 \\ & [M_{xx}]_x = 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

したがって、式 (5) および (6) に基づき、通常的手法<sup>(6)</sup>に従い定式化を行うことにより、振動数方程式が求められるので、自転車用チューブの寸法と各弾性定数が与えられれば、固有振動数と固有モードを定めることが可能となる。すなわち、 $\omega_{nm}$  を固有角振動数として、基準振動を仮定すると

$$\left. \begin{aligned} & u = U(\xi, \theta) e^{j\omega_{nm}t} \\ & v = V(\xi, \theta) e^{j\omega_{nm}t} \\ & w = W(\xi, \theta) e^{j\omega_{nm}t} \end{aligned} \right\} (7)$$

であり、式 (7) を式 (5) に代入し得られる方程式において、 $U, V, W$  がそれぞれ  $\theta$  に関する周期関数となる必要があるため、次のようにおくことができる。

$$\left. \begin{aligned} & U(\xi, \theta) = U_0(\xi) \cos n\theta \\ & V(\xi, \theta) = V_0(\xi) \sin n\theta \\ & W(\xi, \theta) = W_0(\xi) \cos n\theta \end{aligned} \right\} (8)$$

Table 8: Natural frequency and Mode (40 × 80)

$f_{nm}$ (Hz)	$f_{nm}$ (Hz) (FEM)	$n$	$m$
768	851	1	1
2048	2310	1	2
2912	2871	2	1
3840	4453	1	3
4704	4522	0	1

さらに、この式(8)を前の方程式に代入すると、 $(U_0, V_0, W_0)$ に関する常微分方程式が得られる。よって、 $\lambda$ を特性根として

$$\left. \begin{aligned} U_0(\xi) &= c_1 e^{\lambda \xi} \\ V_0(\xi) &= c_2 e^{\lambda \xi} \\ W_0(\xi) &= c_3 e^{\lambda \xi} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

とおき、特性方程式を求めると

$$a_0 \lambda^8 + a_1 \lambda^6 + a_2 \lambda^4 + a_3 \lambda^2 + a_4 = 0 \quad (10)$$

の形のものが得られるので、これを解くことにより特性根  $\lambda_j^2 (j=1, 2, 3, 4)$  が定まり、 $(U_0, V_0, W_0)$  を次のように定めることができる。

$$\left. \begin{aligned} U_0(\xi) &= \sum_{j=1}^4 k_u(\lambda_j) \left\{ A_j^{(1)} \sinh \lambda_j \xi + A_j^{(2)} \cosh \lambda_j \xi \right\} \\ V_0(\xi) &= \sum_{j=1}^4 k_v(\lambda_j) \left\{ A_j^{(1)} \cosh \lambda_j \xi + A_j^{(2)} \sinh \lambda_j \xi \right\} \\ W_0(\xi) &= \sum_{j=1}^4 \left\{ A_j^{(1)} \cosh \lambda_j \xi + A_j^{(2)} \sinh \lambda_j \xi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで、 $A_j^{(i)}$ 、 $i=1, 2; j=1, \dots, 4$ は、境界条件により定められる未定係数である。よって、式(11)に境界条件(6)を適用することにより、振動数方程式を求めることができる。その振動数方程式を解くことにより、固有振動数と固有モードを求めることができる。ここで、固有振動数  $f_{nm}$  は、各弾性定数を独立変数とした関数  $g$  として以下のように表現することができる。

$$f_{nm} = g(E_x, E_\theta, \nu_{x\theta}, G_{x\theta}) \quad (12)$$

4.2 最適化問題 パラメータ同定問題を最適化問題として取り扱うために、実験により求められる固有振動数  $f_{nm}^{exp.}$  と計算により定められる固有振動数  $f_{nm}^{cal.}$  の間の誤差を以下の式により表現する。

$$\begin{aligned} Error(E_x, E_\theta, \nu_{x\theta}, G_{x\theta}) \\ = \sum_n \sum_m \left[ W_{nm} \frac{\{f_{nm}^{exp.} - f_{nm}^{cal.}\}^2}{\{f_{nm}^{exp.}\}^2} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $W_{nm}$  は、重みである。式(12)に示すように、 $f_{nm}^{cal.}$  が、 $E_x, E_\theta, \nu_{x\theta}$  および  $G_{x\theta}$  の関数となるので、これらが式(13)の独立変数である。従って、式(13)の誤差を最小とする  $E_x, E_\theta, \nu_{x\theta}$  および  $G_{x\theta}$  を決定するために次のような最適化問題を考える。

$$\left. \begin{aligned} \text{Minimize } Error(E_x, E_\theta, \nu_{x\theta}, G_{x\theta}) &\geq 0, \\ E_x &> 0, \\ E_\theta &> 0, \\ G_{x\theta} &> 0 \\ 0 < \nu_{x\theta} < 0.5 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、各弾性定数はすべて正の値をとる必要があること、また、ポアソン比に関してはゴム弾性の場合でも高々0.5の値しか取れないので、ここではこの値を超えないと仮定して拘束条件をつけている。すなわち、拘束条件付きの最小値を求める最適化問題とみなす。誤差関数である式(13)を計算するためには、式(10)と振動数方程式を同時に解かなければならない。しかしながら、これら

は非線形の連立方程式となり解析的に解くことは不可能である。また、誤差関数の独立変数に関する微係数を明示的な形で表現することが容易ではない。そこで、ここでは、微係数を必要としない Downhill Simplex 法<sup>(7),(8)</sup>を用いて最適化問題を解くことにする。ここで、従来の Downhill Simplex 法は、独立変数値に拘束条件がない場合の解法であるので、Penalty 関数法の考え方を導入して、拘束条件範囲外の値が次の参照点となった場合を取り除くことができるように、その点にペナルティをつけて<sup>(9)</sup> 関数値を評価することにより、拘束条件を満足する値を求めることにする。

4.5 同定結果 6種類の自転車フレーム用カーボンチューブに対して求められた弾性定数およびそれに基づく固有振動数の計算結果を表9～14に示す。固有振動数に関して実験値と計算値の間の誤差は平均化近似解析の計算値に基づく結果よりも改善されており、カーボンチューブを直交異方性円筒殻でモデル化することの妥当性およびモデル化に基づくパラメータ同定の妥当性を検証することができる。

自転車フレーム用チューブとしての性能評価に関しては、軸方向の縦弾性係数  $E_x$  が主に曲げ剛性と関連しており、軸方向の剪断弾性係数  $G_{x\theta}$  が振り剛性と関連しているので、これらの値を評価することにより、性能を調べることができると考えられる。実際には、チューブの肉厚も関係するので、断面二次モーメントあるいは極断面二次モーメントとの積で評価する必要があるが、単純に値だけを見ると、最も高弾性のカーボン材を使用している  $40 \times 80$  の組合せのチューブにおいてさえ、自転車のフレーム材として一般的によく使用されている CrMo 鋼よりもかなり低い値を示しており、軸方向に関しては2分の1程度となっていることがわかる。密度に関しても5倍程度の違いがあり、肉厚もカーボンチューブの方がかなり分厚い仕上がりになっている。

Table 9: Parameters and Natural frequency (24 × 30)

$E_x$ (GPa)	$E_\theta$ (GPa)	$G_{x\theta}$ (GPa)	$\nu_{x\theta}$
71.8	16.4	22.7	0.214
$f_{mn}^{exp.}$ (Hz)	$f_{nm}^{cal.}$ (Hz)	$n$	$m$
640	618	1	1
1696	1670	1	2
3104	3180	1	3
3296	3150	0	1
3520	3865	2	1

## 5. まとめ

自転車フレーム用カーボンチューブの性能評価を目的として、カーボンチューブを直交異方性円筒殻でモデル化し、実験に定められた固有振動数を用いたパラメータ同定法について述べた。さらに、実際に自転車フレーム用カーボンチューブに対する計算を行い、その妥当性について検討した。本研究で得られた結論をまとめると次のようになる。

- (1) 自転車フレーム用カーボンチューブを直交異方性円筒殻モデルでモデル化することの妥当性を示した。
- (2) モデル化に基づくパラメータ同定により、カーボンチューブの性能評価を数値的に行なうことができること

Table 10: Parameters and Natural frequency ( $30 \times 30$ )

$E_x$ (GPa)	$E_\theta$ (GPa)	$G_{x\theta}$ (GPa)	$\nu_{x\theta}$
76.4	20.2	19.1	0.183
$f_{mn}^{exp.}$ (Hz)	$f_{nm}^{cal.}$ (Hz)	$n$	$m$
672	643	1	1
1824	1725	1	2
3104	3254	1	3
3360	2923	0	1
3584	4135	2	1

Table 11: Parameters and Natural frequency ( $30 \times 40$ )

$E_x$ (GPa)	$E_\theta$ (GPa)	$G_{x\theta}$ (GPa)	$\nu_{x\theta}$
83.5	25.8	24.7	0.226
$f_{mn}^{exp.}$ (Hz)	$f_{nm}^{cal.}$ (Hz)	$n$	$m$
672	671	1	1
1792	1807	1	2
3456	3425	1	3
3552	3299	0	1
3264	4746	2	1

を示した。

(3) 現行のカーボンチューブの各弾性定数は、CrMo鋼を採用したものより依然として低い値を取ることが明らかとなった。

## 文献

- (1) Kim, I., Mechanical Engineering, 112-5(1990), 52-59.
- (2) 林, 設計・製図, 27-3(1992), 85-89.
- (3) 植村, 山田, 材料, 24-257(1975), 157-163.
- (4) 井川, 他 2 名, 機論 (C 編)59-566(1993), 3052-3057.
- (5) 小林, 佐藤, 機論 44-388(1978), 4088-4095.
- (6) 鈴木, 他 3 名, シェルの振動入門, コロナ社 (1998), 67.
- (7) Nelder J.A. and Mead R, Comper Journal 7(1964), 308-313.
- (8) Nelder J.A. and Mead R, Comper Journal 8(1964), 27.
- (9) Fletcher R., Practical Methods of Optimization, 2, Constrained Optimization, New York: John Wiley(1981).

Table 12: Parameters and Natural frequency ( $30 \times 50$ )

$E_x$ (GPa)	$E_\theta$ (GPa)	$G_{x\theta}$ (GPa)	$\nu_{x\theta}$
101.5	29.1	30.4	0.265
$f_{mn}^{exp.}$ (Hz)	$f_{nm}^{cal.}$ (Hz)	$n$	$m$
768	759	1	1
2016	2045	1	2
3840	3880	1	3
2208	4254	2	1
4064	3713	0	1

Table 13: Parameters and Natural frequency ( $40 \times 70$ )

$E_x$ (GPa)	$E_\theta$ (GPa)	$G_{x\theta}$ (GPa)	$\nu_{x\theta}$
100.5	40.6	47.2	0.297
$f_{mn}^{exp.}$ (Hz)	$f_{nm}^{cal.}$ (Hz)	$n$	$m$
736	728	1	1
1904	1978	1	2
2880	4918	2	1
3904	3794	1	3
4672	4526	0	1

Table 14: Parameters and Natural frequency ( $40 \times 80$ )

$E_x$ (GPa)	$E_\theta$ (GPa)	$G_{x\theta}$ (GPa)	$\nu_{x\theta}$
100.5	40.6	47.2	0.297
$f_{mn}^{exp.}$ (Hz)	$f_{nm}^{cal.}$ (Hz)	$n$	$m$
768	722	1	1
2048	1963	1	2
3840	3764	1	3
2912	3865	2	1
4704	4417	0	1