平成18年度 修士論文

平面擬等角写像

東京都立大学大学院 理学研究科 数学専攻

堀田　一敬　HOTTA, IKKEI

目 次

第I章　幾何的定義

1　準備

まず本論文で用いられる基本的な用語や記号を定義する．

1.1　領域

以下，複素平面を $\mathbb{C}$ ，リーマン球面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を $\widehat{\mathbb{C}}$，単位円板 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ を $\mathbb{D}$ で表す．ここで $\widehat{\mathbb{C}}$ は立体射影により，$\mathbb{R}^3$ 内の中心 $(0,0,1/2)$，半径 $1/2$ の球面と同一視する．

リーマン球面上の連結な開集合を領域という．リーマン球面自身も領域である．ある領域 D に対し補集合 $\widehat{\mathbb{C}}-D$ が連結であるとき，D を単連結領域という．補集合が n 個 $(2\leqq n\leqq\infty)$ の連結成分からなるときは多重連結領域または n 重連結領域という．

1.2　曲線

区間 $[0,1]$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像 φ の像 $C=\varphi\left([0,1]\right)$ を $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の曲線という．$\varphi(0),\varphi(1)$ をそれぞれ曲線の始点，終点といい，両者を総称して端点という．φ が 1 対 1 であるような曲線をジョルダン曲線という．特に $\varphi(0)=\varphi(1)$ のとき閉曲線といい，φ が端点を除いて 1 対 1 であるような閉曲線をジョルダン閉曲線という．ジョルダン曲線もジョルダン閉曲線も自身と交わらないような連続曲線である．

ジョルダン閉曲線に関しては以下の定理が知られている:

定理 I − 1.1 (ジョルダンの閉曲線定理)**.** $\mathbb{C}$ 内のジョルダン閉曲線 C に対しその補集合 $\mathbb{C}-C$ は２つの領域に分けられ，一方は有界，他方は非有界であり，両者とも $\mathbb{C}$ 上の境界は C である．

上記の定理の中の有界な方の領域をジョルダン領域という．

1.3　向き

与えられたジョルダン閉曲線 C に対し，そのジョルダン領域を左に見るような向きを正の向き，その反対，つまり領域を右に見るような向きを負の向きという．

向きを保つ写像を以下のように特徴づける．任意の領域 A に対し，同相写像 $f:A\to A'$ を考える．閉包が A に含まれるような任意のジョルダン領域 D の境界 $C=\varphi([0,1])$ に正の向きを与えるとき，$f(D)$ の境界 $f(C)=(f\circ\varphi)([0,1])$ も正の向きになるならば同相写像 f は向きを保つという．

補題 I − 1.2. $\overline{G}$ をジョルダン領域の閉包とし，f を $\overline{G}$ から $\overline{G'}$ への同相写像とする．閉包が $\overline{G}$ に含まれるようなあるジョルダン領域 D が存在して f が D の境界の向きを保つならば，f は向きを保つ同相写像である．

これより向きを保つ同相写像の逆写像，合成写像も向きを保つことがわかる．

同相写像が向きを保つかどうかはヤコビアンによっても特徴づけられる．$\overline{G}$ を領域の閉包，$f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ を $\overline{G}$ から $\overline{G'}$ への同相写像とし，点 $z = x+iy \in \mathbb{C}$ で u, v は偏微分可能とする．

f の z でのヤコビアン $J_f(z)$ を

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

により定義する．$z = \infty$ または $f(z) = \infty$ のときはヤコビアンの符号のみを考えることにする．$J_f(z)$ が正，0，負であることを，$z = \infty$ のときは $\widehat{f}(z) = f(1/z)$ として，$f(z) = \infty$ のときは $J_{1/f}(z)$ の，正，0，負であることをもって定める．

z が f の正則点とは以下の 3 つの条件を満たすことである; (i) z が G の内点である．(ii) f が z で偏微分可能である．(iii) $J_f(z) \neq 0$ である．

z を $J_f(z) > 0$ であるような正則点とすると，z に対して近傍 U_z，$\overline{U_z} \subset G$ が存在し，f は U_z の境界の向きを保つ．補題 I −1.2 より，f は向きを保つ同相写像ということができる．

$J_f(z) < 0$ のときは，ある円板 D に対して f は D の境界の向きを保たない．よって f は向きを保つ同相写像ではない．

以上をまとめて次の定理を得る：

定理 I − 1.3. $f : G \to G'$ を同相写像とする．f が $J_f(z) > 0$ であるような正則点 z を持つとき，f は向きを保つ同相写像である．逆に向きを保つ同相写像のヤコビアンは任意の正則点で正になる．

2　等角写像からの準備

ここでは擬等角写像の幾何的定義の導入へつながる，等角写像とその周辺について述べる．なお補題 I −2.3 は [1] より引用した．

2.1　一次変換

一次式の商として書ける関数

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbb{C},\, ad-bc \neq 0)$$

を一次変換という．この一次変換を $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への変換とみなす．

補題 I − 2.1. 恒等変換でない一次変換は高々 2 つの不動点を持つ．

証明. $L(z) = z$ を解くことよりわかる．□

補題 I − 2.2. 一次変換に対して，与えられた相異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 を相異なる w_1, w_2, w_3 に写すような一次変換は一意的に存在する．

証明．存在は非調和比を用いて $f(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$，$g(w) = (w, w_1, w_2, w_3)$ とおけば $g^{-1} \circ f$ が求めるものである．一意性は上記のような性質を持つ一次変換を h とすると，合成写像 $h^{-1} \circ g^{-1} \circ f$ は与えられた相異なる 3 点を自身に写す．よって補題 I − 2.1 より不動点を 3 点以上持つような一次変換は恒等写像になるので，$h^{-1} \circ g^{-1} \circ f$ は恒等写像であり，よって $h = g^{-1} \circ f$ となる．□

補題 I − 2.3. $\widehat{\mathbb{C}}$，$\mathbb{C}$，$\mathbb{D}$ の正則自己同型写像はそれぞれ

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0) \tag{I.1}$$

$$L(z) = az + b \qquad (a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0) \tag{I.2}$$

$$L(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \qquad (a \in \mathbb{D},\ \theta \in \mathbb{R}) \tag{I.3}$$

の形に表され，この形に限る．

以上より 2 つの事実がわかる．まず補題 I − 2.2 と補題 I − 2.3 より，$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ 自身への等角写像は，相異なる 3 点の写り先を指定することで一意的に定まる．$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ 自身への等角写像も無限遠点の写り先が既に指定されていると考えることで同様に一意的に定まる．

また (I.2) より，$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への等角写像は $|a|$ 倍に拡大・縮小し，$\arg a$ だけ回転して b だけ平行移動するような相似変換に限られる．つまり $\mathbb{C}$ 上定義された等角写像によって例えば三角形を任意の三角形に，長方形を任意の長方形に写すことはできず，三角形なら内角がそれぞれ等しいもの，長方形なら辺の比が等しいものしか許されない．

2.2 写像定理

単連結領域の間の等角写像について，次に述べるリーマンの写像定理が知られている．

一般的な単連結領域は，境界の形によって次の 3 つの形に分類される：(i) 境界のない領域；(ii) 境界が 1 点のみからなる領域；(iii) 境界が 2 点以上からなる領域．

(i) は $\widehat{\mathbb{C}}$ を指している．$\widehat{\mathbb{C}}$ はコンパクトであるため他の領域とは等角写像では写りあわず，つまり等角同値にはなり得ない．また (ii) は，境界点が無限遠点なら $\mathbb{C}$，そうでないときは一次変換 $f(z) = 1/(z-a)$ により結果として $\mathbb{C}$ と等角同値になる．リュービルの定理によりこれは単位円板と等角同値にならない．よって問題になるのは (iii) の場合であるが，これに関しては単位円板と等角同値になるというのが次のリーマンの写像定理である：

定理 I − 2.4 (リーマンの写像定理)**.** 境界が 2 点以上からなる任意の単連結領域 G に対して G を単位円板の上へ写す等角写像 $f(z)$ が存在する．

定理 I − 2.4 と上記の考察によりただちに次の系を得る：

系 I − 2.5. $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の任意の単連結領域は $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ のいずれかと等角同値であり，これら 3 つは互いに等角同値ではない．

ジョルダン領域は単連結領域であり無限に多くの境界点を持つので等角に $\mathbb{D}$ に写される．つまりすべてのジョルダン領域は互いに等角同値である．

単連結領域を単位円板へ写す等角写像は，次のような正規化条件によって一意的に定まることもわかる：

定理 I − 2.6. 単連結領域 G から $\mathbb{D}$ への等角写像は，G の任意の点 z_0 における正規化条件 $f(z_0) = 0$，$f'(z_0) > 0$ のもとで一意的に定まる．

証明. f_1, f_2 を題意の条件を満たすような写像とすると，$f_1({f_2}^{-1}(z))$ は $\mathbb{D}$ の自己同型写像になり，よって補題 I −2.3 よりこれは一次変換 L の形に書ける．条件 $L(0) = 0$，$L'(0) > 0$ より L は恒等写像となり，よって $f_1 = f_2$ である．□

2.3　境界

等角写像によって写りあう二つの領域に対し，その境界の対応に関して以下の事実が知られている：

定理 I − 2.7 (カラテオドリの定理). G, G' を境界として n 個のジョルダン閉曲線を持つ n 重連結領域，$f : G \to G'$ を等角写像とする．このとき f は $\overline{G}$ から $\overline{G'}$ の上への同相写像へ拡張できる．

リーマンの写像定理において一意性に関する二つの正規化条件をあげたが，さらにジョルダン領域については一意性に関する別の条件を与えることができる．等角写像 $f : G \to G'$ は $J_f(z) = |f'(z)|^2$ であることから定理 I −1.3 により向きを保つ写像であり，拡張された等角写像 $f : \overline{G} \to \overline{G'}$ についても同様である．よって ∂G 上に G に関して正の向きに並んだ相異なる 3 点 p_1, p_2, p_3 に対して，$\partial G'$ 上の相異なる 3 点 $f(p_1), f(p_2), f(p_3)$ は G' に関して正の向きに並んでいる．
上記をふまえて，以下の定理がある：

定理 I − 2.8. G, G' をジョルダン領域とする．このとき等角写像 $f : G \to G'$ は，それぞれ G, G' の境界上に正の向きに並んでいる相異なる 3 点 p_1, p_2, p_3，p'_1, p'_2, p'_3 についての正規化条件 $p'_j = f(p_j)$　$(j = 1, 2, 3)$ のもとで一意的に定まる．

3　幾何的定義

3.1　四辺形

ジョルダン領域 Q と，Q の境界 ∂Q 上に正の向きに並べられた相異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 との組 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ を四辺形という．誤解がなければ単に Q と書くこともある．$\{z_j\}$ をその四辺形の頂点という．

四辺形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ の頂点は，境界 ∂Q を 4 つのジョルダン曲線に分ける．それぞれ曲線 $\widehat{z_1 z_2}$ を Q の下辺，$\widehat{z_3 z_4}$ を上辺，$\widehat{z_2 z_3}$ を右辺，$\widehat{z_4 z_1}$ を左辺と呼ぶ．

定理 I – 2.8 からもわかるように，任意の四辺形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ を $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$ に頂点も含めて等角に写すことはジョルダン領域の境界の 4 点を指定することになるので一般的にはできない．よってすべての四辺形は等角写像により等角同値類へ分類されることになる．

3.2　標準長方形，モジュラス

四辺形の等角同値類が持つ性質を調べるため，四辺形を長方形へ写すことを考える．

まずリーマンの写像定理により，任意の四辺形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ は単位円板 $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z_1', z_2', z_3', z_4')$ の上に等角に写る．ここで z_j' は Q の頂点 z_j の像である．さらに Schwarz-Christoffel の公式

$$w(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z - z_1')(z - z_2')(z - z_3')(z - z_4')}}$$

により，単位円板 $\mathbb{D}(z_1', z_2', z_3', z_4')$ は長方形とその頂点からなる四辺形 R へ等角に写る．

上記の写像を合成することで，任意の四辺形を頂点も含めて長方形へ等角に写すことができる．このような等角写像を標準写像，また標準写像によって写された長方形を標準長方形と呼ぶ．

一次関数の相似変換 $f(z) = az + b$ は等角写像であるので，ある四辺形の等角同値類に含まれる長方形に対して，それに相似な長方形たちはすべて同じ等角同値類に分類される．また逆に，２つの長方形が頂点の対応も含めて等角写像で写りあったとすると，等角写像は定理 I – 4.12 により境界も含めた同相写像へ拡張できる．すると長方形に対して鏡像の原理を適用することができ，この操作を繰り返すことで写像は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像へ拡張される．補題 I – 2.3 とその後の考察にもあるように $\mathbb{C}$ の自己同型写像は相似変換であったので，２つの長方形は相似となる．

つまりある四辺形の持つすべての標準長方形は縦と横の長さの比が等しい．ここで四辺形が持つ標準長方形の上下辺の長さを a，左右辺の長さを b として横と縦の長さの比を $M(Q) = a/b$ で表す．この値 $M(Q)$ を四辺形のモジュラスと呼ぶ．上記より 2 つの四辺形が等角同値のときは相似な標準長方形を持つので，同じモジュラスの値を持つ．つまりこのモジュラスが各々の等角同値類の持つ固有の値，等角不変量となっている．

四辺形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ の頂点を $Q(z_2, z_3, z_4, z_1)$ と入れ替えることで上下辺と左右辺が逆になり，

$$M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = \frac{1}{M(Q(z_2, z_3, z_4, z_1))}$$

を得る．このモジュラス $M^*(Q) = M(Q(z_2, z_3, z_4, z_1))$ を共役のモジュラスと呼ぶ．

3.3　幾何的定義

モジュラスは等角写像で変わることのない値である．擬等角写像はこのモジュラスの変化をある程度許容するような写像として定義される．

G を領域，f を G 上で定義された向きを保つ同相写像とする．閉包が G に含まれるような四辺形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ は写像 f により四辺形 $Q'(z_1', z_2', z_3', z_4')$ に写るとする．Q と Q' のモジュラスの比 $M(Q')/M(Q)$ のことを，f における Q の歪曲率といい，歪曲率の上限

$$K(G) = \sup_{\overline{Q} \subset G} \frac{M(Q')}{M(Q)}$$

を，G における f の最大歪曲率という．Q と Q' が常に等角同値類に分類されるときは $K(G) = 1$ となる．四辺形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ と $Q(z_2, z_3, z_4, z_1)$ の歪曲率は逆数になることから，$K(G) \geqq 1$ である．

最大歪曲率を用いて擬等角写像を次のように定義する：

定義 I − 3.1 (幾何的定義)**.** 平面領域 G 上で定義された向きを保つ同相写像 f に対して，その最大歪曲率 $K(G)$ が有限であるとき，f を擬等角写像であるという．また $K(G)$ が $K(G) \leqq K < \infty$ であるとき，f を K 擬等角写像という．

K 擬等角写像 f に対し次の特徴付けは有用である:

補題 I − 3.2. 任意の $\overline{Q} \subset G$ を満たす四辺形 Q と $Q' = f(Q)$ に対して，向きを保つ同相写像 $f : G \to G'$ が K 擬等角写像であることの必要十分条件は

$$\frac{M(Q)}{K} \leqq M(Q') \leqq KM(Q)$$

が成り立つことである．

4　極値的長さ

前節で四辺形のモジュラスを用いることにより擬等角写像を定義したが，モジュラス自身は等角写像の概念を用いなくても定義することができる．

4.1　モジュラスの別の形

出発点として，まずモジュラスを a/b とは別の形で書き表すことを考える．

Q を四辺形，f を $w = u + iu$-平面における標準長方形 $R = R(0, a, a+ib, ib)$ への標準写像とする．ここで $R(0, a, a+ib, ib)$ は頂点として 4 点 $0, a, a+ib, ib$ を持つような長方形を表す．無限遠点を除外することで Q の内部において等式 $J_f(z) = |f'(z)|^2$ が成り立ち，R の面積を計算して

$$\iint_Q |f'(z)|^2 d\sigma = ab \tag{I.4}$$

を得る．ここで $d\sigma = dxdy$ は $z = x + iy$-平面の面素を表している．

我々の目的は $M(Q) = a/b$ を別の形で与えることであるので，標準長方形 R の高さ b を積分の形で表したい．そのためにまず R 内の垂直な線分 $C'_u = \{u + iv \mid 0 < v < b\}$ と，その原像 $C_u = f^{-1}(C'_u)$ を考える．カラテオドリの定理より，正則なジョルダン曲線 C_u は 2 つの端点をそれぞれ Q の下辺，上辺の上に持つ．C_u の像 C'_u の曲線長は b なので線積分より

$$\int_{C_u} |f'(z)||dz| = b \tag{I.5}$$

を得る．

ここで，端点を Q の下辺，上辺の上にそれぞれ持つような曲線の族 $\Im_a$ を考える．定義より $\Im_a$ はすべての C_u を含み，$\Im_a$ に含まれる曲線は以下の議論に支障のない程度の滑らかさを持つとする．曲線 $C \in \Im_a$ に対して，像 $f(C) = C'$ は R の下辺と上辺を結ぶようなジョルダン曲線であり，その長さは少なくとも b である．よって $(I.5)$ 式から $C \in \Im_a$ に対して

$$\int_{C} |f'(z)||dz| \geqq b \tag{I.6}$$

を得る．等式は $C = C_u$ のときに限る．

$M(Q) = ab/b^2$ であるので，式 (I.4) と (I.5) より以下の補題が導かれる．

補題 I − 4.1. 四辺形 Q のモジュラスは

$$M(Q) = \frac{\displaystyle\iint_Q |f'(z)|^2 d\sigma}{\left(\displaystyle\inf_{C \in \Im_a} \int_C |f'(z)||dz|\right)^2} \tag{I.7}$$

と表される．ここで f' は Q の標準写像の導関数であり，$\Im_a$ は上記で定義された曲線族である．

4.2　極値的長さによる定義

補題 I − 4.1 によりモジュラスを関数 f の積分の形で与えることができたが，ここで f は等角写像であるため，f を等角性を仮定しないような関数に置き換えることを考える．

Q 内で定義された非負可測関数 ϱ のある族 $\wp$ を考える．$\wp$ は $|f'|$ を含み，また $\wp$ に含まれる関数は以下の積分に関して支障のない程度の連続性を仮定する．

任意の $\varrho \in \wp$ に対して標準長方形内の関数 $\varrho_1(f(z)) = \varrho(z)/|f'(z)|$ を考える．(I.4)，(I.5) に対応して

$$\iint_Q \varrho^2 d\sigma = \int_0^a du \int_0^b (\varrho_1(u + iv))^2 \, dv$$

と

$$\inf_{C\in\Im_a}\int_C \varrho|dz| \leqq \int_{C_u}\varrho|dz| = \int_0^b \varrho_1(u+iv)dv$$

を得る．よって Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}\iint_Q \varrho^2 d\sigma &\geqq \int_0^a \frac{1}{b}\left(\int_0^b \varrho_1(u+iv)dv\right)^2 du \\ &\geqq \frac{a}{b}\left(\inf_{C\in\Im_a}\int_C \varrho|dz|\right)^2 \end{aligned} \tag{I.8}$$

を得る．$a/b = M(Q)$ なので (I.7) より $\varrho = |f'|$ のとき等式が成り立つ．式を簡略化するために記号 l と m を用いて

$$l_\varrho(C) = \int_C \varrho|dz|, \qquad m_\varrho(Q) = \iint_Q \varrho^2 d\sigma \tag{I.9}$$

とおくと，以下の定理を得る．

定理 I − 4.2. 四辺形 Q に対し，そのモジュラスは

$$M(Q) = \inf_{\varrho\in\wp}\frac{m_\varrho(Q)}{\left(\inf\limits_{C\in\Im_a} l_\varrho(C)\right)^2} \tag{I.10}$$

と表せる．等式が成り立つのは Q 上 a.e. に $\varrho = |f'|$ のときで，ここで f は Q の標準写像である．

ϱ には等角性は仮定されておらず，等角写像を用いずにモジュラスを定義できた．(I.10) の右辺の逆数，つまり $\left(\inf_{C\in\Im_a} l_\varrho(C)\right)^2 / m_\varrho(Q)$ の上限を曲線族 $\Im_a$ の極値的長さといい，定理 I −4.2 により定義されたモジュラスによる擬等角写像の定義を，極値的長さによる定義という．

5　環状領域

3 節で四辺形のモジュラスにより擬等角写像を定義した．ここで四辺形は単連結領域であったが，四辺形の代わりに二重連結領域を用いても擬等角写像を定義することができる．この節では，二重連結領域を用いた擬等角写像の定義について述べる．

以下，二重連結領域のことを環状領域，特に同心円に囲まれた環状領域を円環と呼ぶ．

5.1　環状領域による定義

等角写像論において，次のような環状領域の像に関する性質が知られている:

定理 I − 5.1. 任意の環状領域は円環 $\{z \mid 0 \leqq r_1 < |z| < r_2 \leqq \infty\}$ へ等角に写される．

上記の定理のような，環状領域を円環へ写す等角写像を標準写像，標準写像によってできる円環を標準円環という．この定理により，標準円環を見ることで環状領域の等角不変量を求めてモジュラスを定義することができる．まず円環から円環への等角写像はカラテオドリの定理により境界も含めた同相写像へ拡張される．これにより鏡像の原理が適用できて，この操作を繰り返すことで $\mathbb{C}-\{0\}$ 上の等角写像へ拡張される．$\mathbb{C}-\{0\}$ 上の等角写像は相似変換もしくは k を定数として $f(z)=k/z$ の形の変換に限られるので，r_1 と r_2 の比は等角写像によって変わらない．つまり 2 つの円環は，それらの半径の比 r_2/r_1 が等しいときに限り等角に写りあうことができる．またすべての円環を等角同値類に分類したとき，各々の同値類は r_2/r_1 を固有の値として持つ．

環状領域 B のモジュラスを

$$M(B)=\log\frac{r_2}{r_1}$$

と定義する．ここで $r_1=0$ または $r_2=\infty$ のときは $M(B)=\infty$ とする．四辺形による定義と同様に $M(B)$ を用いて擬等角写像を定義しよう．

$G\subset\widehat{\mathbb{C}}$ を領域，$f:G\to G'$ を向きを保つような同相写像とする．環状領域 $B,\overline{B}\subset G$ と B の f による像 B' に対し，B と B' のモジュラスの比 $M(B')/M(B)$ を f における B の歪曲率といい，歪曲率の上限

$$K(G)=\sup_{\overline{B}\subset G}\frac{M(B')}{M(B)}$$

を G における，環状領域による f の最大歪曲率という．K を用いて擬等角写像を以下のように定義する:

定義 I – 5.2. 領域 $G\subset\widehat{\mathbb{C}}$ 上定義された向きを保つような同相写像 f に対し，その環状領域による最大歪曲率 $K(G)$ が有界であるとき，f を擬等角写像という．また $K(G)\leqq K<\infty$ であるとき，f を K 擬等角写像という．

この定義を擬等角写像の環状領域による定義という．環状領域による定義より四辺形による定義と同様，直ちに次が成り立つ; 向きを保つ同相写像 $f:G\to G'$ と，任意の $\overline{B}\subset G$ を満たす環状領域 B とその像 $B'=f(B)$ に対し，f が環状領域による定義において K 擬等角写像であるための必要十分条件は

$$\frac{M(B)}{K}\ \leqq\ M(B')\ \leqq\ KM(B)$$

が成り立つことである．

5.2 極値的長さによる拡張

上記の環状領域のモジュラスを，4 節での考察と同様に等角写像を用いずに別の形で特徴づける．

B を環状領域，$(-B)_1,(-B)_2$ をそれぞれ B から作られる各々の補集合とし，B を円環 $B'=\{w\mid r_1<|w|<r_2\}$ へ写す標準写像を f とする．

ここで $\Im_c$ を，B' 内の同心円 $\{w\mid |w|=r\,,\,r_1<r<r_2\}$ の f^{-1} による原像の曲線族とする．任意の曲線 $C\in\Im_c$ は $(-B)_1$ と $(-B)_2$ を分ける．$\Im$ を，$(-B)_1$ と $(-B)_2$ を分けるようなジョルダン曲線の族とし，$\Im$ 内の曲線には以下の積分に支障のない程度の滑らかさを仮定する．

$\wp$ を，B 内の十分に滑らかな非負関数の族とする．ここで $\wp$ は $|f'/f|$ も含む．そして任意の関数 $\varrho \in \wp$ に対して関数 $\varrho_1\bigl(f(z)\bigr) = \varrho(z)|f(z)/f'(z)|$ を考える．これより $m_\varrho(B)$ の積分と Schwarz の不等式から

$$\begin{aligned} m_\varrho(B) &= \iint_B \varrho^2 d\sigma \\ &= \iint_B (\varrho_1)^2 \, J_w f \, \frac{1}{|f|^2} d\sigma \;=\; \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} \varrho_1^2(re^{i\varphi}) d\varphi \\ &\geqq \frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \left(\int_0^{2\pi} \varrho_1(re^{i\varphi}) \, d\varphi \right)^2 \end{aligned}$$

が得られ，$C_1 \in \Im_c$，つまり $f(C_1)$ が半径 r の同心円ならば

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varrho_1(re^{i\varphi}) \, d\varphi &= \int_{C_1} \varrho \, |dz| \\ &\geqq \inf_{C \in \Im_c} l_\varrho(C) \;\geqq\; \inf_{C \in \Im} l_\varrho(C) \end{aligned}$$

となる．上記より $M(B) < \infty$ のとき，

$$\begin{aligned} m_\varrho(B) &\geqq \frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \Bigl(\inf_{C \in \Im} l_\varrho(C) \Bigr)^2 \frac{dr}{r} \\ &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} \Bigl(\inf_{C \in \Im} l_\varrho(C) \Bigr)^2 = \frac{1}{2\pi} M(B) \Bigl(\inf_{C \in \Im} l_\varrho(C) \Bigr)^2 \end{aligned}$$

を得る．ここで等式が成り立つのは $\varrho = |f'/f|$ のときである．$M(B) = \infty$ のときは，$\inf l_\varrho(C) > 0$ ならば $m_\varrho(B) = \infty$ を得る．

以上の議論より次の定理が導かれる:

定理 I − 5.3. 環状領域 B のモジュラスは

$$M(B) = \inf_{\varrho \in \wp} \frac{2\pi \, m_\varrho(B)}{\Bigl(\inf_{C \in \Im} l_\varrho(C) \Bigr)^2} \tag{I.11}$$

の形で表される．等号が成り立つのは B 上 a.e. に $\varrho = |f'/f|$ のときである．

環状領域のモジュラスは別の方法でも次のように定義することができる．いま $\Im_d$ を線分 $C = \{w \mid r_1 < |w| < r_2, \arg w = \varphi\}$ の原像 $f^{-1}(C)$ の族とし，$\Im^* \supset \Im_d$ を B 内にある，$(-B)_1$ と $(-B)_2$ を結ぶ，十分に滑らかなジョルダン曲線の族とする．$\wp$ を先ほどと同じ性質を持つ関数族とすると，$\varrho \in \wp$ ならば

$$\begin{aligned} m_\varrho(B) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \Bigl(\varrho_1(re^{i\varphi}) \Bigr)^2 \frac{dr}{r} \\ &\geqq \frac{1}{\log{(r_1/r_2)}} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_{r_1}^{r_2} \varrho_1(re^{i\varphi}) \frac{dr}{r} \right)^2 \end{aligned}$$

かつ

$$l_\varrho(C)=\int_{r_1}^{r_2}\varrho_1(re^{i\varphi})\frac{dr}{r}\ \geqq\ \inf_{C\in\Im^*}l_\varrho(C)$$

が得られ，これより

$$M(B)=\sup_{\varrho\in\wp}\frac{2\pi\Big(\inf\limits_{C\in\Im^*}l_\varrho(C)\Big)^2}{m_\varrho(B)} \tag{I.12}$$

が得られる．ここで等号が成り立つのは B 上 a.e. に $\varrho=|f'/f|$ のときである．

6 四辺形による定義と環状領域による定義

それぞれ四辺形と環状領域によるモジュラスの最大歪曲率によって擬等角写像を定義したが，それらが互いに同値であることを示す．

6.1 四辺形のモジュラス

$l_\varrho(C)=\int_C\varrho|dz|$，$m_\varrho(Q)=\iint_Q\varrho^2d\sigma$ において，$\varrho(z)=1$ のときはそれぞれユークリッド平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ での長さ $l(C)$，面積 $m(Q)$ となる．ここで記号

$$s_a=s_a(Q)=\inf_{C\in\Im_a}l(C)$$

を導入し，これを Q の上下辺の距離という．同様に左右辺の距離 s_b も定義する．

最初の性質として，モジュラスの性質として基本的な Rengel の不等式を挙げる：

定理 I − 6.1 (Rengel の不等式)**.** 四辺形 Q のモジュラスに対して

$$\frac{\big(s_b(Q)\big)^2}{m(Q)}\leqq M(Q)\leqq\frac{m(Q)}{\big(s_a(Q)\big)^2} \tag{I.13}$$

が成り立つ．ここで等式が成り立つのはどちらの場合も Q が長方形のときに限る．

証明. 右の不等式が成り立つことは (I.10) より明らかである．左の不等式も $M(Q(z_1,z_2,z_3,z_4))=1/M(Q(z_2,z_3,z_4,z_1))$ であることからすぐわかる．

よって問題となるのは等式が成り立つための必要充分条件である．十分条件，つまり Q が長方形のときは明らかに等式が成り立つ．必要条件，つまり等式が成り立つならば Q が長方形であることを証明するためにまず Q から $R(0,M(Q),M(Q)+i,i)$ への標準写像 $f:Q\to R$ を考え，f の

逆関数を g とする．そのとき

$$\begin{aligned} M(Q)\bigl(s_a(Q)\bigr)^2 &= M(Q)\inf_{C\in\Im_a}\biggl(\int_{f(C)}|g'||dw|\biggr)^2 \\ &\leqq \int_0^{M(Q)}du\biggl(\int_0^1|g'(u+iv)|dv\biggr)^2 \\ &\leqq \int_0^{M(Q)}du\int_0^1|g'(u+iv)|^2dv \;=\; m(Q) \end{aligned}$$

となる．(I.13) の等式が成り立つという仮定より $M(Q)\bigl(s_a(Q)\bigr)^2 = m(Q)$ であるのでこれより任意の u に対して

$$\int_0^1|g'(u+iv)|^2dv = \biggl(\int_0^1|g'(u+iv)|dv\biggr)^2 = \inf_{C\in\Im_a}\biggl(\int_{f(C)}|g'||dw|\biggr)^2 \tag{I.14}$$

が得られる．

ここで (I.14) の前者の等式をみると，これは Schwarz の不等式の等式が成り立っている場合である．よって $|g'(u+iv)|$ は v の関数として定数，つまり v に依存しない関数である．これにより (I.14) の中央の項が計算により $|g'(u)|^2$ であることがわかる．さらに後者の等式が成り立つことから結果として $|g'|$ は定数となる．つまり g は相似変換ということになり，主張が得られる．□

Rengel の不等式とは別に，s_a, s_b による次の評価式も知られている:

補題 I − 6.2. 四辺形 Q のモジュラスに対して

$$M(Q) \leqq \pi\,\frac{1+2\log(1+2\,s_a/s_b)}{\bigl(\log(1+2\,s_a/s_b)\bigr)^2}$$

が成り立つ．

この補題において，s_a と s_b を入れ替え，$M(Q)$ を $1/M(Q)$ とすると下からの評価も得られる．

次に Rengel の不等式の応用として得られる以下の 2 つの性質を挙げる．まずモジュラスの劣加法性に関する定理であり，(I.15) で与えられる．この式はモジュラスの単調性も示している．

補題 I − 6.3. $Q_n\,(n=1,2,\cdots)$ を四辺形とし，これらは互いに内点を共有せず，またこれらの閉包の和集合は四辺形 Q の閉包に含まれるとする．各々の Q_n の上下辺が Q の 2 つの上下辺にそれぞれ含まれるならば，

$$\sum_n M(Q_n) \leqq M(Q) \tag{I.15}$$

が成り立つ．Q が長方形ならば，等式が成り立つのは Q_n のすべてが長方形であり $\sum m(Q_n) = m(Q)$ が成り立つときに限る．

証明．モジュラスは等角写像において不変であるので，Q を長方形 $R(0, M(Q), M(Q)+i, i)$ と仮定してよい．そのとき $s_a(R)=1$ より $s_a(Q_n) \geqq 1$ であり，これより Rengel の不等式から

$$\sum_n M(Q_n) \leqq \sum_n m(Q_n) \leqq m(Q) = M(Q)$$

が得られる．

等式が成り立つ場合に関しては，$\sum M(Q_n) = M(Q)$ なら $\sum m(Q_n) = m(Q)$ が成り立ち，Rengel の不等式よりすべての Q_n が長方形となるのは明らか，$\sum m(Q_n) = m(Q)$ でありすべての Q_n が長方形であれば Rengel の不等式の等号が成り立つので $\sum M(Q_n) = M(Q)$ を得る．□

次にモジュラスの収束性の性質を述べる．ここで四辺形の列 Q_n, $n = 1, 2, \cdots$ が Q に内側から収束するとは，任意の n に対して $Q_n \subset Q$ となり，また任意の $\varepsilon > 0$ に対してある n_ε が存在し，$n \geqq n_\varepsilon$ となるようなすべての n に対して Q と Q_n のそれぞれ対応する頂点の距離が ε でおさえられるときにいう．

補題 I − 6.4. 四辺形の列 $\{Q_n\}$ が Q に内側から収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty} M(Q_n) = M(Q)$$

が成り立つ．

証明. Q から長方形 $R(0, M(Q), M(Q)+i, i)$ への標準写像 f を考える．f は連続写像であり，いまコンパクト集合 $\overline{Q}$ 上で定義できるので f は $\overline{Q}$ 上一様連続となる．よって Q_n の像 $f(Q_n) = Q'$ は R へ内側から収束する．

これより，任意の ε, $0 < \varepsilon < \min(1/2, M(Q)/2)$ に対してある n_ε が存在して，$n \geqq n_\varepsilon$ に対して Q' の各々の辺と R のそれぞれ対応する辺が幅 ε の 4 つの帯状領域の中に含まれるようにできる．このとき $s_a(Q') \geqq 1 - 2\varepsilon$，$s_b(Q') \geqq M(Q) - 2\varepsilon$ となる．$m(Q'_n) \leqq M(Q)$ であるので，Rengel の不等式より

$$\frac{(M(Q)-2\varepsilon)^2}{M(Q)} \leqq M(Q'_n) \leqq \frac{M(Q)}{(1-2\varepsilon)^2}$$

が得られる．標準写像，つまり等角写像のもとではモジュラスは不変であるので $M(Q') = M(Q)$ であり，ε は任意であったのでこれより主張を得る．□

6.2　環状領域のモジュラス

環状領域のモジュラスに関しても補題 I − 6.3，補題 I − 6.4 に類似した単調性，収束性が成り立つ．

補題 I − 6.5. B を環状領域，$B_1, B_2, \cdots$ を B の部分領域とし，任意の B_n は $(-B)_1$ と $(-B)_2$ を分けるとする．このとき

$$\sum_n M(B_n) \leqq M(B)$$

が成り立つ．B が円環のとき，等式が成り立つのはすべての B_n が円環であり，$\sum m(B_n) = m(B)$ が成り立つときに限る．

補題 I − 6.6. 環状領域の列 $\{B_n\}$ が B に内側から収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty} M(B_n) = M(B)$$

が成り立つ．

ここで環状領域 B の境界がともに解析的な閉曲線であるとき，B は解析的であるという．補題 I $-$6.6 と関連して次の事実がある; 環状領域 B に対して，B に内側から収束するような解析的な環状領域の列が存在する．実際，収束列を標準円環の方で考えそれを標準写像で戻すという操作を考えれば良い．

次に $M(B)$ と $M(Q)$ の関わりを見てみよう．原点中心の円環は実軸の正の部分にそって切りこみを入れることにより四辺形ともみることができる．つまり環状領域のモジュラスと四辺形のモジュラスとの間にはある関係が存在するであろう．具体的に見てみよう．円環を $B = \{z \bigm| 0 < r_1 < z < r_2 < \infty\}$ とする．これを $w(z) = \log z$ で写した場合，B の内円周，外円周はそれぞれ虚軸に平行な直線に，切り込み部分は実軸に平行な直線に写り，つまり B の $\log$ による写像は長方形 $Q = R(\log r_1, \log r_2, \log r_2 + 2\pi i, \log r_1 + 2\pi i)$ となる．この四辺形の上下辺の長さは $\log(r_2/r_1)$，左右辺の長さは 2π であるので Q のモジュラスは $2\pi/\log(r_2/r_1)$，よって環状領域のモジュラスと四辺形のモジュラスとの間には

$$M(B)M(Q) = 2\pi$$

という関係が存在している．一般には次の事実がある:

補題 I $-$ 6.7. Q_n, $n = 1, 2, \cdots$ を互いに交わらない四辺形とし，B を環状領域，B の補集合が作る２つの領域をそれぞれ $(-B)_1$，$(-B)_2$ とする．各々の Q_n の上辺，下辺がそれぞれ $(-B)_1$，$(-B)_2$ に含まれているならば

$$\sum M(Q_n) = \frac{2\pi}{M(B)} \tag{I.16}$$

が成り立つ．B が円環のとき，等式が成り立つのは Q_n の上下辺が B の境界上にあり，左右辺は B 上の中心からの放射線分になっており，さらに $\sum m(Q_n) = m(B)$ であるときに限る．

証明. B は解析的であると仮定しても一般性を失わない．まず Q_n の上下辺は $\overline{B}$ 上にないと仮定する．関数 ϱ を

$$\varrho(z) = \begin{cases} \left|f'(z)/f(z)\right| & z \in B \\ 0 & z \notin B \end{cases}$$

で定義する．ここで f は B を円環 $\{r_1 < |f(z)| < r_2\}$ へ写す標準写像である．$\Im$ を Q_n の上辺と下辺を結ぶような解析的な曲線族であるとすると任意の $C \in \Im$ は B の境界を高々有限回横切るので，ϱ は有限個の点を除いて連続である．よって ϱ は 4.2 節で用いた関数族 $\wp$ の元となっている．

各々の Q_n の上辺，下辺はそれぞれ $(-B)_1$，$(-B)_2$ 上にあるので任意の $C \in \Im$ は $(-B)_1$ と $(-B)_2$ を結んでいる．よって

$$l_\varrho(C) = \int_C \varrho\,|dz| \geqq \int_{C\cap B} \left|\frac{f'}{f}\right| |dz| \geqq \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = M(B)$$

が成り立つ．よって定理 I $-$4.2 より各々の Q_n に対して

$$M(Q_n) \leqq \frac{1}{\bigl(M(B)\bigr)^2} \iint_{Q_n\cap B} \left|\frac{f'}{f}\right|^2 d\sigma \tag{I.17}$$

を得る．ここで

$$\iint_B \left|\frac{f'}{f}\right|^2 d\sigma = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} \frac{dr\,d\theta}{r} = 2\pi M(B)$$

であるのでこれと (I.17) をあわせて

$$\sum_n M(Q_n) \leqq \frac{1}{\bigl(M(B)\bigr)^2} \iint_{(\bigcup Q_n)\cap B} \left| \frac{f'}{f} \right|^2 d\sigma \leqq \frac{2\pi}{M(B)}$$

が得られる．

B が円環のとき，Q_n の上下辺が B の境界上にあり左右辺が B 上の中心からの放射線分であるならば

$$M(Q_n) = \frac{2\pi\, m(Q_n)}{m(B)\, M(B)}$$

であり，$\sum_n m(Q_n) = m(B)$ のとき補題の等式が満たされる．□

6.3 四辺形による定義から環状領域による定義へ

以上の補題をふまえ，次の２つの定理を証明する．これにより擬等角写像の四辺形による定義と環状領域による定義が同値であることがわかる．

定理 I − 6.8. 環状領域 B から B' への写像が四辺形による定義での K 擬等角写像 f ならば

$$\frac{1}{K} M(B) \leqq M(B') \leqq K M(B)$$

が成り立つ．

証明. 共役のモジュラスを見ればよいので，$M(B') \leqq KM(B)$ を示せば十分である．

写像 f の境界のふるまいについては何も仮定がないので，まず B' を解析的な環状領域で近似することから始める．補題 I −6.6 とその後の考察により B に内側から収束するような解析的な環状領域列が存在するので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\overline{B'_\varepsilon} \subset B'$ であり $M(B'_\varepsilon) > M(B') - \varepsilon$ とできるような $\overline{B'_\varepsilon}$ が取れる．B'_ε の原像 B_ε は B に含まれ，補題 I −6.5 のモジュラスの単調性により $M(B_\varepsilon) < M(B)$ がわかる．

ここで B_ε に対して $M(B'_\varepsilon) \leqq KM(B_\varepsilon)$ を示すことができれば，$\varepsilon \to 0$ とすることで主張が得られる．よってこれより B, B' はともに解析的であり，f は $\overline{B} \to \overline{B'}$ の同相写像と仮定してよい．さらに標準写像は境界まで拡張できるので，B を円環 $\{z \mid 0 < r_1 < |z| < r_2 < \infty\}$ であると仮定できる．

さて，B は円環であるので実軸上の線分 $r_1 < x < r_2$，$-r_2 < x < -r_1$ により２つの四辺形 Q_1, Q_2 に分けられる．このときの B の切り口を Q_1, Q_2 それぞれの左右辺とする．よって上下辺は円弧の部分になっている．B' 上にある Q_1 と Q_2 の f による像をそれぞれ Q'_1, Q'_2 とする．このとき補題 I −6.7 より

$$M(Q_1) + M(Q_2) \leqq \frac{2\pi}{M(B)}$$

$$M(Q'_1) + M(Q'_2) \leqq \frac{2\pi}{M(B')}$$

をそれぞれ得る．f は K 擬等角 であったので

$$M(B') \leqq \frac{2\pi}{M(Q'_1) + M(Q'_2} \leqq \frac{2\pi}{M(Q_1) + M(Q_2)} \leqq KM(B)$$

が得られ，主張を得る．□

6.4　環状領域による定義から四辺形による定義へ

定理 I − 6.9. f が G 上定義された環状領域による定義での K 擬等角写像ならば，f は四辺形による定義での K 擬等角写像である．

証明．任意の四辺形 $Q, \overline{Q} \subset G$ とその像 $Q' = f(Q)$ に対して歪曲率 $M(Q')/M(Q)$ が K 以下であることを示せばよい．環状領域のモジュラスは等角不変であるので Q, Q' をそれぞれ長方形 $R(0, M, M+i, i)$，$R'(0, M', M'+i, i)$ と置き換えることができる．

ここで R' 内にある長方形 R'_n を

$$R'_n = \left\{ z \;\middle|\; z \in R',\, d(z, \partial R') \geqq 1/n \right\}$$

とおく．ここで $2/n < \min(1, M)$ である．R'_n の原像を R_n とおくと，$n \to \infty$ で R_n は R に内側から収束し，補題 I − 6.4 より

$$\lim_{n\to\infty} M(R_n) = M \tag{I.18}$$

となる．さらに R'_n 内を垂直な線分で，全部で n^3 個の長方形ができるように分ける．このとき細分化された各々の長方形を R'_{nk} とすると R'_{nk} のそれぞれの上下辺，つまり横の長さは $(M' - 2/n)/n^3$ となっている．R_{nk} を R'_{nk} の原像とすると補題 I − 6.3 のモジュラスの単調性より

$$\sum_{k=1}^{n^3} M(R_{nk}) \leqq M(R_n)$$

となり，これより

$$M(R_{nk_0}) \leqq \frac{M(R_n)}{n^3} \tag{I.19}$$

となるような R_{nk_0} が存在する．

次に，R' の境界，R'_{nk_0} の左右辺，それと R' の右辺の中点と R'_{nk_0} の右辺の中点を結ぶ線分を境界として持つような環状領域を B'_n とする．図にすると下図のようになる．下図の点線でない線を境界とするような環状領域が B'_n である．

B_n を B'_n の原像とすると，B_n 内の長方形 R_{nk_0} の左右辺はちょうど B_n の境界上にあるので補題 I − 6.7 が適用できて，四辺形の共役のモジュラスをとって

$$\frac{1}{M(R_{nk_0})} \leqq \frac{2\pi}{M(B_n)}$$

が得られる．(I.19) とあわせて

$$M(B_n) \leqq \frac{2\pi}{n^3} M(R_n) \tag{I.20}$$

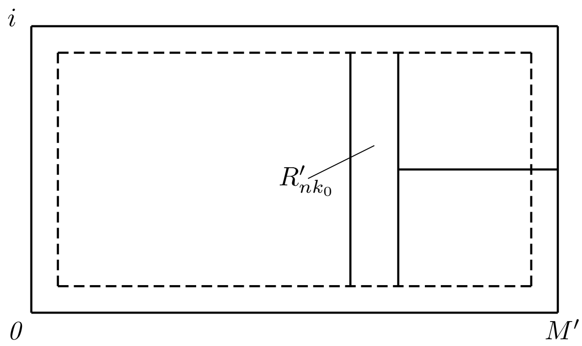


図 : B'_n

を得る．

$M(B'_n)$ に関する評価も見てみよう．ここで 5.2 節で出てきた環状領域のモジュラスに関する評価式 (I.12) を活用することにする．$\varrho(z)$ を，$z \in B'_n$ が $R_{nk'_0}$ かもしくは $R_{nk'_0}$ の左右辺上にあるときは $n^2 > M'$ として

$$\varrho(z) = \frac{n^3}{M' - 2/n}$$

とおき，その他の z に対しては $\varrho(z) = n$ とおく．そのとき B'_n の 2 つの境界を結ぶ任意の曲線 C に対して $l_\varrho(C) \geqq 1$ となる．よって (I.12) より

$$M(B'_n) \geqq \frac{2\pi}{m_\varrho(B'_n)} > \frac{2\pi}{n^3\left(\dfrac{M'}{n} + \dfrac{1}{M' - 2/n}\right)}$$

が成り立つ．これと (I.20) をあわせて

$$\frac{M(B'_n)}{M(B_n)} > \frac{1}{M(R_n)\left(\dfrac{M'}{n} + \dfrac{1}{M' - 2/n}\right)}$$

を得る．いま仮定より $K > M(B'_n)/M(B_n)$ であり，右辺は (I.18) より $n \to \infty$ で M'/M となる．よって $M' \leqq KM$ がいえ，主張を得る．□

第II章　解析的定義

この章では擬等角写像のもう一つの定義である解析的定義とその性質について述べる．擬等角写像の幾何的定義と解析的定義はそれぞれ独立に研究されてきたが，1960 年頃に L.Bers がそれら 2 つの概念が互いに同値であることを示した．

幾何的定義はモジュラスにより定義されたが，解析的定義は $z, \overline{z}$ に関する偏導関数の絶対値の比により定義され，さらにその偏導関数は超関数によって表されることを見る．そして幾何的定義と解析的定義は同値な概念であることが示される．

1　動機

1.1　等角性

擬等角写像の幾何的定義はリーマンの写像定理を基とする等角写像の性質を用いてモデュラスを導入することによって行った．それに対し，解析的定義は等角写像の性質を見直すところから始める．

等角写像とは，角度を保つ写像である．f を z-平面から w-平面への写像とし，領域 D 内で複素関数として正則とする．D 内の 2 つの滑らかな曲線

$$\begin{aligned} C_1: \ z &= z_1(t) \qquad (-\varepsilon \leqq t \leqq \varepsilon) \\ C_2: \ z &= z_2(t) \qquad (-\varepsilon \leqq t \leqq \varepsilon) \end{aligned}$$

が点 $z_0 = z_1(0) = z_2(0)$ で交わっているとし，$z_1'(0) \neq 0$, $z_2'(0) \neq 0$ とする．このとき C_1 と C_2 の像曲線

$$\begin{aligned} f(C_1): \ w &= w_1(t) = f(z_1(t)) \qquad (-\varepsilon \leqq t \leqq \varepsilon) \\ f(C_2): \ w &= w_2(t) = f(z_2(t)) \qquad (-\varepsilon \leqq t \leqq \varepsilon) \end{aligned}$$

は $w_0 = w_1(z_0) = w_2(z_0)$ で交わっており，ともに滑らかな曲線となる．$w_j'(0) = f'(z_0)z_j'(0)$ であるので，$f'(z_0) \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} \arg w_1'(0) &= \arg f'(z_0) + \arg z_1'(0) \\ \arg w_2'(0) &= \arg f'(z_0) + \arg z_2'(0) \end{aligned}$$

となり，これの下式から上式を引き

$$\arg w_2'(0) - \arg w_1'(0) = \arg z_2'(0) - \arg z_1'(0) \tag{II.1}$$

を得る．$C_1\,,C_2$ の点 z_0 での接線のなす角を θ，$f(C_1)\,,f(C_2)$ の点 w_0 での接線のなす角を φ とすれば (II.1) より $\theta=\varphi$ となる．

1.2　接写像

上に述べた正則写像の等角性を偏導関数を用いて記述しよう．なおこの節は [6] を参考にした．$f=u+iv$ を $z=z_0$ の近傍で C^1 級可微分同相な写像とし，$t=0$ で点 z_0 を通るような滑らかな曲線を $z(t)=x(t)+iy(t)\ \ (-\varepsilon\leqq t\leqq\varepsilon)$ とする．この像曲線 $w(t)=f(z(t))$ は $t=0$ で接ベクトル $w'(0)$ を持つ．簡単のため $z(t)$ の $t=0$ における接ベクトル $z'(0)=x'(0)+iy'(0)$ を記号 $Z=X+iY$ で表すことにして，$w'(0)$ を詳しく書くと

$$\begin{aligned} w'(0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\bigg|_{t=0}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\bigg|_{t=0} \\ &= u_xX+u_yY+i(v_xX+v_yY) \end{aligned}$$

となる．ここで $T_{z_0}f$ を

$$T_{z_0}f:\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \tag{II.2}$$

で定義されるような写像とする．つまり $T_{z_0}f$ は接ベクトル $z'(0)$ を $w'(0)=f(z'(0))$ へ写すような写像であり，$w'(0)=T_{z_0}f(Z)$ で表される．このような $T_{z_0}f$ を f の z における接写像と呼ぶ．定義より $T_{z_0}f$ は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への実線形写像となっている．

$T_{z_0}f$ は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像として

$$T_{z_0}f:\ X+iY\ \longmapsto\ u_xX+u_yY+i(v_xX+v_yY) \tag{II.3}$$

とも表される．偏導関数 $f_x=u_x+iv_x$，$f_y=u_y+iv_y$ を用いると (II.3) より

$$T_{z_0}f(X+iY)=f_xX+f_yY$$

が得られる．これを z-平面での接ベクトル Z を直接代入して得られる式にするため $X=(Z+\overline{Z})/2$，$Y=(Z-\overline{Z})/2i$ を代入して

$$T_{z_0}f(Z)=\left(\frac{f_x}{2}+\frac{f_y}{2i}\right)Z+\left(\frac{f_x}{2}-\frac{f_y}{2i}\right)\overline{Z}$$

とし，さらに記号 f_z，$f_{\overline{z}}$ を $f_z=(f_x-if_y)/2$，$f_{\overline{z}}=(f_x+if_y)/2$ と定義してこれに代入し，結果として

$$T_{z_0}f(Z)=f_zZ+f_{\overline{z}}\overline{Z} \tag{II.4}$$

を得る．

上記の $T_{z_0}f$ を用いて等角性を表そう．$f(z)$ が点 z_0 で等角とは，z_0 を通る 2 曲線の接ベクトルのなす角が向きも含めて $f(z)$ で変わらないときにいう．まず角の向きを変えないためには (II.2) の $T_{z_0}f$ のヤコビアン

$$\begin{aligned} \det(T_{z_0}f) &= u_xv_y-v_xu_y \\ &= |f_z(z_0)|^2-|f_{\overline{z}}(z_0)|^2 \end{aligned}$$

が正でなければならない．つまり $|f_{\overline{z}}(z_0)|/|f_z(z_0)| < 1$ である．

次に角度が f で不変である条件を見る．z_0 を通る 2 曲線の単位接ベクトルをそれぞれ $e^{i\theta_2}$，$e^{i\theta_1}$ とおくと，この 2 つの接ベクトルの偏角の差は $\arg e^{i\theta_2} - \arg e^{i\theta_1} = \theta_2 - \theta_1$ である．$e^{i\theta_1}$ と $e^{i\theta_2}$ の $T_{z_0}f$ による像の偏角の差は (II.4) より

$$
\begin{aligned}
\arg T_{z_0}f(e^{i\theta_2}) - \arg T_{z_0}f(e^{i\theta_1}) &= \arg \frac{f_z e^{i\theta_2} + f_{\overline{z}}\ e^{-i\theta_2}}{f_z e^{i\theta_1} + f_{\overline{z}}\ e^{-i\theta_1}} \\
&= \arg \frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}} \frac{f_z + f_{\overline{z}}\ e^{-2i\theta_2}}{f_z + f_{\overline{z}}\ e^{-2i\theta_1}} \\
&= \theta_2 - \theta_1 + \arg \frac{1 + (f_{\overline{z}}/f_z)\ e^{-2i\theta_2}}{1 + (f_{\overline{z}}/f_z)\ e^{-2i\theta_1}}
\end{aligned}
$$

となる．これがちょうど $\theta_2 - \theta_1$ になるには，$\arg$ の値が θ_2 と θ_1 によらず 0 にならなければいけない，つまり等角ならば $f_{\overline{z}}/f_z = 0$ となる．この条件より $f_{\overline{z}} = 0$ となり , $f_{\overline{z}} = (u_x - v_y)/2 + i(v_x + u_y)/2$ からこれはコーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y$，$v_x = -u_y$ と同値となる．つまり等角性から正則性が導かれることを表している．

1.3 拡張

上記の議論より，C^1 級可微分同相写像の場合には，擬等角写像を以下のように定義する:

定義 II − 1.1. f を平面領域 G から G' への C^1 級可微分同相写像とする．f が擬等角とは，任意の $z \in G$ に対しある定数 $k\,(0 \leqq k < 1)$ が存在して，条件

$$|f_{\overline{z}}(z)|/|f_z(z)| \leqq k$$

を満たすときにいう．

これで C^1 級可微分同相写像の場合に擬等角写像を定義できたが，例えば f を領域 $G - \{a\}$ 上で上記のように定義された擬等角写像とすると，f が a 上で微分可能でないならばこれを G 上の上の意味での擬等角写像とみなすことはできない．また上記のように定義された擬等角写像列が一様に収束する場合，その極限関数は一般には微分可能ではないので上の意味での擬等角写像にはならない．擬等角写像は微分不可能な点においても定義されるので，以下必ずしも微分同相でない同相写像に対して擬等角写像を定義する．

2 改良，解析的定義

この節では定義 Ⅱ − 1.1 の微分同相という仮定と定数 k に関して考察する．2.1 節は [7] を，2.2 節は [6] を参考にした．

2.1　偏絶対連続

まず微分可能性を緩めるものとして，偏絶対連続性という概念を考える．これは ACL(*absolute continuous on line*) 性とも呼ばれている．

偏絶対連続を定義するためにまず絶対連続性を定義する：

定義 II − 2.1. 有界閉区間 I 上の連続な関数 f が I 上で絶対連続とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，I 上の互いに重ならないような有限個の開区間 $I_k = (a_k, b_k)$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |b_k - a_k| < \delta$ を満たすならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ が成り立つときにいう．

絶対連続性を用いて，偏絶対連続性は以下のように定義される：

定義 II − 2.2. 領域 G 上の関数 $f(x, y)$ が G 上で偏絶対連続（ACL）とは，G 内の軸に平行な任意の長方形 $R = \{x + iy \mid a \leqq x \leqq b,\, c \leqq y \leqq d\}$ に対して

1. (c, d) 上の a.e.y に対して，$f(x, y)$ は x の関数として絶対連続
2. (a, b) 上の a.e.x に対して，$f(x, y)$ は y の関数として絶対連続

が成り立つときにいう．

この偏絶対連続性は a.e. での f_x, f_y すなわち f_z, $f_{\overline{z}}$ の存在を保証するもので，通常の偏微分可能性より条件が緩くなっている．

2.2　円と楕円

次に条件 $|f_{\overline{z}}|/|f_z| \leqq k$ の定数 k について考察する．

まず $T_z f$ について考える．$T_z f$ は 1.2 節にもあるように $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への実線形写像である．ここで $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換は，行列式が 0 であるときを除いて円周を楕円に写す．例えば円の式を極形式で $x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と考えて線形変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta + b\sin\theta \\ c\cos\theta + d\sin\theta \end{pmatrix}$$

とすれば，$ad - bc \neq 0$ のときこれは楕円を描く．

上記の考察を $T_z f$ について考えると，$T_z f$ も実線形変換と見ることで同様のことが言える．ここで $T_z f(Z) = f_z Z + f_{\overline{z}}\overline{Z}$ の三角不等式を考えると $|f_z| > |f_{\overline{z}}|$ であるので

$$(|f_z| - |f_{\overline{z}}|)|Z| \leqq |f_z Z + f_{\overline{z}}\overline{Z}| \leqq (|f_z| + |f_{\overline{z}}|)|Z|$$

が得られる．よって $T_z f$ により写される楕円の長径と短径との比は $|f_{\overline{z}}|/|f_z| \leqq k$ として

$$\frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|} = \frac{1 + |f_{\overline{z}}/f_z|}{1 - |f_{\overline{z}}/f_z|} \leqq \frac{1+k}{1-k} \tag{II.5}$$

となる．つまり $T_z f$ は，$\mathbb{C}$ 上の微小円板を長径と短径の比が $(1+k)/(1-k)$ になるような微小楕円へ写す．この円板の歪み具合を表す $(1+k)/(1-k)$ を歪曲率と呼び K とおく．ここで K は $0 \leqq k < 1$ より $1 \leqq K < \infty$ である．k は歪曲率 K を用いて

$$k = \frac{K-1}{K+1}$$

と表される．

2.3 解析的定義

前述の議論より，擬等角写像の解析的定義は以下のように与えられる:

定義 II − 2.3 (解析的定義 1)．f を平面領域 G から G' への向きを保つ同相写像とする．ある定数 $K \geqq 1$ に対して f が K 擬等角写像であるとは，以下の 2 条件を満たすときにいう;

1. f が G 上偏絶対連続である．
2. $k = (K-1)/(K+1)$ に対して条件
$$|f_{\bar{z}}(z)|/|f_z(z)| \leqq k \tag{II.6}$$
が G 上 a.e. に成り立つ．

K の値を問わないとき，f は単に擬等角写像という．また定義 II − 2.3 の条件を満たすような K の上限を最大歪曲率という．$K = 1$ のときは (II.5) より $f_{\bar{z}} = 0$ となり f は等角写像である．

注意．解析的定義 1 (定義 II − 2.3) の仮定として「f は向きを保つ」とあるが，f が定義の中の条件 *2* を満たせば必然的に f は向きを保つのでこの仮定は特に明言しなくてもよい．後述の解析的定義 2 に関しても同様である．

3 発展

解析的定義 1 の「偏絶対連続」という条件をさらに改良するために超関数を導入する．擬等角写像を定義する際に用いた通常の意味での偏導関数 f_z, $f_{\bar{z}}$ は f の超関数の意味での偏導関数と a.e. で一致することが示され，これにより擬等角写像の扱いが容易になる．

3.1 節は基本的に [3] によるが，いくつかの性質は [2] より引用した．3.2 節以降，Gehring-Lehto の補題 (定理 II − 3.8) を除いて [1] より引用した．

3.1 Lebesgue 積分論からの準備

ここでは今後の議論に必要となる Lebesgue 積分論の基本的な性質を挙げる．自明でないもののみ証明を与える．以下一次元 Lebesgue 測度を l，二次元 Lebesgue 測度を m で表す．

まず，可測関数列に関する結果として以下の定理がある:

定理 II − 3.1. 可測関数列 $\{f_n\}$ に対して $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ が存在すれば，f も可測関数である．

定理 II − 3.2 (Egoroff の定理)**.** A を平面上の可測集合，$\{f_n\}$ を A 内のほとんどいたるところで関数 f に収束するような可測関数列とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，可測集合 $F \subset A$ が存在し，以下が成立する; (i) $m(A - F) < \varepsilon$，(ii) F 上で f_n が f に一様収束する．

積分と極限の交換に関して次の Lebesgue の収束定理がある:

定理 II − 3.3 (Lebesgue の収束定理)**.** 領域 G 上で定義された可測関数列 $\{f_n\}$ に対し，G 上の可積分関数 $\varphi(z) \geqq 0$ が存在し G の各点で $|f_n(z)| \leqq \varphi(z)$ とする．このとき $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ が存在すれば

$$\lim_{n\to\infty} \int_G f_n \, dm = \int_G f \, dm$$

が成り立つ．

逐次積分における積分の順序交換に関する定理として Fubini の定理がある:

定理 II − 3.4 (Fubini の定理)**.** f を長方形 $R = \{x + iy \mid x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$ 上定義された可測関数とする．そのとき $f(x, y)$ は a.e.y, $y_1 < y < y_2$ に対して x の関数として l-可測であり，同様に a.e.x, $x_1 < x < x_2$ に対して y の関数として l-可測である．このとき積分

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)| \, dy, \qquad \int_{x_1}^{x_2} |f(x, y)| \, dx$$

はそれぞれ x と y の関数として可測となる．よってこれより

$$\iint_R |f| \, dm = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)| \, dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} |f(x, y)| \, dx$$

を得る．

また f が R 上可積分ならば

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \, dy, \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) \, dx$$

はそれぞれ $x_1 < x < x_2$，$y_1 < y < y_2$ で可積分であり，

$$\iint_R f \, dm = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \, dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) \, dx$$

を得る．

加法的集合関数に関する定理として Lebesgue の定理を挙げる:

定理 II − 3.5 (Lebesgue の定理)**.** 非負であり開集合 G の上で有界であるような加法的集合関数 Φ は G 上 a.e. に可測な密度関数 D_Φ を持ち，任意の可測集合 $E \subset G$ に対して

$$\Phi(E) \geqq \int_E D_\Phi \, dm$$

が成り立つ．ここで等式が成り立つのは Φ が E 上で絶対連続であるときに限る．

上記の定理の中にある Φ の密度関数 D_Φ とは，ここでは以下のように定義する; Φ を加法的集合関数，U_r を点 $z \in G$ を中心とした半径 r の円板としたとき，極限

$$D_\Phi(z) = \lim_{m(U_r)\to 0} \frac{\Phi(G \cap U_r)}{m(U_r)}$$

が存在するならば，この $D_\Phi(z)$ を z での Φ の密度関数という．

最後に密度点について述べる．A を平面上の可測集合とする．点 $z \in A$ が密度点とは，U_r を中心 $z \in G$，半径 r の円板としたとき

$$\liminf_{m(U_r)\to 0} \frac{m(A \cap U_r)}{m(U_r)} = 1$$

を満たすときにいう．密度点に関しては以下の存在定理がある:

定理 II − 3.6. A の a.e. の点は A の密度点である．

平面集合の場合にはさらに xy-密度点を定義できる．A に対して $z_0 = x_0 + iy_0$ が A の x-密度点であるとは，$A_{iy_0} = \{x \mid x + iy_0 \in A\}$ としたとき，A_{iy_0} が $\mathbb{R}$ の集合として可測で，x_0 が A_{iy_0} の直線 $\mathbb{R}$ 上での密度点であるときにいう．ここで，z が直線 L 上の可測集合 A_L の L 上での密度点であるとは，I_z を z を含む L 上の線分としたとき

$$\liminf_{l(I_z)\to 0} \frac{l(A_L \cap I_z)}{l(I_z)} = 1$$

が成り立つときにいう．同様に $A_{x_0} = \{iy \mid x_0 + iy \in A\}$ を考えることで y-密度点も定義できる．z_0 が x-密度点でありかつ y-密度点であるとき，z は xy-密度点であるという．密度点と xy-密度点は類似の概念である．つまり xy-密度点に関しても以下の存在定理が成り立つ:

定理 II − 3.7. A の a.e. の点は A の xy-密度点である．

証明. A は可測集合であるので，Fubini の定理より a.e. y に対して A_{iy} は $\mathbb{R}$ の集合として可測集合となる．よって定理 Ⅱ − 3.6 より，a.e. y に対して A_{iy} 上の a.e. x の点は x-密度点である．$B \subset A_{iy}$ を A_{iy} の x-密度点であるような点全体の集合とすると，これにより a.e. y に対して $A_{iy} - B$ は $\mathbb{R}$ の集合として可測で $l(A_{iy} - B) = 0$ を満たす．平面集合 $E \subset A$ を A 内の x-密度点でないような点全体の集合とし E の特性関数を $C_E(x + iy)$ と書くとすると，Fubini の定理より

$$m(E) = \int_E C_E(x + iy)\, dxdy = \int l(A_{iy} - B)\, dy = 0$$

が得られ，つまり E は零集合となる．y-密度点に関しても同様の議論をすることで A 内の y-密度点でないような集合も零集合になることがわかり，結果として A 内の a.e. の点は xy-密度点である．□

3.2　超関数

ここでは擬等角写像に超関数を導入する．まず準備として Gehring-Lehto の補題を挙げる．一般に f の点 z における偏導関数 $f_z, f_{\overline{z}}$ が存在するだけでは z での全微分可能性はいえないが，f が同相写像であるときには次の結果が従う:

定理 II − 3.8 (Gehring-Lehto の補題)**.** G, G' を平面領域とする．同相写像 $f : G \to G'$ に対して G 上 a.e. に $f_z, f_{\overline{z}}$ が存在するならば，f は G 上 a.e. に全微分可能である．

証明. まず G は無限遠点を考えていない平面上の領域であるので，G の任意の有界閉部分集合 G_0 上 a.e. に f は全微分可能であることを示せばよい．

f が偏導関数 f_z,$f_{\overline{z}}$ を持つような点 z に対して関数 F_h を

$$F_h(z) = \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f_x(z)\right| + \left|\frac{f(z+ih)-f(z)}{h} - f_y(z)\right|$$

と定義する．ここで $h \neq 0$ は $z+h$ と $z+ih$ が G に含まれるような実数である．$|h|$ が十分小さいような h に対して F_h は G_0 上 a.e. に定義された可測関数となっている．このとき g_n を

$$g_n(z) = \sup_{0<|h|<1/n} F_h(z) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

とすると，これはある n_0 から先の n では可測関数となる．$f_z, f_{\overline{z}}$ が G_0 上 a.e. に存在するという仮定であったので $g_n(z)$ は $n \to \infty$ のとき G_0 上 a.e. に 0 に収束する．よって Egoroff の定理より，任意の $\eta > 0$ に対して閉集合 E が存在して $m(G_0 - E) < \eta$ であって，E 上でそれぞれ一様に

$$f_x(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}, \qquad f_y(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih)-f(z)}{h}$$

が成り立つ．つまり f_x と f_y は E 上で連続となる．よって $\varepsilon \in (0,1)$ が与えられたときある $\delta > 0$ が存在して，$|z - z_0| < \delta$ を満たすような $z, z_0 \in E$ に対して

$$|f_x(z) - f_x(z_0)| < \varepsilon, \quad |f_y(z) - f_y(z_0)| < \varepsilon \tag{II.7}$$

となる．さらに $0 < |h| < \delta$ を満たす h に対して

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f_x(z)\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{f(z+ih)-f(z)}{h} - f_y(z)\right| < \varepsilon \tag{II.8}$$

を満たすようにもできる．(II.7) は f_x, f_y の連続性を，(II.8) は $F_h(z)$ の収束性を表している．

さて，E は可測集合であるので密度定理より E 内のほとんどすべての点は xy-密度点である．よってこの理由からまず点 $z_0 = x_0 + iy_0$ を E の xy-密度点であると仮定し，z_0 において f が全微分可能であることを示せば定理は証明される．そのためには f が z_0 の近傍で

$$|f(z) - f(z_0) - f_x(z_0)\,(x - x_0) - f_y(z_0)\,(y - y_0)| < M\,\varepsilon\,|z - z_0| \tag{II.9}$$

を満たすことを示せば十分である．ここで M は z, ε に依存しないような定数である．簡単のため $z_0 = 0$ とし $\Phi(z) = f(0) + f_x(0)\,x + f_y(0)\,y$ とおくと，三角不等式より

$$\begin{aligned} |f(z) - \Phi(z)| &\leqq |f(z) - f(x) - f_y(x)\,y| + |f(x) - f(0) - f_x(0)\,x| + |f_y(x)\,y - f_y(0)\,y| \\ &= \left|\frac{f(x+iy) - f(x)}{y} - f_y(x)\right||y| + \left|\frac{f(x) - f(0)}{x} - f_x(0)\right||x| \\ &\qquad + |f_y(x) - f_y(0)|\,|y| \end{aligned} \tag{II.10}$$

となる．

ここでまず $z = x + iy$ において $|z| < \delta, x \in E$ と仮定すると，いま $z_0 = 0 \in E$ であることから (II.10) の第二項，第三項はそれぞれ (II.8) と (II.7) により $\varepsilon|x|, \varepsilon|y|$ でおさえることができ，$x \in E$ と仮定したことから (II.10) の第一項は (II.8) により $\varepsilon|y|$ でおさえることができる．よってこれより

$$|f(z) - \Phi(z)| < 3\,\varepsilon|z| \tag{II.11}$$

を得ることができ，(II.9) が成り立つ．同様のことを $|z| < \delta, iy \in E$ に対しても証明することができる．

次に $x \in E, iy \in E$ を仮定しないような一般の場合を考えると，まず $z_0 = 0$ が xy-密度点であることを利用する．すると xy-密度点の定義より必要なら δ をさらに小さく取り直して，J を座標軸上にあり原点を通るような線分とすると長さ $l(J) < \delta$ ならば

$$l(J \cap E) > \frac{l(J)}{1+\varepsilon} \tag{II.12}$$

が成り立つとしてよい．

$Q = \{x + iy \mid |x| < \delta/\sqrt{2}(1+\varepsilon), |y| < \delta/\sqrt{2}(1+\varepsilon)\}$ とし，Q に対して任意の点 $z = x + iy \in Q, z \neq 0$ を取る．(II.12) より，Q 内の開線分 $\bigl((1-\varepsilon)x, x\bigr), \bigl(x, (1+\varepsilon)x\bigr), \bigl((1-\varepsilon)iy, iy\bigr), \bigl(iy, (1+\varepsilon)iy\bigr)$ を考えるとこれらは E 内の点を少なくとも 1 点は含む．実際，例えば $J = [0, (1+\varepsilon)x]$ とおくとまずこれは $l(J) < \delta$ を満たし，もし E の点が $(x, (1+\varepsilon)x)$ の中になければ

$$l(J \cap E) = x > \frac{l(J)}{1+\varepsilon} = \frac{(1+\varepsilon)x}{1+\varepsilon} = x$$

となり矛盾する．よってこれより

$$\begin{array}{ll} (1-\varepsilon)x < x_1 < x < x_2 < (1+\varepsilon)x, & \quad x_2 - x_1 < 2\,\varepsilon|x|, \\ (1-\varepsilon)y < y_1 < y < y_2 < (1+\varepsilon)y, & \quad y_2 - y_1 < 2\,\varepsilon|y| \end{array}$$

を満たすような 4 点 $x_1, x_2, iy_1, iy_2 \in E$ を取ることができる．これら 4 点からなる頂点 (x_1, iy_1), (x_2, iy_1), (x_2, iy_2), (x_1, iy_2) を持つような長方形 $R = \{x + iy \mid x_1 \leqq x \leqq x_2, y_1 \leqq y \leqq y_2\}$ を考えると，R の任意の境界点 $z^* = x^* + iy^*$ に対して x^* か iy^* の少なくともどちらか一方は E に含まれる．よって $x \in E$ もしくは $iy \in E$ の場合と同様に考えることができ，$|z^*|^2 \leqq {x_2}^2 + {y_2}^2 = |(1+\varepsilon)x|^2 + |(1+\varepsilon)y|^2 < \delta^2$ より $|z^*| < \delta$ であるので (II.11) は R の境界上では満たされる．

ここで f が同相写像であることを利用する．つまりこの条件より R 内で最大値の原理を適用することができる．ζ の関数として $|f(\zeta)-\Phi(z)|$ を考えるとこれは R の境界点 z^* で最大値をとる．また (II.11) は z^* においては成り立つので

$$\begin{aligned} |f(z)-\Phi(z)| &\leqq |f(z^*)-\Phi(z)| \\ &\leqq |f(z^*)-\Phi(z^*)|-|\Phi(z^*)-\Phi(z)| \\ &\leqq 3\varepsilon|z^*|+|f_x(0)||x^*-x|+|f_y(0)||y^*-y| \end{aligned}$$

が得られ，上記の議論より $|z-z^*|<2\varepsilon|z|$ とできるのでこれで $z_0=0$ での全微分可能性がいえる．□

定理 II − 3.9. f を領域 G 内で定義された解析的定義 1 の意味での擬等角写像とすると，f_z, $f_{\overline{z}}$ は G 上局所二乗可積分である．ここで局所二乗可積分とは，G 上で定義された可測関数 f に対して $|f|^2$ が G 内の任意のコンパクト集合 G_0 上で可積分となることをいう．

証明. G 内の任意のコンパクト集合 G_0 に対して $\int_{G_0}|f_z|^2dz, \int_{G_0}|f_{\overline{z}}|^2dz$ がそれぞれ有限となることを示せばよい．以下，G 上二乗可積分関数全体の集合を $L^2(G)$ で表す．

U_r を点 $z\in G_0$ を中心とした半径 r の円板とし，二次元 Lebesgue 測度 dm に関する $E\to m(f(E))$ の密度関数 $D_f(z)$ を

$$D_f(z)=\lim_{m(U_r)\to 0}\frac{m\big(f(G_0\cap U_r)\big)}{m(U_r)}$$

と定義すると，Lebesgue の定理 (定理 Ⅱ − 3.5) より任意の可測集合 $E\subset G_0$ に対して

$$\int_E D_f(z)dxdy \leqq m(f(E)) \tag{II.13}$$

が成り立つ．

Gehring-Lehto の補題 (定理 Ⅱ − 3.8) より f は G_0 上 a.e. で全微分可能であり，そのような点 z に対して $D_f(z)$ は微小円板と擬等角写像 f によって写される微小楕円の面積の比の極限となっている．楕円の面積は長径と短径をそれぞれ a,b としたとき $ab\pi$ で表されることと長径と短径の比の極限が $(|f_z|+|f_{\overline{z}}|)/(|f_z|-|f_{\overline{z}}|)$ となることから十分小さい r に対して

$$D_f(z)=(|f_z|+|f_{\overline{z}}|)(|f_z|-|f_{\overline{z}}|)=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2$$

が得られる．さらに擬等角写像の解析的定義 1 の条件 $|f_{\overline{z}}|/|f_z|\leqq k$ から

$$|f_{\overline{z}}|^2\leqq k^2|f_z|^2\leqq\frac{1}{1-k^2}D_f(z) \tag{II.14}$$

を得る．よって (II.13) と (II.14) より $|f_z|, |f_{\overline{z}}|\in L^2(G_0)$ がいえ，主張を得る．□

定理 II − 3.10. 領域 G 上定義された解析的定義 1 の意味での擬等角写像 f に対し，$f_z, f_{\overline{z}}$ は f の超関数の意味での偏導関数とみなせる．ここで $f_z, f_{\overline{z}}$ が超関数の意味での偏導関数であるとは，$C_0^\infty(G)$ を G 上でコンパクトな台を持ち無限回偏微分可能な関数の集合とするとき任意の $\varphi\in C_0^\infty(G)$ に対して f が

$$\begin{aligned} \iint_G f_z\,\varphi\,dxdy &= -\iint_G f\,\varphi_z\,dxdy \\ \iint_G f_{\overline{z}}\,\varphi\,dxdy &= -\iint_G f\,\varphi_{\overline{z}}\,dxdy \end{aligned} \tag{II.15}$$

を満たすときにいう．

証明. (II.15) の上式のみ証明する．定理 II – 3.9 より関数 $f_x\varphi$ は可積分であるので Fubini の定理を適用でき，

$$\iint_G f_x\,\varphi\,dxdy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f_x\,\varphi\,dx$$

のように逐次積分の形にできる．f は擬等角写像であるので偏絶対連続性により

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f_x\,\varphi\,dx = \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \Big[\ f\,\varphi\ \Big]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f\,\varphi_x\,dx \right\}$$

と部分積分ができて，$[\ f\,\varphi\ ]_{x_1}^{x_2}$ の項は φ が G 上コンパクトな台を持つことから 0 になり，f_y に関しても同様の議論をすれば主張が得られる．(II.15) の下式も同様である．□

3.3 解析的定義 2

前節までの考察から，擬等角写像の解析的定義 1 は次のように拡張される．

定義 II – 3.11 (解析的定義 2). f を平面領域 G から G' への向きを保つ同相写像とする．定数 $K \geqq 1$ に対して f が K-擬等角とは，以下の 2 条件を満たすときにいう;

1. f の超関数の意味での $z, \overline{z}$ に関する偏導関数 f_z, $f_{\overline{z}}$ は局所可積分関数である．
2. $k = (K-1)/(K+1)$ に対して条件
$$|f_{\overline{z}}(z)|/|f_z(z)| \leqq k \tag{II.16}$$
が G 上 a.e. に成り立つ．

以上で定義した 2 つの解析的定義が互いに同値であることを示し，この拡張が正当なものであることを見ておこう:

定理 II – 3.12. 解析的定義 1 と解析的定義 2 は同値である．

証明. 解析的定義 1 → 解析的定義 2 は定理 II –3.9 と定理 II –3.10 よりわかる．よって解析的定義 2 → 解析的定義 1 を示せばよい．それにはそれぞれ x, y に関する超関数の意味での偏導関数が偏絶対連続性を満たすことを示せば十分である．

f を解析的定義 2 を満たす擬等角写像とする．G 内の長方形 $R = \{x+iy \mid a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\}$ に対して $[a,b]$ 上の点 x_0 を固定して，$R_{x_0} = \{x+iy \mid a \leqq x \leqq x_0, c \leqq y \leqq d\}$ とする．f の x に関する超関数の意味での偏導関数を $\widetilde{f_x}$ とし $C_0^\infty(G)$ から $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ の形の関数を取ってくると，定義より

$$\iint_{R_{x_0}} \widetilde{f_x}(x,y)\varphi_1(x)\varphi_2(y)dxdy = -\iint_{R_{x_0}} f(x,y)\varphi_1'(x)\varphi_2(y)dxdy$$

を得る．ここで $\delta\in[c,d]$ に対して $\varphi_2(y)$ を単調に (c,δ) の特性関数に近づけると，$\widetilde{f}_x$ は局所可積分となることから Lebesgue の収束定理 (定理 II − 3.3) が適用できて

$$\int_c^{\delta}dy\int_a^{x_0}\widetilde{f}_x(x,y)\varphi_1(x)dx=-\int_c^{\delta}dy\int_a^{x_0}f(x,y)\varphi_1'(x)dx$$

となる．これより

$$\int_c^{\delta}dy\int_a^{x_0}\left\{\widetilde{f}_x(x,y)\varphi_1(x)+f(x,y)\varphi_1'(x)\right\}dx=0$$

となることから，δ は任意であったので $[c,d]$ 上の a.e.y に対して

$$\int_a^{x_0}\widetilde{f}_x(x,y)\varphi_1(x)dx=-\int_a^{x_0}f(x,y)\varphi_1'(x)dx$$

が成り立つ．さらに自然数 n に対し $\varphi_1=\varphi_{1,n}$ として，$\varphi_{1,n}$ は $[a,a+1/n],[x_0-1/n,x_0]$ でそれぞれ単調増加，単調減少であり $[a+1/n,x_0-1/n]$ 上恒等的に 1 であるような関数とする．これより上式の右辺は

$$\begin{aligned}-\int_a^{x_0}f(x,y)\varphi_{1,n}'(x)dx&=-\int_a^{a+\frac{1}{n}}-\int_{a+\frac{1}{n}}^{x_0-\frac{1}{n}}-\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0}f(x,y)\varphi_{1,n}'(x)dx\\&=-\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x,y)\varphi_{1,n}'(x)dx-\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0}f(x,y)\varphi_{1,n}'(x)dx\end{aligned}\tag{II.17}$$

とできる．ここで f の連続性より任意の $\varepsilon>0$ に対してある n が存在して，$|x-a|<1/n$ であるような任意の $x\in[a,x_0]$ に対して $|f(x,y)-f(a,y)|<\varepsilon$ が成り立つ．特に $\mathrm{Re}f(x,y)-\mathrm{Re}f(a,y)=o(\varepsilon)$ として，

$$-\int_a^{a+\frac{1}{n}}\mathrm{Re}f(x,y)\varphi_{1,n}'(x)dx=(-\mathrm{Re}f(a,y)+o(\varepsilon))\int_a^{a+\frac{1}{n}}\varphi_{1,n}'(x)dx$$

となり，上式は $-\mathrm{Re}f(a,y)$ となる．$\mathrm{Im}f(x,y)$ に対しても同様の議論をすると (II.17) の右辺第一項は $-f(a,y)$ となることがわかり，右辺第二項にも同様の議論により結果として

$$\int_a^{x_0}\widetilde{f}_x(x,y)dx=f(x_0,y)-f(a,y)\tag{II.18}$$

が a.e.y に対して得られる．

ここで (II.18) はある固定された x_0 に対しては成り立ち，x_0 の値によって y の除外集合は違ってくる．そこで $[a,b]$ 内の有理数全体の集合を E とすると，E は加算集合で測度零の除外集合の加算和は測度零なので，任意の点 $x_0\in E$ に対して $[c,d]$ 上 a.e. y で (II.18) が成り立つ．E は $[a,b]$ 上稠密だから，E の元からなる点列 $\{a_n\}$ で $a_0=a$ であり，x_0 に単調に収束するようなものを取ることができる．y を止めて $\widetilde{f}_x$ は可積分だから

$$\begin{aligned}\int_a^{x_0}\widetilde{f}_x(x,y)dx&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\widetilde{f}_x(x,y)dx\\&=\lim_{n\to\infty}\bigl(f(a_{n+1},y)-f(a_0,y)\bigr)\end{aligned}$$

となり，さらに f の連続性より $\lim_{n\to\infty} f(a_{n+1}, y) = f(x_0, y)$ が得られ，任意の $x_0 \in [a, b]$ に対し $[c, d]$ 上 a.e. y で (II.18) が成り立つ．そのような y では $f(x, y)$ は x の関数として絶対連続で $\widetilde{f_x}$ は a.e. に通常の偏導関数 f_x と一致する．

y に関する超関数の意味での偏導関数 $\widetilde{f_y}$ についても同様のことがいえ，主張を得る． □

4 解析的定義と幾何的定義

4.1 解析的定義から幾何的定義へ

この節では擬等角写像の幾何的定義と解析的定義が同値な概念であることを見る．まず解析的定義から幾何的定義が導き出せることを示す.

定理 II − 4.1. f を G 上定義された解析的定義での擬等角写像としたとき，G 内の任意の四辺形 Q とその像 Q' に対し

$$\frac{1}{K} M(Q) \leqq M(Q') \leqq K M(Q)$$

が成り立つ.

証明. 四辺形の頂点を取り替えると $M(Q(z_2, z_3, z_4, z_1)) = 1/M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4))$ となるので，$M(Q') \leqq K M(Q)$ を示せば十分である.

Q から長方形 $R = R(0, a, a+ib, ib)$ への写像 $\varphi : Q \to R$ と Q' から長方形 $R' = R(0, a', a'+ib', ib')$ への写像 $\varphi' : Q' \to R'$ に対して合成写像

$$F = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$$

を考えると，F は R から R' への擬等角写像であり，頂点 $0, a, a+ib, ib$ をそれぞれ $0, a', a'+ib', ib'$ へ移す．実際，擬等角写像と等角写像の合成写像は偏絶対連続性を満たし，等角写像のもとでは最大歪曲率は 1 となるので解析的定義 1 の意味での擬等角写像となっている.

よって F は偏絶対連続性を満たし，区間 $[0, b]$ 上の a.e. y に対して

$$\begin{aligned} a' &\leqq \big|F(a+iy) - F(iy)\big| \\ &= \left|\int_0^a \frac{\partial F}{\partial x}(x+iy)dx\right| \leqq \int_0^a \big(|F_z| + |F_{\overline{z}}|\big)dx \end{aligned}$$

となる．両辺を $[0, b]$ 間において dy で積分して 2 乗すると Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} (a'b)^2 &\leqq \left(\iint_R \big(|F_z| + |F_{\overline{z}}|\big)dxdy\right)^2 \\ &\leqq \iint_{R_1} \frac{|F_z| + |F_{\overline{z}}|}{|F_z| - |F_{\overline{z}}|}dxdy \iint_{R_1} \big(|F_z|^2 - |F_{\overline{z}}|^2\big)dxdy \\ &\leqq \iint_{R_1} K dxdy \iint_{R_1} D_F dxdy \end{aligned}$$

が得られる．ここで $|F_z|=0$ のときは $|F_{\overline{z}}|$ も 0 になってしまうのでそのような点を除外するために $R_1=\{z \mid z\in R,\, |F_z(z)|\neq 0\}$ とした．$|F_z|=|F_{\overline{z}}|=0$ のときは密度関数も 0 になり，そのような点の集合は零集合であるので上の積分は成立する．また，定理 Ⅱ − 3.9 の (II.13) と類似して $\displaystyle\iint_{R_1} D_F dxdy \leqq m(F(R_1))=m(F(R))=a'b'$ であるので

$$(a'b)^2 \leqq K(ab)(a'b')$$

となり，これより $M(Q')\leqq KM(Q)$ が得られ，主張を得る．□

4.2　幾何的定義から解析的定義へ

次に幾何的定義から解析的定義を導きだせることを示す．定理 Ⅱ −4.2 は偏絶対連続性を，定理 Ⅱ −4.3 は条件 $|f_{\overline{z}}|\leqq k\,|f_z|$ を満足することを示している:

定理 II − 4.2. G 上定義された幾何的定義の意味での擬等角写像 f は G 上で偏絶対連続性を満たす．

証明. $R=\{x+iy \mid a<x<b, c<y<d\}$ を $\overline{R}\subset G$ となるような長方形とし，線分 $I_y=\{x+iy \mid a<x<b\}$ を R 内の水平な線分とする．よって a.e.$y, c<y<d$ に対して f は I_y 上絶対連続になることを示せばよい．

I_y を上辺として持つような長方形を R_y する．つまり R_y は R を I_y で切ったときにできる 2 つの領域の下側の部分である．R_y の像を $f(R_y)$ とおく．$f(R_y)$ の面積 $A(y)$ は単調増加関数なので a.e. y に対して有界な導関数 $A'(y)$ を持ち，そのような y を y_0 とする．以下より y_0, $c<y_0<d$ に関して w が I_{y_0} 上絶対連続であることを示す．

$(x_k,x_k^*)\,(k=1,2,\cdots,n)$ を $a<x<b$ 上にある互いに交わらない有限個の区間とする．f が I_{y_0} 上絶対連続であることをいうためには，$w_k^*=f(x_k^*+iy_0)$，$w_k=f(x_k+iy_0)$ としたときに $\sum|w_k^*-w_k|$ が上限を持ち，$\sum(x_k^*-x_k)$ が 0 に向かうときその上限も 0 に向かうことを示せばよい．

まず $y_0+\delta<d$ となるような $\delta>0$ をひとつ選び，$R_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ を長方形 $\{x+iy \mid x_k<x<x_k^*,\, y_0<y<y_0+\delta\}$ とその頂点からなる四辺形とする．R_k の水平方向の辺を上下辺とすると上下辺の長さが $x_k^*-x_k$，左右辺の長さは δ であるのでこれより

$$M(R_k)=\frac{1}{\delta}(x_k^*-x_k) \tag{II.19}$$

を得る．R_k の像 $f(R_k)$ の左右辺の長さを $d_k(\delta)$ で記すことにすると Rengel の不等式より

$$M\big(f(R_k)\big)\geqq \frac{\big(d_k(\delta)\big)^2}{m\big(f(R_k)\big)} \tag{II.20}$$

が得られる．$f(R_k)$ の左右辺は $\delta\to 0$ としたときにそれぞれ点 w_k と w_k^* へ収束するので

$$\lim_{\delta\to 0} d_k(\delta)=|w_k^*-w_k| \tag{II.21}$$

となる．$K = M(f(R_k))/M(R_k)$ であるので，(II.19) と (II.20) から $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$K\left(x_k^* - x_k\right) \geqq \frac{\delta\bigl(d_k(\delta)\bigr)^2}{m\bigl(f(R_k)\bigr)}$$

が得られ，これの k についての和をとると Schwarz の不等式より

$$K\sum_{k=1}^{n}(x_k^* - x_k) \geqq \delta\,\frac{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k(\delta)\right)^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m\left(f(R_k)\right)} \tag{II.22}$$

が成り立つ．

ここで最初に考えた仮定，つまり $A(y)$ は $y = y_0$ で有界な導関数を持つということを用いる．いま $f(R_y)$ の面積 $A(y)$ に対して

$$A(y_0 + \delta) - A(y_0) \geqq \sum_{k=1}^{n} m(f(R_k))$$

であったので，(II.22) とあわせて

$$\left(\sum_{k=1}^{n} d_k(\delta)\right)^2 \leqq K\,\frac{A(y_0+\delta) - A(y_0)}{\delta}\sum_{k=1}^{n}(x_k^* - x_k)$$

が得られ，$\delta \to 0$ とすると (II.21) より

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k^* - w_k|\right)^2 \leqq K\,A'(y_0)\sum_{k=1}^{n}(x_k^* - x_k)$$

が得られる．よってこれで f が I_{y_0} 上絶対連続であることが示された．同様の証明を垂直方向に関してすれば主張が得られる．□

定理 II − 4.3. G 上定義された幾何的定義の意味での擬等角写像 f の最大歪曲度を K とし，$k = (K-1)/(K+1)$ とすると，f は G 上 a.e. に

$$|f_{\overline{z}}| \leqq k\,|f_z|$$

が成り立つ．

証明．定理 Ⅱ − 4.2 より幾何的定義の意味での擬等角写像は Gehring-Lehto の補題 (定理 Ⅱ − 3.8) の仮定を満たすので，f は G 上 a.e. に全微分可能である．そのような点を z_0 とし，平行移動により $z_0 = 0$ としてよい．また適当な実数 θ_1, θ_2 に対して $e^{i\theta_1} f(e^{i\theta_2}\cdot z)$ を考えることにより，$f_z(0)$

と $f_{\overline{z}}(0)$ はともに実数で $f_z(0),\ f_{\overline{z}}(0) \geqq 0$ であると仮定してよい．実際 $g(z) = e^{i\theta_1} f(e^{i\theta_2} \cdot z)$ とおくと計算により

$$
\begin{aligned}
g_z &= e^{i\theta_1}\left\{ f_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}(e^{i\theta_2}\cdot z) + f_{\overline{z}} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\overline{e^{i\theta_2}\cdot z}) \right\} \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)} f_z \\
g_{\overline{z}} &= e^{i\theta_1}\left\{ f_z \cdot \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(e^{i\theta_2}\cdot z) + f_{\overline{z}} \cdot \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\overline{e^{i\theta_2}\cdot z}) \right\} \\
&= e^{i(\theta_1-\theta_2)} f_{\overline{z}}
\end{aligned}
$$

であるので，θ_1 と θ_2 を $g_z(0),\ g_{\overline{z}}(0) \geqq 0$ となるように調整すればよい．いま f は向きを保つ写像であるのでヤコビアン，つまり $|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$ は正であり，これから $|f_z|(0) > |f_{\overline{z}}(0)|$ がわかる．よって $|f_z(0)| > 0$ と仮定する．

f は $z_0 = 0$ で全微分可能であったので，0 の近傍で

$$
f(z) = |f_z(0)|z + |f_{\overline{z}}(0)|\overline{z} + o(z) \tag{II.23}
$$

が成り立つ．いま十分小さい ε に対して長方形 $R_\varepsilon\bigl((-1-i)\varepsilon, (1-i)\varepsilon, (1+i)\varepsilon, (-1+i)\varepsilon\bigr)$ を考えて R_ε の像を R'_ε とすると，R'_ε の左右辺の距離は (II.23) より

$$
s_b = 2\,\varepsilon\bigl(|f_z(0)| + |f_{\overline{z}}(0)|\bigr) + o(\varepsilon)
$$

となり，また R'_ε は正方形なのでこの面積は

$$
m(R'_\varepsilon) = 4\,\varepsilon^2\bigl(|f_z(0)|^2 - |f_{\overline{z}}(0)|^2\bigr) + o(\varepsilon^2)
$$

となる．よって Rengel の不等式より

$$
\begin{aligned}
M(R'_\varepsilon) &\geqq \frac{4\,\varepsilon^2\bigl(|f_z(0)| + |f_{\overline{z}}(0)|\bigr)^2 + o(\varepsilon^2)}{4\,\varepsilon^2\bigl(|f_z(0)|^2 - |f_{\overline{z}}(0)|^2\bigr) + o(\varepsilon^2)} \\
&= \frac{|f_z(0)| + |f_{\overline{z}}(0)|}{|f_z(0)| - |f_{\overline{z}}(0)|} + o(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{II.24}
$$

が成り立つ．一方 $K = KM(R_\varepsilon) \geqq M(R'_\varepsilon)$ であるので (II.24) より

$$
K \geqq \frac{|f_z(0)| + |f_{\overline{z}}(0)|}{|f_z(0)| - |f_{\overline{z}}(0)|} + o(\varepsilon^2)
$$

が得られる．よって $\varepsilon \to 0$ とすれば $K = (k+1)/(k-1)$ であるので

$$
|f_{\overline{z}}(0)| \leqq k\,|f_z(0)|
$$

が得られ，主張を得る．$\square$

第 III 章　擬等角写像の基本的性質

この章では擬等角写像の持つ具体的な性質について触れる．1 節では基本的な性質と接続について述べる．2 節では擬等角写像列の挙動について調べる．今後の議論に必要な正規族，同程度連続性についてもここで述べる．3 節では擬等角曲線について述べる．特にコッホ曲線も擬等角的であることは興味深い．4 節では擬等角写像の Beltrami 係数とその周辺の事柄について述べる．本章において，1.2 節以降は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上で考えるものとする．

1　基本的性質と接続

1.1　基本的性質

定理 III − 1.1. K 擬等角写像 f の逆写像 f^{-1} は K 擬等角である．

証明. 四辺形 Q の f による像を Q' とすると補題 I − 3.1 より $1/K \leqq M(Q')/M(Q) \leqq K$ が成り立つ．よってこれより

$$\frac{1}{K} \leqq \frac{M(Q)}{M(Q')} \leqq K$$

がいえ，Q は Q' の f^{-1} による像であるので再び補題 I − 3.1 より主張が得られる．□

定理 III − 1.2. K_1 擬等角写像 f_1 と K_2 擬等角写像 f_2 の合成写像 $f_1 \circ f_2$ は K_1K_2 擬等角写像である．

証明. $f_1 : Q' \to Q''$, $f_2 : Q \to Q'$ とすると幾何的定義より

$$\sup \frac{M(Q'')}{M(Q)} \leqq \sup \frac{M(Q'')}{M(Q')} \cdot \sup \frac{M(Q')}{M(Q)} = K_1K_2$$

が得られる．下からの評価も同様．□

次の定理は擬等角写像が等角写像を拡張した概念であることを表している:

定理 III − 1.3. 等角写像は 1 擬等角写像であり，また逆も成り立つ．

証明. 等角写像に対しては四辺形のモジュラスが不変なので，等角写像は 1 擬等角写像である．逆を示そう．

G を領域，$f : G \to G'$ を 1 擬等角写像とする．任意の四辺形 $Q, \overline{Q} \subset G$ に対して Q 上での f の等角性がいえれば十分である．Q の像を Q' とし，Q, Q' の標準長方形をそれぞれ R, R' とする．

仮定より $M(Q)=M(Q')$ なので $R=R'$ としてよい．R の頂点を $0,M,M+i,i$ とする．ここで $M=M(Q)$ である．f と標準写像 $\varphi:Q\to R$, $\psi:Q'\to R'$ より合成写像 $w=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:R\to R'$ を考える．w は 1 擬等角である．これが恒等写像であることを示そう．

R 内の任意の点 $z_0=x_0+iy_0$ を取り，R を 2 つの長方形 $R_1=R(0,x_0,x_0+i,i)$，$R_2=R(x_0,M,M+i,x_0+i)$ に分ける．R_1', R_2' をそれぞれ R_1, R_2 の w による像とする．ここで w は 1 擬等角だから

$$M(R_1')+M(R_2')=M(R_1)+M(R_2)=x_0+(M-x_0)=M(R')$$

が得られ，補題 I −6.3 より $M(R_1')+M(R_2')=M(R')$ が成り立つのは R_1' および R_2' が長方形のときで，$m(R_1')+m(R_2')=m(R)$ より $R_j'=R_j$，よって $\mathrm{Re}\,w(z_0)=x_0$ である．同様の議論で $\mathrm{Im}\,w(z_0)=y_0$ がいえ，任意の z_0 に対して $w(z)=z_0$，すなわち w は恒等変換である．□

擬等角写像列の極限写像に関して以下の性質がある:

定理 III − 1.4. G 上定義された K 擬等角写像列 $\{f_n\}$ が G 上の同相写像 f へ一様収束するとき，f もまた K 擬等角写像となる．

証明. 任意の四辺形 Q, $\overline{Q}\subset G$ に対して $M(f(Q))\leqq KM(Q)$ が成り立つことを示せば良い．

$\{Q_n\}$ を Q に内側から収束するような四辺形の列とする．いま n を固定すると，ある番号から先の k に対して $f_k(Q_n)\subset f(Q)$ とできる．よって適当な部分列を取ることで $f_n(Q_n)\subset f(Q)$ となるような四辺形の列 $\{f_n(Q_n)\}_n$ が取れる．f_n は $\overline{Q}$ 内で f に一様収束し，これは $\overline{Q}$ 上一様連続であるので四辺形列 $\{f_n(Q_n)\}$ は $f(Q)$ へ内側から収束する．補題 I −6.4 より $\lim M(f_n(Q_n))=M(f(Q))$, $\lim M(Q_n)=M(Q)$ が得られる．任意の n に対して $M(f_n(Q_n))\leqq KM(Q_n)$ が成り立つのでこれから $M(f(Q))\leqq KM(Q)$ が得られ，主張を得る．□

1.2　接続

等角写像論ではリーマンの定理や鏡像の定理，カラテオドリの定理など接続に関する定理があるが，擬等角写像にもそれらに対応する定理がある．まず除去可能特異点について次の定理がある:

定理 III − 1.5. z_0 を領域 $G\subset\widehat{\mathbb{C}}$ の点とする．このとき $G-\{z_0\}$ 上定義された K 擬等角写像は G 上の K 擬等角写像へ接続される．

この定理から次の系が得られる:

系 III − 1.6. $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の任意の単連結領域は $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ の中のひとつと擬等角同値であり，これら 3 つの領域は互いに擬等角同値ではない．

証明. G を単連結領域とする．G が境界点をもたない領域とすると $G=\widehat{\mathbb{C}}$ である．擬等角写像 f は同相写像であり $\widehat{\mathbb{C}}$ はコンパクト集合であるので他の領域とは写りあわない．

G を境界が 1 点 a のみからなる領域とする．$G'=f(G)$ が境界点を 2 点以上持つならば定理 Ⅲ−1.5 より f は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $G'\cup\{f(a)\}\neq\widehat{\mathbb{C}}$ への写像へ接続され，矛盾．よって G' は境界が 1 点のみからなる領域である．このとき G' を $\mathbb{C}$ へ写すような等角写像 g_1 が存在し，定理 Ⅲ−1.2 より

$g_1 \circ f$ は擬等角写像，すなわち境界が 1 点からなる領域は $\mathbb{C}$ と擬等角同値であり，$\mathbb{D}$ と擬等角同値にはならない．

G を境界点を 2 点以上持つような領域とすると，定理 Ⅲ−1.5 より G' も境界点を 2 点以上持つような領域となる．このとき G' を $\mathbb{D}$ へ写すような等角写像 g_2 が存在し，すなわち境界点を 2 点以上持つような領域は $\mathbb{D}$ と擬等角同値となる．□

ある領域で等角ならば境界までの同相写像へ接続できるというカラテオドリの定理 (定理 I −2.8) が擬等角写像に対しても成り立つ．ここで領域 G の境界であるような曲線または閉曲線 C が自由境界弧であるとは，以下の 2 条件を満たすときである: (i) $C \cap (\overline{\partial G - C}) = \phi$．(ii) E を C を含むような ∂G の中のひとつとすると，$E - C$ は連結である．

定理 III − 1.7. G, G' を領域とし，それぞれの自由境界弧を C,C' とする．K 擬等角写像 $f : G \to G'$ に対して C と C' が f のもとでそれぞれ対応しているとき，f は $G \cup C$ から $G' \cup C'$ への同相写像へ接続される．

また，鏡像の原理も擬等角写像の場合へ拡張される．

鏡像の原理は円弧をまたいで定義域を接続できるというものである．ここで円弧とは円周の部分曲線または一次変換によるその像を指す．領域 G が円弧 C に対して鏡像を取り得るとは，G が以下の条件を満たすときにいう: (i) C は G の自由境界弧である．(ii) また G の C に関する鏡像で得られる領域を G^* とすると $G \cap G^* = \phi$ である．

G, G' をそれぞれ円弧 C, C' に関する鏡像を取り得るような領域とし，$f : G \to G'$ を C と C' がそれぞれ対応するような K 擬等角写像とする．定理 Ⅲ − 1.7 より f は $G \cup C$ 上の同相写像へ接続される．点 $z \in G$, $f(z) \in G'$ の C, C' による鏡像をそれぞれ z^*, $f(z)^*$ で表す．いま G^* 上の点 z^* に対し f を

$$f(z^*) = f(z)^*$$

で定義すると，写像 $f : G \cup C \cup G^* \to G' \cup C \cup G'^*$ は向きを保つ同相写像となっており，任意の四辺形 $Q^*(z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*)$, $Q^* \subset G^*$ とその鏡像 $Q \subset G$ に対して

$$M\big(Q(z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*)\big) = M\big(Q(z_4, z_3, z_2, z_1)\big)$$

が成り立ち，同様のことが G'^* と G' に対しても成立する．よって鏡像により接続された f の最大歪曲率は $G \cup G^*$ 上で変わらず K である．さらに f は C 上にも接続され，これより以下の鏡像の原理を得る:

定理 III − 1.8 (鏡像の原理)**.** G, G' をそれぞれ円弧 C, C' に関する鏡像を取り得るような領域とし，$f : G \to G'$ を境界 C と C' がそれぞれ対応するような K 擬等角写像とする．このとき $f(z^*) = f(z)^*$ を満たすような連続関数 $f : G \cup C \cup G^* \to G' \cup C \cup G'^*$ は K 擬等角写像である．

最後に，領域 G 内の解析的な曲線の除去可能性として次の定理を述べておく，

定理 III − 1.9. f を G 上定義された同相写像，C を G 内にある解析的な曲線とする．そのとき f の最大歪曲率 K に対して

$$K(G) = K(G - C)$$

が成り立つ．つまり G 上の最大歪曲率と G から C を除いた領域の最大歪曲率は変わらない．

2　擬等角写像列

2.1　同程度連続

定理 Ⅲ – 1.4 をよく見ると「極限関数が同相写像ならば」という条件がある．では擬等角写像列の極限が同相写像でないような場合はどういった写像になるのか．ここではその擬等角写像列の極限関数に関するより一般的な考察をする．まず関数族の同程度連続性を定義し，その性質を見ることから始める．この節では一様収束性は $\widehat{\mathbb{C}}$ の位相で考える．

定義 III – 2.1. 領域 $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 上で定義された関数の族 $\mathcal{F}$ が点 $z_0 \in G$ で同程度連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある z_0 の近傍 U が存在して，

$$\sup_{f \in \mathcal{F},\, z \in U} k(f(z),\, f(z_0)) < \varepsilon$$

が成り立つときにいう．ここで $k(z_1,\, z_2)$ は平面上の点 z_1, z_2 をリーマン球面上に射影したときの 2 点間の球面にそった距離，つまり球面距離である．

$\mathcal{F}$ が領域 $E \subset G$ 上で同程度連続であるとは，$\mathcal{F}$ が E 内の任意の点に関して同程度連続であるときにいう．

擬等角写像の族に関する同程度連続性の特徴付けとして次の定理を挙げる:

定理 III – 2.2. $\mathcal{F}$ を G 上定義された K 擬等角写像の族とする．すべての $f \in \mathcal{F}$ は球面距離がある定数より大きくなるような 2 つの値を取らないならば，$\mathcal{F}$ は同程度連続である．

この定理の結果として直ちに以下の定理が従う:

定理 III – 2.3. $\mathcal{F}$ を領域 G 上定義された K 擬等角写像の族とする．$\mathcal{F}$ が G 上で同程度連続とは，ある定数 d が存在して以下の条件が満たされるときをいう：

1. すべての $f \in \mathcal{F}$ はある値 a を取らず，固定された 2 点 $z_1,\, z_2 \in G$ に対して f によらない定数 d が存在し $k(f(z_i), a) > d,\ i = 1, 2$ が成り立つ．
2. すべての $f \in \mathcal{F}$ と固定された 3 点 $z_1,\, z_2,\, z_3 \in G$ に対して f によらない定数 d が存在し $k(f(z_i), f(z_j)) > d,\ i, j = 1, 2, 3,\, i \neq j$ が成り立つ．

証明. 定理 Ⅲ – 2.2 より $\mathcal{F}$ は，*1.* の場合では $G - \{z_i\},\ i = 1, 2$ で，*2.* の場合では $G - \{z_i, z_j\},\ i = 1, 2, 3$ でそれぞれ同程度連続となる．つまり例えば前者の場合，$G - \{z_1\}$ と $G - \{z_2\}$ でそれぞれ同程度連続となるので $(G - \{z_1\}) \cup (G - \{z_2\}) = G$ 上で同程度連続である．後者も同様. □

同程度連続性から引き出される収束写像列の性質として今後の議論に必要な次の定理を挙げておく:

補題 III – 2.4. $\{f_n\}$ を G 上定義された同程度連続であるような写像列とし，$E \subset G$ を G 上稠密な集合とする．任意の $z \in E$ に対して $\{f_n(z)\}$ が収束するならば，$\{f_n(z)\}$ は G 上の任意のコンパクト集合上で一様収束する．

2.2 正規族

次に同程度連続性との関連として正規族を定義する:

定義 III − 2.5. $\mathcal{F}$ を領域 G 上定義された連続写像の族とする．$\mathcal{F}$ が正規族であるとは，$\mathcal{F}$ 内の任意の写像列が G 内の任意のコンパクト集合上一様収束するような部分列を持つときにいう．

連続関数族 $\mathcal{F}$ が G 上正規であるとすると，$\mathcal{F}$ は G 内の任意のコンパクト集合 D 上同程度連続である．さらにその逆も示される:

定理 III − 2.6. 領域 $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 上で同程度連続な族は正規族である．

証明. 補題 Ⅲ − 2.4 の結果から，G 上定義された任意の写像列 $\{f_n\}$ は G 上稠密な集合 E で収束するような部分列を持つことを示せば十分である．稠密な集合 $E = \{a_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ とする．

コンパクト集合上で考えているので，写像列 $\{f_n(a_1)\}$ は集積点を持つ．よって $\{f_n\}$ は点 a_1 上で収束するような部分列 $\{f_{1,n}\}$ を持つ．この部分列からさらに a_2 上でも収束するような部分列 $\{f_{2,n}\}$ を選ぶことができる．同様の操作を k 回繰り返すことによって得られる $\{f_n\}$ の部分列 $\{f_{k,n}\}$ は点 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 上で収束する．対角列 $\{f_{n,n}\}$ を考えれば，これは E 上の任意の点で収束するような写像列となり，主張が得られる． □

この定理により，定理 Ⅲ − 2.2，定理 Ⅲ − 2.3 は正規族になるための条件としてもよい．以下に定理としてまとめておく:

定理 III − 2.7. $\mathcal{F}$ を領域 G 上定義された K 擬等角写像の族とする．$\mathcal{F}$ が G 上で正規族であるとは，ある定数 d が存在して以下の条件が満たされるときをいう：

1. すべての $f \in \mathcal{F}$ はある値 a, b を取らず，$k(a, b) > d$ となる．
2. すべての $f \in \mathcal{F}$ はある値 a を取らず，固定された 2 点 $z_1,\, z_2 \in G$ に対して f によらない定数 d が存在し $k(f(z_i), a) > d,\ i = 1, 2$ が成り立つ．
3. すべての $f \in \mathcal{F}$ と固定された 3 点 $z_1,\, z_2,\, z_3 \in G$ に対して f によらない定数 d が存在し $k(f(z_i), f(z_j)) > d,\ i, j = 1, 2, 3,\, i \neq j$ が成り立つ．

2.3 極限写像の分類

上記の予備的考察をふまえて擬等角写像列の極限写像を 3 つの場合に分類する．まず K 擬等角写像列 $\{f_n\}$ は G 上稠密な集合 E で収束すると仮定し，その極限写像を f とする．

Case A, $f(E)$ は少なくとも 3 つの値をとる場合. そのとき f での像が異なるような 3 点 $a_1, a_2, a_3 \in E$ が存在する．つまり任意の n に対し $k(f_n(a_i), f_n(a_j)),\ i, j = 1, 2, 3$ はすべてある定数より大きくなっている．よって定理 Ⅲ − 2.3 から $\{f_n\}$ は同程度連続となる．さらに補題 Ⅲ − 2.4 より $\{f_n\}$ は G 内のコンパクト集合上一様収束することがわかり，極限写像 f は G 上連続である．ここで以下の補題がある:

補題 III − 2.8. $\{f_n\}$ を G 上定義された擬等角写像列，f をその極限写像としたとき，$\{f_n\}$ が G 上で同程度連続であるならば f は 1 対 1 写像である．

これにより f は G 上 1 対 1 連続写像，つまり同相写像となり，定理 Ⅲ − 1.4 より極限写像 f は K 擬等角写像である．

Case B, $f(E)$ はちょうど 2 点からなる場合．その 2 点を $f(a_1) = c_1$, $f(a_2) = c_2$ とする．このとき定理 Ⅲ − 2.2 より $\{f_n\}$ は $G - \{a_1, a_2\}$ で同程度連続となる．ある $z \in E$, $z \neq a_1$ に対して $f(z) = c_1$ ならば $\{f_n\}$ は $G - \{z, a_2\}$ でも同程度連続であのでこれは $G - \{z_2\}$ で同程度連続である．$\{f_n\}$ は G 上で収束するので定理 Ⅲ − 2.4 より $G - \{z_2\}$ 上の任意のコンパクト集合上で一様収束し，これより極限写像 f は $G - \{z_2\}$ 上連続である．f は 2 点しか値を取らないという仮定であったので，$z \neq a_2$ であるような任意の $z \in G$ に対して $f(z) = c_1$ である．つまりこの場合，極限写像 f は G 上の一点でのみ片方の値 c_2 を取り，G 上の他のすべての場所でもう片方の値 c_1 をとる．

Case C, $f(E)$ は 1 点のみからなる，つまり f は定数となる場合．この場合は定数関数となるので考察することはあまりないが，極限関数が定数の場合はその関数列は必ずしも収束する必要はない．例えば z, $z-1$, $2z$, $2(z-1)$, $2(z-1/2), \cdots$, nz, $n(z-1), \cdots$, $n(z-1/n), \cdots$ というような関数列を考える．これは $z = 0$, 1, $1/2$, $1/3, \cdots$ では収束せず，他の点では ∞ へ発散している．

以上の考察を定理としてまとめておく:

定理 III − 2.9. $\{f_n\}$ を G 上定義された K 擬等角写像列であり，G 上で極限写像 f へ収束するとする．そのとき f は以下の 3 つのケースのいずれかとなる :

1. G 上の K 擬等角写像,

2. G を 2 点に写すような写像,

3. 定数.

1. の場合，$\{f_n\}$ は G 内の任意のコンパクト集合上で一様収束する．また *2.* の場合，極限写像 f は 2 点のうちの片方の値を G 上の一点 a のみでとり，$\{f_n\}$ は $G - \{a\}$ 内の任意のコンパクト集合上で一様収束する．

2.4　領域核

G 上定義された擬等角写像列 $f_n : G \to G'_n$ の極限写像を $f : G \to G'$ とする．ここでは前節の擬等角写像列の考察とあわせて，写像の極限が写す像と写像の写す像の極限との関係を見る．

まず領域列の極限として領域核の概念を導入する．領域列 $\{E_n\}$ に対して

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} E_n \right)^{\circ}$$

を E_n の領域核といい，$N\{E_n\}$ と書く．ここで $(\cap E_n)^\circ$ は $\cap E_n$ の内点の集合を表している．よってある点 z が $N\{E_n\}$ に含まれる必要十分条件は，ある z の近傍 U とある番号 n_0 が存在して，$n \geqq n_0$ となるようなすべての n に対して $U \subset E_n$ となることである．

領域核は開集合の和集合であるのでやはり開集合となるが，E_n が連結でも $N\{E_n\}$ が連結であるとは限らない．例えば下図のようなバーベル状の領域を考える．取っ手の部分の幅が $1/n$ であるような領域を E_n とすると，$N\{E_n\}$ は取っ手の部分がつぶれて連結でない領域になる．

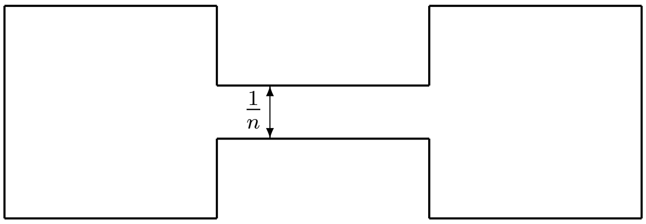


図:バーベル状の領域 E_n

2.5　境界が２点以上からなる場合

まず G の境界が少なくとも 2 点以上からなる場合について考察する．ここで 2.3 節での場合分けを再び用いる．E を前節と同様，G 上稠密な集合とする．

Case A, G' は少なくとも 3 つの値をとる場合．ここでは以下の定理が存在する:

定理 III − 2.10. G を境界が 2 点以上からなる領域，$f_n : G \to G'_n$ を K 擬等角写像列とする．$\{f_n\}$ が G 上で K 擬等角写像 f へ収束するならば，G の像 G' は $N\{G'_n\}$ と一致する．

証明．まず始めに $G' \subset N\{G'_n\}$ を示す．任意の点 $z_0 \in G$ を取り，z_0 の近傍を $U, \overline{U} \subset G$ とする．定理 Ⅲ − 2.9 より，$\{f_n\}$ は U 上で f へ一様収束する．$f(U)$ の境界は点 $f(z_0)$ から適当な距離 r だけ離れているので，$V' = \{f(z) \mid k(f(z), f(z_0)) < r/2\}$ とするとある番号 n_0 が存在して，$n \geqq n_0$ に対して V' が $f(U)$ に完全に含まれ，さらに $f_n(U)$ の内点である $f_n(z_0)$ が V' に含まれるようにできる．ゆえに $f(w_0) \in V'$ がいえ，$V' \subset N\{G'_n\}$ であるので $G' \subset N\{G'_n\}$ がいえた．

G' は $N\{G'_n\}$ の連結な部分集合となることがわかった．もし G' が $N\{G'_n\}$ の真部分集合であるならば，$N\{G'_n\}$ は G' の境界点 a' を含むはずである．ここから矛盾を導く．

領域核の定義よりある番号 n_0 が存在して，$n \geqq n_0$ に対して a' の近傍 U' が G'_n 内に含まれるようにできる．$\{a'_k\}$ を $U' \cap G'$ にあり a' に収束するような点列とし，各々の a'_k の原像を a_k とする．仮定より G の境界は少なくとも 2 点以上からなっているので，$n \geqq n_0$ に対して $\{f_n\}$ の逆写像 $\{f_n^{-1}\}$ は 2 つの値を除外している．定理 Ⅲ − 2.6 より $\{f_n^{-1} \mid n \geqq n_0\}$ は正規族となり，正規族の定義か

ら φ を U' 内のコンパクト集合上で連続であるような写像とすると φ へ一様収束するような部分写像列 $\{f_{n_i}^{-1}\}$ を選ぶことができる．定理 Ⅲ − 2.9 より φ は K 擬等角写像か定数かどちらかである．φ はいま一様連続なため，2 点に写すような写像の場合はここでは除外される．$\lim f_n(a_k) = a'_k$ であったので，$\{f_n^{-1}\}$ の同程度連続性から $k = 1, 2, \cdots$ に対して $\varphi(a'_k) = \lim f_{n_i}^{-1}\bigl(f_{n_i}(a_k)\bigr) = a_k$ が得られる．よって φ は定数でないので，U' 上の K 擬等角写像である．

$\varphi(a'_k) = a_k$ を示せたことにより $a_k \in \varphi(U')$ に対して 2.4 節で述べた，点 z が $N\{E_n\}$ に含まれるための条件が満たされるので $a_k \in N\{f_n^{-1}(U')\}$ がいえる，つまり $\varphi(U') \subset N\{f_n^{-1}(U')\}$ であることがわかった．よって $N\{f_n^{-1}(U')\} \subset G$ であるので $\varphi(a') = a$ もやはり G の元となり，$k = 1, 2, \cdots$ に対して $f(a_k) = a'_k$ であったので $f(a) = a'$ となる．これは a' が G' の境界点である仮定に矛盾し，G' と $N\{G'\}$ が一致することがいえる．□

Case B, G' はちょうど 2 点からなる場合．本題に入る前に，以下の補題を挙げておく．

補題 III − 2.11. G を境界が 2 点以上からなる領域，$f_n : G \to G'_n$ を K 擬等角写像列とし，極限写像を f とする．このとき G 内の異なる 2 点 z_1, z_2 に対して $f(z_1) = f(z_2)$ であるならば，$f(z_1), f(z_2) \notin N\{G'_n\}$ である．

さて，極限写像 f は G を 2 点 c_1, c_2 へ写すと仮定する．先の考察より f はある 1 点 $z_1 \in G$ でのみ c_1 を取り，その他の点 $z \in G$ では c_2 を取る．このとき補題 Ⅲ − 2.11 より $c_2 \notin N\{G'_n\}$ である．c_1 が $N\{G'_n\}$ に含まれるかどうかは次に示す「$N\{G'_n\}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ から 1 点 $\{c_2\}$ を除いた領域となる」という事実により解決される．

$\{f_n\}$ の部分列は $G - \{z_1\}$ 上では同程度連続となりうるが，G 上では $\{f_n\}$ のどんな無限個の部分列を取ってきても同程度連続にはならない．ここで定理 Ⅲ − 2.2 の対偶をとると「$\mathcal{F}$ が G 上同程度連続でないならば，G 上定義され球面距離がある定数より大きい 2 つの値を除外しないような $f \in \mathcal{F}$ が存在する」となる．つまりある 1 点のみ除外するか，球面距離が任意の定数で押さえられるような 2 点を除外するかである．いま $\{f_n\}$ の任意の無限部分列について考えているので上記の対偶を満たすような f_n は無限個あり，つまり G'_n の補集合 $-G'_n$ の直径は $n \to \infty$ で 0 へ収束する．ここで $\{-G'_n\}$ が収束するかはわからない，というのは $\{-G'_n\}$ が点へ収縮することはわかったけれどもその点が例えば $+\infty$ へ発散する場合，または振動する場合（例えば同心円周上をぐるぐる回るような点）なども考えられる．しかしリーマン球面上で考えれば，リーマン球面はコンパクト集合なのである 1 点 a' に収束するような $\{-G'_n\}$ の部分列 $\{-G'_{n_j}\}$ を選ぶことができる．すると a' は $N\{G'_{n_j}\}$ の境界点となり，また境界点はこれのみであるので $a' = c_2$ が得られる．収束列の極限はその部分列の取り方によらないので，$\{-G'_n\}$ は c_2 へ収束する．つまり $N\{G'_n\}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ から 1 点 $\{c_2\}$ を除いた領域となる．

以上より，結論として G' がちょうど 2 点からなる場合は G' と $N\{G'_n\}$ は異なり，$N\{G'_n\} = \widehat{\mathbb{C}} - \{c_2\}$ であることがわかった．

Case C, G' は 1 点 c のみからなる，つまり f は定数となる場合．補題 Ⅲ − 2.11 より $c \notin N\{G'_n\}$ である．一方 c の任意の近傍 U は無限に多くの G'_n と共通の点を持つので U は $-G'_n$ に完全には含まれない，つまり $c \notin N\{-G'_n\}$ も成り立つ．結論として，c は $N\{G'_n\}$ にも $N\{-G'_n\}$ にも含まれない．

これで G の境界が 2 点以上からなる場合は完全に検証できた．特別な場合としてすべての G'_n がある固定された領域 G' と一致するときは $N\{G'_n\} = G'$, $N\{-G'_n\} = -\overline{G'}$ となる．この場合，領域は連結であるので *Case* B は起こらない．

2.6 境界が 1 点のみからなる場合

次に G は境界として 1 点 a のみを持つと仮定する．$\{f_n\}$, f の仮定は前節と同様である．定理 Ⅲ – 1.5 よりすべての f_n は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上で定義された K 擬等角写像となる．もし $\{f_n\}$ が G 上で K 擬等角写像 f に収束するならば G は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の稠密な集合であるので 2.3 節の *Case* A と *Case* B の議論より同様に $\widehat{\mathbb{C}}$ 上でも収束する．よって両者の場合とも $f(a)$ が定義され，$N\{G'_n\}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\{f(a)\}$ を除いた領域となる．

極限関数 f は G を $N\{G'_n\}$ へ写す K 擬等角写像か，もしくは G を 2 点へ写し，一方は $N\{G'_n\}$ の唯一つの境界点へ，もう一方は $N\{G'_n\}$ 内の 1 点へ写す．よって G の境界が 2 点以上からなる場合の *Case* A，*Case* B の結果はそのまま境界が 1 点のみからなる場合にも成り立つ．

一方 *Case* C の場合，すなわち境界が 1 点のみからなる G に対して $\{f_n(G)\}$ が 1 点 c へ収束するときは $\lim f_n = c$ であり，$N\{G'_n\}$ は任意に定めることができる．例えば $G = \mathbb{C} - \{0\}$, $c = \infty$ とし，E を $\mathbb{C}$ 上の任意の開集合とする．$\{\zeta_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ を極限点の集合が $-E$ と一致するような点列とすると，写像

$$g_n(z) = n(1 + |\zeta_n|)z + \zeta_n$$

は G を等角に $G'_n = \{w \mid w \neq \zeta_n\}$ へ写す．よって $N\{G'_n\} = E$ となり，任意の z に対して $\lim g_n(z) = \infty = c$ となる．

2.7 境界点を持たない場合

最後に G が境界点を全く持たない場合について考える．K 擬等角写像による $\widehat{\mathbb{C}}$ の像は $\widehat{\mathbb{C}}$ となるので，$\{f_n\}$ による G の像および $N\{G'_n\}$ もまた $\widehat{\mathbb{C}}$ となる．つまり上記の *Case* A,B,C に関係なく，$G' = f(G)$ は $N\{G'_n\}$ と一致する．

3 擬等角接続と擬等角曲線

3.1 擬等角接続

正則写像における解析接続と同様に，擬等角写像もある条件のもとで定義域を接続することができる．これを擬等角接続と呼ぶ．1.2 節で述べた諸結果は擬等角接続の例である．ここではその擬等角接続についてより一般的に考察する．

まず接続に関する次の定理を挙げる．これは鏡像の原理 (定理 Ⅲ – 1.8) より条件が緩くなっており，さらに任意のコンパクト集合上から $\widehat{\mathbb{C}}$ へ接続できる．鏡像の原理は接続しても最大歪曲率 K が変わらないという利点がある．

定理 III – 3.1. $f : G \to G'$ を K 擬等角写像，E を G のコンパクト部分集合とする．そのとき E 上で f と一致するような $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の K' 擬等角写像が存在し，K' は K, G, E によらず決まる．

3.2　擬等角曲線，擬等角閉曲線

擬等角曲線及び擬等角閉曲線を次のように定義する:

定義 III – 3.2. f を $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ を擬等角写像，$C \subset G$ をジョルダン曲線またはジョルダン閉曲線とする．C が擬等角曲線または擬等角閉曲線であるとは，C が区間または円の f による像であるときにいう．

擬等角閉曲線の部分曲線は擬等角曲線である．またこの逆も成り立つ．f を平面上定義された擬等角写像，C を区間 I の f による像，つまり擬等角曲線とする．そのとき I を部分曲線に持つような閉曲線 L の f による像は C を含むような擬等角閉曲線となる．

擬等角曲線は，これをまたいで擬等角接続をする際の重要な条件となる．例えば次のような性質がある:

定理 III – 3.3. G, G' を領域，C, C' をそれぞれ G, G' の自由境界弧とし，$f : G \to G'$ を C と C' を対応させるような擬等角写像とする．このとき，C と C' が擬等角曲線または擬等角閉曲線ならば，f は $G \cup C$ を含むような領域 G_1 上の擬等角写像へ接続される．

G, G' を n 重連結領域とすると，この定理と定理 Ⅲ – 3.1 より以下の定理も成り立つことを記しておく:

定理 III – 3.4. G, G' を n 重連結領域とし，それぞれの境界は擬等角曲線または擬等角閉曲線であるとする．このとき擬等角写像 $f : G \to G'$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の擬等角写像へ接続される．

3.3　擬等角鏡像

擬等角写像と鏡像の写像との合成写像を反擬等角写像と呼ぶ．反擬等角写像は向きを保たない写像であるので擬等角写像ではないが，擬等角写像に対して成り立つ多くの性質がまた反擬等角写像に対しても成り立つことがわかっている．

C をジョルダン閉曲線，G_1, G_2 をともに C に接するような領域とする．つまり $G_1 \cup G_2 \cup C = \widehat{\mathbb{C}}$ である．このとき G_1 から G_2 への反擬等角写像 f に対し f が C を動かさないような写像であるとき，f を擬等角鏡像という．

C を擬等角閉曲線と仮定すると，C は円の擬等角写像による写像であるので G_1 を上半平面 H_1 へ写す擬等角写像 f が存在する．このとき $\varphi : G_1 \to G_2$, $\varphi(z) = f^{-1}\overline{\bigl(f(z)\bigr)}$ は C に関する擬等角鏡像である．

逆に φ を C に関する擬等角鏡像とする．等角写像 $h : H_1 \to G_1$ に対して f を

$$f(z) = \begin{cases} h(z) & (z \in H_1) \\ \varphi\bigl(f(\overline{z})\bigr) & (z \notin H_1) \end{cases}$$

と定義する．このとき f は実軸を C へ写す擬等角写像であり，つまり C は擬等角閉曲線である．

上記の結果をまとめて以下を得る: ジョルダン曲線 C に関する擬等角鏡像が存在する必要十分条件は C が擬等角閉曲線となることである．

3.4 擬等角閉曲線の特徴付け

接続に関する議論とあわせて，擬等角 (閉) 曲線について考察する．円または区間の擬等角写像による像が擬等角曲線または閉曲線であったが，幾何学的な特徴付けを与える．

準備として鏡像の四辺形について述べる．3.3 節と同様に C をジョルダン閉曲線，G_1, G_2 をともに C に接するような領域とする．G_1 に関して正の向きに並んでいる C 上の 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 に対し，四辺形 $Q_1 = G_1(z_1, z_2, z_3, z_4)$，$Q_2 = G_2(z_4, z_3, z_2, z_1)$ を定義する．この Q_1, Q_2 のことを C に関して鏡像な四辺形と呼ぶ．

鏡像の四辺形に関して次の性質が成り立つ:

定理 III − 3.5. C をジョルダン閉曲線とする．C が擬等角閉曲線となる必要十分条件は，C に関する鏡像のモジュラス Q_1, Q_2 に対して $M(Q_1) = 1$ であるとき $M(Q_2) < \infty$ となることである．

さて，擬等角閉曲線を以下の形で特徴付けよう:

定理 III − 3.6. C をジョルダン曲線とし，C 上の *2* 点 z_1, z_2 が分ける 2 つの曲線のうちユークリッド距離における直径の小さい方を C_0 とする．C_0 の直径を $\delta\,(z_1, z_2)$ で表すことにして，ある定数 h が存在して任意の z_1, z_2 に対して

$$\delta\,(z_1, z_2) < h\,|z_1 - z_2| \tag{III.1}$$

が成り立つならば C は擬等角閉曲線であり，また逆も成り立つ．

証明．まず C を条件 (III.1) を満たすような閉曲線であると仮定する．G_1, G_2 をともに C に接するような領域とし，$Q_1 = G_1(z_1, z_2, z_3, z_4)$，$Q_2 = G_2(z_4, z_3, z_2, z_1)$ とおく．定理 Ⅲ – 3.5 より，$M(Q_1) = 1$ としたときに $M(Q_2)$ が有限であることを示せればよい．

s_a, s_b をそれぞれ G_1 内で測られる上下辺，左右辺の距離，d_a, d_b をそれぞれ平面上で測られる上下辺，左右辺の距離とする．いま G_1 が凸領域であれば s_a, s_b と d_a, d_b は一致するが，例えば

G_1 は馬蹄のような形でその両端部分が左右辺であるような場合には d_b より s_b の方が長くなる．$M(Q_1) = 1$ なので補題 I－6.2 より

$$\frac{s_a(Q_1)}{s_b(Q_1)} \geqq \frac{2}{e^{\pi+\sqrt{\pi^2+\pi}} - 1} > 10^{-3}$$

が得られ，よって

$$s_a > 10^{-3} d_b \tag{III.2}$$

を得る．

C 上に 2 点 z_1, z_2 を取るとこれにより C は 2 つの曲線に分けられるが，C は条件 (III.1) を満たすことからある定数 h が存在してすべての $z_1, z_2 \in C$ に対して z_1, z_2 で分けた少なくとも片方の曲線は直径 $h\,|z_1 - z_2|$ の円に含まれるようにできる．ここで h は z_1, z_2 のとり方によらない．このとき特に Q_1, Q_2 の左辺または右辺は直径 $h\,d_a$ の円に含まれる．この事実より

$$d_a > \frac{10^{-3}}{\pi h} d_b \tag{III.3}$$

が得られることがわかる．というのは，もし成り立たなければ $hd_a \leqq 10^{-3} d_b/\pi$ となり，左右辺の一方は直径 $10^{-3} d_b/\pi$ の円に含まれる．いまもう一方の左右辺は，他方より距離 d_a にあり，よってこの円の外側にある．つまり上下辺は Q_1 内の長さ $10^{-3} d_a$ 以下の円弧によって結べることになる．これは (III.2) に矛盾しており，よって (III.3) が得られる．

以上の結果を用いて $M(Q)$ を評価しよう．上記より Q_2 の上下辺の一方は円 $|z - z_0| < h\,d_b/2$ に含まれる．ここで ϱ を

$$\varrho(z) = \begin{cases} 1 & |z - z_0| \,<\, \dfrac{1}{2}\,h\,d_b \,+\, 10^{-3}\,\dfrac{d_b}{\pi\,h} \\[2ex] 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定義する．(III.1) より Q_2 の上下辺を結ぶ曲線 C_0 に対して $l_{\varrho(C_0)} = \int_{C_0} \varrho |dz|$ は少なくとも $10^{-3} d_b/(\pi\,h)$ であるので，定理 I－4.2 より

$$M(Q_2) \leqq \frac{\pi\big(h\,d_b/2 + 10^{-3} d_b/(\pi h)\big)^2}{10^{-6} d_b^2/\pi h} = 10^6 \pi \left(\frac{\pi h^2}{2} + 10^{-3} \right)^2$$

が得られ，$M(Q_2)$ は有界である．

次に C が条件 (III.1) を満たすことを示すため，C は擬等角閉曲線であると仮定する．そのとき，C を実軸へ写すような $\mathbb{C}$ 上定義された K 擬等角写像 f が存在する．C 上に 2 点 z_1, z_2 を取り，それによって分けられる 2 つの部分曲線を C_1, C_2 とする．以下より C_1, C_2 のどちらか一方は必ず直径 $h\,|z_1 - z_2|$ の円に含まれるような，z_1, z_2 によらない定数 h が存在することを示す．

z_1 から最も離れている C_i 上の点を p_i とする．$|p_1 - z_1|$ と $|p_2 - z_1|$ が $|z_2 - z_1|$ より小さいときは $h > 2$ であるような h を選べば主張は得られるので，いま $|p_1 - z_1|, |p_2 - z_1| > |z_2 - z_1|$ と仮定する．$d = \min(|p_1 - z_1|, |p_2 - z_1|)$ とおき，円環 $B = \{z \mid |z_2 - z_1| < |z - z_1| < d\}$ を考える．このとき B は点 z_1, z_2 と点 p_1, p_2 を隔てるような領域である．これより B の f による像を B'，点

z_1, z_2, p_1, p_2 の像をそれぞれ z_1', z_2', p_1', p_2' とすると，B は点 z_1', z_2' と点 p_1', p_2' を隔てるような環状領域である．f の仮定から z_1', z_2', p_1', p_2' はすべて実軸上にあり，f は向きを保つ写像であったのでてきとうな変換により $0 = z_1' < p_1' < z_2' < p_2' = \infty$ としてよい．つまり B' は $0, z_2$ と p_1, ∞ を隔てるような領域である．ここで Teichmüller のモジュラスの定理とその周辺の性質により B' のモジュラスは

$$M(B') < \pi \tag{III.4}$$

と評価できることが知られている．一方 B のモジュラスは定義より

$$M(B) = \log \frac{d}{|z_2 - z_1|} \tag{III.5}$$

となる．ここで f は K 擬等角であったので $M(B) \leqq KM(B')$ であり，(III.4) と (III.5) から

$$d < e^{\pi K}|z_2 - z_1|$$

が得られる．よって $h = 2e^{\pi K}$ とすれば，C_i の少なくとも片方は直径 $h|z_1 - z_2|$ の円に含まれることになり，さらに h は z_1, z_2 によらない定数である．よって逆も示され，主張が得られた．□

3.5 擬等角閉曲線の球面距離による特徴付け

擬等角閉曲線の (III.1) での特徴付けは球面距離を用いても表すことができる．C 上の 2 点 z_1, z_2 によって分けられる 2 つの部分曲線のうちその球面距離 $\Delta(z_1, z_2)$ における直径の小さい方を C_0 とする．C_0 の球面距離における直径を $\Delta(z_1, z_2)$ で表すことにして，ある定数 h が存在して任意の z_1, z_2 に対して

$$\Delta(z_1, z_2) < h\,k(z_1, z_2) \tag{III.6}$$

が成り立つならば C は擬等角閉曲線であり，逆もまた成り立つ．

条件 (III.1) から条件 (III.6) が導かれることを示そう．(III.1) もしくは (III.6) が成立しないときは 2 つの場合が考えられる:

1. $|z_1 - z_2|$ もしくは $k(z_1, z_2)$ が上に有界でありながら $\delta(z_1, z_2)$ もしくは $\Delta(z_1, z_2)$ が ∞ へ発散する．
2. $\delta(z_1, z_2)$ もしくは $\Delta(z_1, z_2)$ が下に有界でありながら $|z_1 - z_2|$ もしくは $k(z_1, z_2)$ が 0 へ収束する．

ここで 1. は起こり得ない．なぜならば，いま適当な平行移動と $f(z) = 1/z$ の一次変換により，C は無限遠点を通らないようにできる．定理 Ⅲ−1.2 と定理 Ⅲ−1.3 より擬等角写像と等角写像の合成写像は擬等角写像であるので，この変換は閉曲線の擬等角性には影響を与えない．よって $\delta(z_1, z_2)$ は ∞ へ発散せず，$\Delta(z_1, z_2)$ は球面距離なので上に有界である．

2. について考える．まずユークリッド距離と球面距離がどちらか一方のみ 0 へ収束することはないことを見る．まず $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の 2 点 z_1, z_2 の球面距離，つまりこの 2 点をリーマン球面に射影した点の表面にそった距離 $k(z_1, z_2)$ は計算により

$$k(z_1, z_2) = \arctan \left| \frac{z_1 - z_2}{1 + \overline{z_1} z_2} \right|$$

で表される．$z_2=\infty$ のときは $k(z_1,\infty)=\arctan|1/z_1|$ とする．いまリーマン球面の回転によって一般性は失われないので $z_1\to 0$ として，

$$k(0,z_2)=\arctan|z_2|$$

を得る．ここで $\arctan|z_2| \leqq |z_2|$ である．$|z_2|$ は固定された点なので，ある $\varepsilon>0$ が存在して $\varepsilon\tan|z_2|\leqq|z_2|$ とできる．これより

$$\varepsilon|z_2|\leqq\arctan|z_2|=k(0,z_2)\leqq|z_2|$$

が得られる．これから $k(0,z_2)$ と $|z_2|$ のどちらか一方だけが 0 になるようなことはないことがわかる．

これより，$k(z_1,z_2)$ が十分小さくなれば $|z_1-z_2|$ も十分小さくなる．いま (III.1) は成立するので，$\delta(z_1,z_2)$ も十分小さくなる．よって再び上記の議論より $\Delta(z_1,z_2)$ も十分小さくなり，(III.6) が成り立つ．

3.6　擬等角曲線の特徴付け

以上のような特徴付けは閉曲線だけでなく曲線に対しても有効である．C を曲線とする．このときある h が存在して C 上の任意の任意の 2 点 z_1,z_2 に対して

$$\Delta(z_1,z_2)<h\,k(z_1,z_2) \tag{III.7}$$

が成り立つならば C は擬等角曲線であり，逆もまた成り立つ．

またこれは前節と同様，ユークリッド距離に置き換えられる．ユークリッド距離で条件 (III.7) を書き直すと次のようになる：曲線 C に対してある h が存在し C 上の任意の任意の 2 点 z_1,z_2 に対して

$$\delta\left(z_1,z_2\right)<h|z_1-z_2| \tag{III.8}$$

が成り立つならば C は擬等角曲線であり逆もまた成り立つ．

さらに条件 (III.8) を用いて次のような特徴付けもできる:

定理 III − 3.7. 条件 $(III.8)$ と以下の条件は同値である; C を有界なジョルダン曲線としたとき，ある定数 h が存在して C 上の任意の *3* 点 z_1,z_2,z_3 に対してこの順序で並んでいるとき

$$|z_1-z_2|\leqq h\,|z_1-z_3| \tag{III.9}$$

が成り立つ．

証明. (III.8) から (III.9) が示せることは，$|z_1-z_2|\leqq\delta\left(z_1,z_2\right)\leqq\delta\left(z_1,z_3\right)$ より．逆は，$\delta\left(z_1,z_2\right)=|w_1-w_2|$ とすると (III.9) より

$$|w_1-w_2|\;\leqq\;|(w_1-z_1)-(w_2-z_1)|\;\leqq\;|z_1-w_1|+|z_1-w_2|\;\leqq\;2h|z_1-z_3|$$

となることからわかる．□

3.7 コッホ曲線

条件 (III.9) から，擬等角曲線についてさらに詳しく調べることができる．例えば区間 $I=\{t \mid 0<t<1\}$ を曲線 C へ写す同相写像 φ が Lipshitz 条件

$$m|t_1-t_2| \leqq |\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| \leqq M|t_1-t_2|$$

を満たすならば C は擬等角曲線である．実際，$t_1,t_2\in I$ に対して $m|t_1-t_2| \leqq |\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| \leqq M|t_1-t_2|$ が，$t_1,t_3\in I,\ t_2<t_3$ に対して $M|t_1-t_2| \leqq M/m_1|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| \leqq MM_1/m_1|t_1-t_2|$ が成り立つことより

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| \leqq \frac{M}{m_1}\,|\varphi(t_1)-\varphi(t_3)|$$

が得られる．

これより特に C は滑らかであれば擬等角曲線である．また，C が有限個の滑らかな曲線からなっていてそれが互いに角度 0 で交わっていなければ C は擬等角曲線である．もし曲線 C 上に角度 0 であるような点があれば，条件 (III.9) からその点の近傍で擬等角的ではない．実際，角度 0 になるような点を t_2 とし，この点での近傍内で C 上の点 t_1,t_3 を C に対して添字の順番に並ぶように取る．このとき三角形 $t_1t_2t_3$ を考えると，t_2 での角度が 0 になることから近傍を小さく取る $\angle t_1t_2t_3$ は任意に小さく取れる．よってそれに伴いある定数 h に対して $|z_1-z_2|>h|z_1-z_3|$ となるように $|z_1-z_3|$ を任意に小さく取れる．すなわち条件 (III.9) を満たさない．

一方，長さが有限でないような擬等角曲線も存在する．以下はその例であり，下図のような構成を無限回施したような曲線 $C=\lim C_n$ はコッホ曲線と呼ばれている．コッホ曲線は任意の点で微分不可能，有界でありながら長さは無限になるなど，普通の曲線にはないような特殊な性質を持っている．

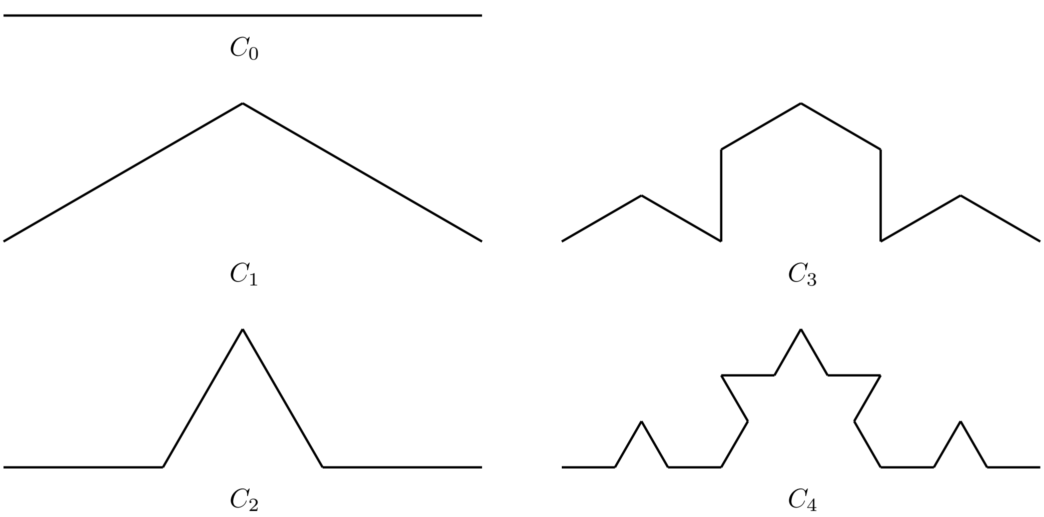


図 : コッホ曲線

コッホ曲線は，ある有界な線分に対して 2 つの相似変換

$$T_1(z) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right)(z - \alpha) + \alpha\,, \qquad T_2(z) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}i\right)(z - \beta) + \beta$$

を組み合わせて無限回施したものである．ここで α, β は各 C_n の折り目にあたる．T_1, T_2 の式から $T_1(\alpha) = \alpha, T_2(\beta) = \beta$ となる．つまりこの構成の仕方で，いったん折り目となればそれ以降その点は動かない．

構成の仕方を具体的に見よう．まず $C_0 = C_0(t) = t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ を最初の線分とする．例えば C_0 から C_1 を構成するには $\{C_0(t) \mid 0 \leqq t \leqq 1/2\}$ に対しては T_1 を，$\{C_0(t) \mid 1/2 \leqq t \leqq 1\}$ に対しては T_2 を施せばよい．この場合は $\alpha = 0, \beta = 1$ となる．

次の C_1 から C_2 を構成するには，C_1 は 2 つの直線からなるのでそれぞれの直線に C_0 と同様に，但し T_1 と T_2 を入れ替えて施す．つまり

$$C_2(t) = \begin{cases} T_2(C_1(t)) \quad \text{with } \beta = C_1(0), & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{4} \\ T_1(C_1(t)) \quad \text{with } \alpha = C_1(1/2), & \frac{1}{4} \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ T_2(C_1(t)) \quad \text{with } \beta = C_1(1/2), & \frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{3}{4} \\ T_1(C_1(t)) \quad \text{with } \alpha = C_1(1), & \frac{3}{4} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

と表される．一般の n に対しては，n が奇数の場合は

$$C_n(t) = \begin{cases} T_1(C_{n-1}(t)) \quad \text{with } \alpha = C_{n-1}(\frac{m}{2^{n-1}}), & \frac{2m}{2^n} \leqq t \leqq \frac{2m+1}{2^n} \\ T_2(C_{n-1}(t)) \quad \text{with } \beta = C_{n-1}(\frac{m+1}{2^{n-1}}), & \frac{2m+1}{2^n} \leqq t \leqq \frac{2m+2}{2^n} \end{cases} \qquad m = 0, 1, \cdots, 2^{n-1} - 1$$

n が偶数の場合は

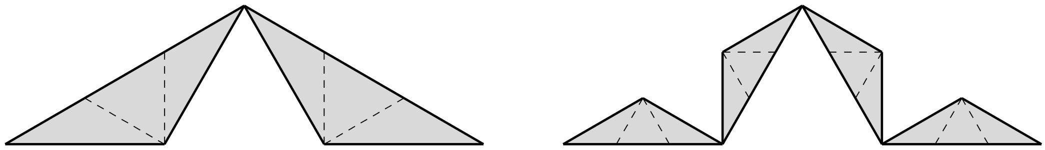
$$C_n(t) = \begin{cases} T_2(C_{n-1}(t)) \quad \text{with } \beta = C_{n-1}(\frac{m}{2^{n-1}}), & \frac{2m}{2^n} \leqq t \leqq \frac{2m+1}{2^n} \\ T_1(C_{n-1}(t)) \quad \text{with } \alpha = C_{n-1}(\frac{m+1}{2^{n-1}}), & \frac{2m+1}{2^n} \leqq t \leqq \frac{2m+2}{2^n} \end{cases} \qquad m = 0, 1, \cdots, 2^{n-1} - 1$$

で表される．

コッホ曲線が擬等角的であることを証明しよう．まず，この構成の仕方での各点の収束性を見る．この構成を n 回繰り返してできる折れ線を $C_n(t)\,(0 \leqq t \leqq 1)$ とする．一度この折れ線の折り目になればそれ以降の n に対してその点は動かない．また，例えば C_1 から C_2 を構成する様子を見ると下図のように 2 つの三角形ができるが，構成の仕方からわかるようにこれ以降の折れ線の変動はすべてこの 2 つの三角形（ここでは閉包を考えている）の中でなされる．C_2 から C_3 を構成する様子を考えても同様である．つまりある C_n を考えると，この n 以降の変動はこうしてできる 2^{n-1} 個の三角形内でのみなされる．この三角形の直径は $(1/\sqrt{3})^{n-1}$ であることから，任意の $t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ において，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 n_0 を選ぶことができ，任意の自然数 m と n, $m > n \geqq n_0$ に対して

$$\left|C_m(t) - C_n(t)\right| < \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n_0 - 1} < \varepsilon$$

となる，すなわちこの構成において C_0 上の各点は C へ収束する．



C_1 から C_2 を構成　　　　C_2 から C_3 を構成

図: コッホ曲線の変動

また任意の固定された t_1, t_2 に対して作られる n に関する点列 $\{C_n(t_1)\}, \{C_n(t_2)\}$ において，$t_1 \neq t_2$ ならばその収束先 $C(t_1) = \lim_{n\to\infty} C_n(t_1)$, $C(t_2) = \lim_{n\to\infty} C_n(t_2)$ も異なることがわかる．実際，$t_1 \neq t_2$ なら任意の有界な n に対して $C_n(t_1) \neq C_n(t_2)$ であるので，その 2 点の間に折り目が 4 つ以上あるような n が存在する．このとき上記のように C_{n-1} から C_n を構成する際にできる三角形を考えると，$C_n(t_1)$ を境界点として持つ三角形 S_1 と $C_n(t_2)$ を境界点として持つ三角形 S_2 の間には少なくとも 1 つは S_1, S_2 と合同な三角形があり，S_1 と S_2 は互いに素である．これ以降の n に対して $C_n(t_1)$ の変動は S_1 内で，$C_n(t_2)$ の変動は S_2 内でなされるのでこれらの収束先は異なる．

上記の結果を用いて $C(t)$ が条件 (III.1) を満たすことを示そう．収束性より任意の $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$ に対して異なる 2 点 $C(t_1), C(t_2) \in C(t)$ が決まる．この 2 点がある程度，例えばある定数 $\varepsilon > 0$ だけ離れている場合は主張は明らかである．よって $C(t_1), C(t_2)$ が十分近い場合を考える．上記の考察からそれぞれ $C(t_1), C(t_2)$ に収束する点列 $\{C_n(t_1)\}, \{C_n(t_2)\}$ が唯一つ存在する．$l_n = \{C_n(t) \mid t_1 \leqq t \leqq t_2\} \subset C_n(t)$，$l = \{C(t) \mid t_1 \leqq t \leqq t_2\} \subset C(t)$ とおく．このとき収束性から $l = \lim_{n\to\infty} l_n$ である．

いま，l_{k+1} で折り目を 3 つもしくは 2 つ持っていて，l_k では折り目を 1 つだけ持つような k が存在する．l_k 上の 1 つの折り目の両端にある折り目の間の折れ線を l'_k とすると，このときコッホ曲線の自己相似性によりある拡大相似変換 T があって，$T(l'_k)$ は C_2 の右半分もしくは中央部分の曲線になる．このとき $T(C_k(t_1))$ と $T(C_k(t_2))$ はある ε 程度の距離があるので，曲線 l を含む最小の円の直径を $\delta(l)$ で表すと

$$\frac{\delta(l)}{|C(t_1) - C(t_2)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\delta(l_k)}{|C_k(t_1) - C_k(t_2)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\delta(T(l_k))}{|T(C_k(t_1)) - T(C_k(t_2))|} < \infty$$

となり，条件 (III.1) を満たす．

C の長さが有限でないことを示そう．C_n は長さ $(1/\sqrt{3})^n$ の線分 2^n 個で構成されているので折

れ線としての長さは $\sum_{i=1}^{2^n}(1/\sqrt{3})^n$ となる．よって C の長さは

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2^n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = \infty$$

となる．

4　Beltrami 係数

4.1　準備

定理 Ⅱ – 3.9 の証明中の不等式 (II.13)は，Lebesgue の定理 (定理 Ⅱ – 3.5) からより一般的な形となる:

定理 III – 4.1. $f : G \to G'$ を向きを保つような同相写像とし，f_x, f_y は G 上 a.e. に有限であるとする．このとき任意の可測集合 $A \subset G$ に対して

$$\iint_A \left(|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2\right) dxdy \leqq m(f(A)) \tag{III.10}$$

が成り立つ．また f が G 上絶対連続であるとき等式が得られ，

$$\iint_A \left(|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2\right) dxdy = m(f(A)) \tag{III.11}$$

となる．

また，次の定理から擬等角写像の絶対連続性が示される．

定理 III – 4.2. f を領域 G 上定義された同相写像とする．f が G 上偏絶対連続であり f_z, $f_{\overline{z}}$ が G 上二乗可積分ならば，f は G 上絶対連続である．

上記の議論から以下の性質が導かれる:

定理 III – 4.3. 領域 G 上定義された擬等角写像 f に対して，G 上 a.e. に $f_z \neq 0$ である．

証明. $E \subset G$ を $f_z = 0$ となるような z 全体の集合として，E が零集合であることを示せばよい．いま E は可測集合で，E 上 a.e. に $f_{\overline{z}} = 0$ である．ここで定理 Ⅲ – 4.2 より f は G 上 a.e. に絶対連続であり，これより (III.11) が成り立ち

$$\int_E \left(|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2\right) dxdy = m(f(E))$$

が得られる．E 上で $|f_z|, |f_{\overline{z}}| = 0$ であったのでこれより $f(E)$ の面積は 0 となる．f^{-1} も擬等角写像であるから，上記の議論を繰り返すと $f^{-1}(f(E)) = E$ の面積も 0 となる．□

4.2 一意性定理

$f:G\to G'$ を擬等角写像とする．f のヤコビアンは $J_f=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2$ で表されることから，定理 Ⅲ − 4.3 より G 上 a.e. に $J_f>0$ であり，定理 I − 1.3 から G の a.e. の点は f の正則点である．そのような点の集合，つまり f の G 上の正則点全体の集合を G_R とすると，G_R 上で f に関する偏微分方程式

$$\mu_f=\frac{f_{\overline{z}}}{f_z}$$

を定義できる．これを Beltrami 方程式という．また μ_f のことを Beltrami 係数と呼ぶ．

Beltrami 係数 μ_f については次の一意性が知られている．つまり等角写像の自由度を除いて擬等角写像 f は一つに定まる．

定理 III − 4.4 (一意性定理)**.** G を領域，$f:G\to G'$ を擬等角写像とし，μ を f の Beltrami 係数とする．また g を G' 上で定義された等角写像とする．このとき，G 上定義された任意の擬等角写像で Beltrami 係数として μ を持つようなものはすべて $g\circ f$ という形で表される．

証明. $f:G\to G'$ を擬等角写像，g を G' 上定義された擬等角写像，その合成写像を $g\circ f$ とし，$f,g,g\circ f$ の Beltrami 係数をそれぞれ $\mu_f,\mu_g,\mu_{g\circ f}$ とする．また f,g の正則点全体の集合をそれぞれ G_R,G'_R とおく．いま正則点 $z,w=f(z)$ を有界，また $g\circ f(z)$ も有界とすると，このとき

$$\begin{aligned}\big(g\circ f\big)_z(z)&=g_w\big(f(z)\big)\cdot f_z(z)+g_{\overline{w}}\big(f(z)\big)\cdot\big(\overline{f}\,\big)_z(z)\\\big(g\circ f\big)_{\overline{z}}(z)&=g_w\big(f(z)\big)\cdot f_{\overline{z}}(z)+g_{\overline{w}}\big(f(z)\big)\cdot\big(\overline{f}\,\big)_{\overline{z}}(z)\end{aligned}$$

が得られ，$\big(\overline{f}\,\big)_z=\overline{(f_{\overline{z}})}$, $\big(\overline{f}\,\big)_{\overline{z}}=\overline{f_z}$ であるのでこれより

$$\mu_{g\circ f}\ =\ \frac{\mu_f\ +\ \mu_g\cdot\overline{f_z}/f_z}{1\ +\ \mu_f\mu_g\cdot\overline{f_{\overline{z}}}/f_{\overline{z}}}\tag{III.12}$$

を得る．

いま g が等角写像ならば G'_R 上で $\mu_g=0$ であり，またこのときに限る．f は零集合を零集合へ写すので，これから G_R 上で $\mu_g\big(f(z)\big)=0$ とできる．つまり g を等角写像と仮定すれば (III.12) より G_R 上で

$$\mu_{g\circ f}=\mu_f\tag{III.13}$$

が成立し，主張が得られる．□

上記の証明で g を等角写像と仮定したが，f の方を等角写像と仮定するとこの性質は一般には成り立たないことを注意しておく．実際 f が等角写像と仮定すると (III.12) より

$$\mu_{g\circ f}=\mu_g\cdot\big(\overline{f_z}\,/\,f_z\big)$$

となり，$\mu_{g\circ f}$ と μ_g は等しくない．

また f と g を共に G 上で定義された擬等角写像とすると，その合成関数 $g\circ f^{-1}$ の Beltrami 係数は g_z と $g_{\overline{z}}$ を上記と同様に連鎖律を用いて表すと

$$\mu_{g\circ f^{-1}}(f(z))\ =\ \frac{\mu_g\ -\ \mu_f}{1\ -\ \mu_g\overline{\mu_f}}\cdot\frac{f_z}{\overline{f_z}}\tag{III.14}$$

となる．

4.3　近似定理

ここでは擬等角写像列に伴い存在する Beltrami 係数列 $\{\mu_n\}$ の挙動について考察する．準備として次の階段関数による近似定理を挙げる．

補題 III − 4.5. φ を平面上で a.e. に有界な可測関数とする．そのとき階段関数列 $\{\varphi_n(z)\}$ が存在し，$\sup_z |\varphi_n(z)| \leqq \sup_z |\varphi(z)|$，$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(z)$ が a.e.z に対して成り立つ．

証明．最初に，整数 h, k に対して境界を含まない正方形を $Q_{hk} = \{x+iy \mid (h-1)\,\delta < x < h\,\delta,\, (k-1)\,\delta < y < k\,\delta\}$ とし，その和集合 $N = \bigcup_{h,k\in\mathbb{Z}} Q_{hk}$ を網と呼ぶことにする．ここで δ は必要に応じて小さく取る．そして任意の Q_{hk} 上である定数を取るような関数を階段関数とする．

まず φ を G 上で有界な可測関数として，φ に a.e. に収束するような連続関数列が存在することを示そう．

任意の n に対して w-平面上の正方形 $Q' = \{u+iv \mid -n < u \leqq n,\, -n < v \leqq n\}$ を考え，これを辺の長さが $1/n$ であるような正方形 Q_k に分割する．このとき Q' は全部で $4n^4$ 個に分割され，$1 \leqq k \leqq 4n^4$ である．$A_k = \varphi^{-1}(Q_k)$ とし，各々の Q_k の頂点のうち原点に近いものを q_k とすると，このとき

$$|q_k| \leqq \inf_{z\in A_k} |\varphi(z)|, \qquad \sup_{z\in A_k} |\varphi(z) - q_k| \leqq \frac{\sqrt{2}}{n}$$

が成り立つ．これらを用いて $\{g_n\}$ を

$$g_n = \sum_{k=1}^{4n^4} q_k C_{A_k}$$

で定義する．ここで C_A は A の特性関数である．この構成の仕方により $\{g_n\}$ は φ に一様に収束するが，各々の g_n は連続関数ではない．φ に収束するような連続関数列を得るために g_n を少し修正する．

まず $A_0 = \mathbb{C} - \bigcup A_k$ と定義すると，g_n は A_0 上で 0 となる．$D_n = \{z \mid |z| < n\}$ とすると，すべての $k = 0, 1, 2, \cdots, 4n^4$ に対して集合 $A_k \cap D_n$ はそれに対応したあるコンパクト部分集合 F_k を含み，

$$\sum_{k=0}^{4n^4} m\bigl(A_k \cap D_n - F_k\bigr) \,=\, m\left(D_n - \bigcup_{k=0}^{4n^4} F_k\right) \,<\, \frac{1}{2^n}$$

を満たすようにできる．$d(z, F_k)$ を点 z と集合 F_k の距離とし，$d = \min d(F_i, F_j),\ i, j = 1, 2, \cdots, 4n^4$ とする．$q_0 = 0$ として $k = 1, 2, \cdots, 4n^4$ に対して

$$h_k(z) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{2d(z, F_k)}{d}\right) q_k & d(z, F_k) \leqq d/2 \\[2ex] 0 & d(z, F_k) > d/2 \end{cases}$$

と定義すると，h_k は F_k 内では定数 q_k を取り，F_k の外で F_k から $d/2$ 以上離れたところでは 0 となる．また h_k は z に関して連続であるので，平面上一様連続な関数である．k に関する和を

$$f_n = \sum_{k=0}^{4n^4} h_k$$

と取れば f_n は $\bigcup F_k$ 内で g_n と一致しており，D_n 内では多くとも集合の測度が $1/2^n$ 以下のところで g_n と異なる．$n \to \infty$ とすれば D_n は平面を覆うので，結果としてほとんどすべての点で $f_n = g_n$ となることがわかり，φ に a.e. で収束する連続関数列 $\{f_n\}$ が得られた．

さて，次に φ を a.e. で有界であり平面上可測であるような関数としよう．上記の f_n は一様連続であるので任意の自然数 n に対して正方形の和集合 N_n を構築でき，２点 z_1, z_2 が同じ正方形 $Q_{hk} \subset N_n$ 内にあれば $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < 1/n$ となるようにできる．任意の Q_{hk} に対して，$|f_n|$ が最小値を取るような $\overline{Q}_{hk}$ 内の点を z_{hk} とする．これを用いて φ_n を

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} f_n(z_{hk}) & z \in Q_{hk} \\ f_n(z) & z \in \partial Q_{hk} \end{cases}$$

と定義する．この φ_n は階段関数となっており，平面上で $|\varphi_n| \leqq |f_n|$，$|\varphi_n - f_n| \leqq 1/n$ を満たす．これで求める階段関数が得られた．□

擬等角写像の列に対し，それに伴う Beltrami 係数の収束についての性質を調べるため弱収束を用いる．$\{f_n\}$ を G 上定義された局所可積分関数の列とする．$\{f_n\}$ が G 上で局所可積分関数に弱収束するとは，軸に平行な長方形 $R, \overline{R} \subset G$ の任意の水平な線分上で

$$\lim_{n\to\infty} \iint_R (f_n - f) dxdy = 0$$

を満たすときにいう．

弱収束性は擬等角写像の一様収束列と関係している．その性質を以下に挙げよう；

補題 III − 4.6. $\{f_n\}$ を G 上定義された K 擬等角写像列とし，G のコンパクト部分集合上で一様に，有界な写像 f へ収束するとする．このとき $\{f_n\}$ の導関数列 $\{(f_n)_z\}$, $\{(f_n)_{\overline{z}}\}$ はそれぞれ f_z, $f_{\overline{z}}$ へ弱収束する．

証明．定理 Ⅲ − 2.9 より極限写像 f は K 擬等角写像か定数のどちらかであるが，どちらにせよ f は偏絶対連続でありまた f_z, $f_{\overline{z}} \in L^1$ である．$R, \overline{R} \subset G$ を任意の軸に平行な長方形とする．ここで Green の定理から，公式として f が G 上偏絶対連続であり f_z, $f_{\overline{z}} \in L^1$ ならば

$$\int_{\partial G} f\,dz = 2i \iint_G f_{\overline{z}}\,dxdy, \qquad \int_{\partial G} f\,d\overline{z} = -2i \iint_G f_z\,dxdy$$

が得られることを用い，

$$\begin{aligned} \iint_R \big((f_n)_z - f_z\big) dxdy &= \frac{i}{2} \int_{\partial R} \big(f_n - f\big) d\overline{z} \\ \iint_R \big((f_n)_{\overline{z}} - f_{\overline{z}}\big) dxdy &= \frac{1}{2i} \int_{\partial R} \big(f_n - f\big) dz \end{aligned}$$

が得られる．$\{f_n\}$ は R の境界上で f へ一様収束しているので，上記の積分の右辺は 0 となり主張を得る．□

この結果を用いて Beltrami 係数の収束に関する定理が証明できる．

定理 III − 4.7 (近似定理)**.** $\{f_n\}$ を G 上定義され，G のコンパクト部分集合上で f へ一様収束するような K 擬等角写像列とし，f, f_n の Beltrami 係数をそれぞれ μ, μ_n とする．このとき $\{\mu_n\}$ が G 上 a.e. に μ_∞ へ収束するならば，G 上 a.e. に

$$\mu_\infty = \mu$$

が成り立つ．

証明. G と $f_n(G)$ は有界領域であると仮定してよい．Beltrami 方程式より $f_{\overline{z}} - \mu f_z = 0$, $f_z \neq 0$ が G 上 a.e. に成り立つので

$$\zeta = f_{\overline{z}} - \mu_\infty f_z$$

と定義したとき，G 上の a.e.z に対して $\zeta(z) = 0$ が成り立つことを示す．いま ζ を

$$\zeta = \big[f_{\overline{z}} - (f_n)_{\overline{z}}\big] + \big[(f_n)_{\overline{z}} - \mu_n (f_n)_z\big] + \big[\mu_n (f_n)_z - \mu_\infty (f_n)_z\big] + \big[\mu_\infty (f_n)_z - \mu_\infty f_z\big]$$

とし，軸に平行な任意の長方形 R, $\overline{R} \subset G$ 上で ζ に関して積分する．仮定より右辺第二項は G 上 a.e. に 0 となるので，

$$\iint_R \zeta \; dxdy = I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n} \tag{III.15}$$

と書ける．ここで

$$I_{1,n} = \iint_R \big(f_{\overline{z}} - (f_n)_{\overline{z}}\big)\, dxdy$$

$$I_{2,n} = \iint_R (\mu_n - \mu_\infty)(f_n)_z \, dxdy$$

$$I_{3,n} = \iint_R \mu_\infty \big((f_n)_z - f_z\big)\, dxdy$$

である．よってそれぞれの積分の値が 0 となることを示せばよい．

まず定理 Ⅲ − 4.6 より $(f_n)_{\overline{z}}$ は $f_{\overline{z}}$ へ弱収束するので

$$\lim_{n\to\infty} I_{1,n} = 0 \tag{III.16}$$

を得る．

さらに，計算により最大歪曲率 K と f のヤコビアン J_f に対して $|f_z|^2 \leqq K J_f$ が成り立つことがわかるので，これと Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned} |I_{2,n}|^2 &\leqq \iint_R |\mu_n - \mu_\infty|^2 dxdy \iint_R |(f_n)_z|^2 dxdy \\ &\leqq K\, m\big(f_n(R)\big) \iint_R |\mu_n - \mu_\infty|^2 dxdy \end{aligned} \tag{III.17}$$

が得られる．f_n は R 上で f に一様収束し，証明の冒頭で f が有界であると仮定したので $m\big(f_n(R)\big)$ は一様に有界である．(III.17) の右の積分は Lebesgue の収束定理により $n \to \infty$ で 0 となり，結果として

$$\lim_{n\to\infty} I_{2,n} = 0 \tag{III.18}$$

を得る．

あとは $I_{3,n}$ を評価すればよい．そのために補題 Ⅲ – 4.5 を用いよう．いま μ_∞ は R 上有界であるので，補題 Ⅲ – 4.5 より R 上 a.e. に μ_∞ に収束するような階段関数列 $\{\varphi_k\}$ が存在する．$I_{3,n}$ を

$$I_{3,n} = \iint_R (\mu_\infty - \varphi_k)\big((f_n)_z - f_z\big)dxdy + \iint_R \varphi_k\big((f_n)_z - f_z\big)dxdy \tag{III.19}$$

と表す．まず (III.19) の右辺第一項は Schwarz の不等式と Lebesgue の収束定理により評価でき，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある k_0 が存在し，$k = k_0$ と任意の n に対して (III.19) 式右辺第一項の絶対値は ε で押さえられる．また第二項の積分は，いま $k = k_0$ のときの φ_{k_0} は R 上の高々有限個の正方形上で定数をとるので，補題 Ⅲ – 4.5 より

$$\lim_{n\to\infty} \iint_R \varphi_{k_0}\big((f_n)_z - f_z\big)dxdy = 0$$

が得られる．これにより

$$\lim_{n\to\infty} I_{3,n} = 0 \tag{III.20}$$

も得られ，(III.16)，(III.18)，(III.20) より

$$\iint_R \zeta\, dxdy = 0 \tag{III.21}$$

が得られることがわかった．

(III.21) から G 上 a.e. で $\zeta = 0$ が得られることを示す．まず任意の開集合 $F \subset G$ を可算無限個の長方形で近似する．つまり $R_h,\ h = 1, 2, \cdots$ を軸に平行な互いに交わらない長方形，E_0 を測度 0 であるような集合とすると，$G_0 = \big(\bigcup R_h\big) \cup E_0$ と表される．よって (III.21) は G 内の任意の開集合 F 上で成り立つ．より一般に，$A, \overline{A} \subset G$ を可測集合としよう．このとき A に対して $A \subset F_k, \overline{F_k} \subset G$ であるような減少集合列 $\{F_k\}$ を構成することができ，$\lim\limits_{k\to\infty}(F_k - A) = 0$ を満たすようにできる．いま Lebesgue 積分は集合関数に関して局所絶対連続となるので，積分の定義から任意の可測集合 $A, \overline{A} \subset G$ に対して

$$\iint_A \zeta\, dxdy = 0 \tag{III.22}$$

が得られる．

$\mathrm{Re}\,\zeta = \xi$ とすると，集合 $E = \{z \mid z \in G, \xi(z) \neq 0\}$ は $k = 1, 2, \cdots$ に対して $E_k = \{z \mid z \in G, \xi(z) > 1/k\}$ と $E_{-k} = \{z \mid z \in G, \xi(z) < -1/k\}$ の和集合となっている．これら各々の E_k, E_{-k} は (III.22) より m に関して零集合であるので $m(E) = 0$ が得られ，これから G 上 a.e. に $\xi = 0$ が得られる．同様の議論を $\mathrm{Im}\,\zeta = \eta$ に関してすると G 上 a.e. に $\zeta = 0$ となり，主張が得られた．□

4.4　存在定理

擬等角写像 f が決まるとそれに伴い Beltrami 係数 μ_f も定まるが，ここでは逆に，与えられた G 上のある可測関数 φ, $|\varphi| < 1$ に対してそれを Beltrami 係数として持つような擬等角写像の存在性について考察する．

注意として，$G = \widehat{\mathbb{C}}$ としてよいことを挙げておく．なぜならば，可測関数 φ がある有界領域 G 上定義されているとすると

$$\varphi^*(z) = \begin{cases} \varphi(z) & z \in G \\ 0 & z \notin G \end{cases}$$

で φ^* を定義すれば φ^* は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上で可測な関数となるからである．あとは φ^* について解が得られれば，その G への制限を考えればよい．

まず φ が階段関数の場合を考えよう．補題 Ⅲ – 4.5 の証明中の記号を再び用い，正方形の集合 $Q_{hk} = \{x + iy \mid (h-1)\,\delta < x < h\,\delta, (k-1)\,\delta < y < k\,\delta\}$ とその和集合 $N = \bigcup_{h,k\in\mathbb{Z}} Q_{hk}$ を考える．また和集合 N の上での階段関数を φ とし，$\sup|\varphi(z)| < 1$ を満たし，各々の Q_{hk} 上で定数 φ_{hk} を取るようなものとする．いま Beltrami 係数としてそのような φ を持つような擬等角写像を探したいが，ほとんどいたるところで φ と一致すればよいので Q_{hk} の境界上と無限遠点上は除外集合と見なし，このような点上では $\varphi = 0$ とおく．

各々の Q_{hk} 上でならば目的の擬等角写像はすぐに見つかる．例えば一次変換 l_{hk} を

$$l_{hk}(z) = z + \varphi_{hk}\overline{z} \tag{III.23}$$

とおけば $|\varphi_{hk}| < 1$ なので l_{hk} は Q_{hk} 上で Beltrami 係数 φ_{hk} を持つような擬等角写像である．ここで $|\varphi_{hk}| > 1$ だとヤコビアンが負になるので向きが変わってしまうことを注意しておく．あとはこのような写像をタイルのように敷き詰めていけばよいのだが，ここで敷き詰めたあとに写像 l_{hk} を貼り合わせられるのかが問題となる．つまり次の縫合問題へ帰着する:

定理 III − 4.8 (縫合問題)**.** R_1, R_2 を互いに交わらない合同な長方形とし，それぞれある一辺 I を共有しているとする．また f_1, f_2 をそれぞれ R_1, R_2 上定義された擬等角写像とし，その Beltrami 係数をそれぞれ μ_1, μ_2 とする．このとき $R = R_1 \cup I \cup R_2$ 上定義された擬等角写像で a.e.R_1 上では μ_1 を，a.e.R_2 上では μ_2 をそれぞれ Beltrami 係数として持つような擬等角写像を構築することができる．

証明. 始めに定理 Ⅲ – 4.4 より擬等角写像 f_i と等角写像との合成によりの Beltrami 係数は不変なので，いま $f_1(R_1)$ と $f_2(R_2)$ はそれぞれ上半平面 H_1，下半平面 H_2 であると仮定してよい．そうすると f_1, f_2 は $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$ での同相写像へ接続される．さらに各々の等角写像は境界の 3 点の写り先を指定できるので，適当な H_1, H_2 上の正則自己同型写像を考えることにより f_1, f_2 は I を同じ実軸上の区間へ写し，$f_1^{-1}(\infty)$ と $f_2^{-1}(\infty)$ は I に関して対称の位置にあるとしてよい．

f_1 と f_2 が I 上で一致するならば主張はすぐ得られる．実際 f を

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in R_1 \cup I \\ f_2(z) & z \in R_2 \end{cases}$$

とすればこれは R を $H_1 \cup f(I) \cup H_2$ に写す同相写像であり，定理 Ⅲ – 1.9 の解析的曲線の除去可能性により f は求める Beltrami 係数を持つような擬等角写像となる．

一般的な場合，つまり f_1 と f_2 が I 上で必ずしも一致しない場合では，等角写像 g_1, g_2 で，それぞれ H_1, H_2 を互いに交わらないジョルダン領域へ写し $g_1 \circ f_1$ と $g_2 \circ f_2$ は I 上で同じ境界値を取るようなものが存在することが示せる（後述）．これにより f を

$$f(z) = \begin{cases} g_1\bigl(f_1(z)\bigr) & z \in R_1 \cup I \\ g_2\bigl(f_2(z)\bigr) & z \in R_2 \end{cases}$$

とおけば先程の場合と同様に f は同相写像となり，定理 Ⅲ – 1.9 よりこれは擬等角写像となる．擬等角写像に等角写像を合成しても Beltrami 係数は変わらないので，これで求める解が得られる．

残された問題は上記のような等角写像 g_1, g_2 の存在性である．つまり $f_1(I)$ 上で $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ となるためには任意の $x \in f_1(I)$ に対して

$$g_1(x) = g_2\bigl(f_2(f_1^{-1}(x))\bigr) \tag{III.24}$$

が満たされればよい．これに関しては以下の縫合定理を用いて示すことができる．

定理 III – 4.9 (縫合定理)**.** ψ を実軸上の区間 J 上で定義された連続狭義単調増加関数とし，任意の x, $x-t$, $x+t \in J$, $t > 0$ に対してある定数 k が存在し

$$\frac{1}{k} \leqq \frac{\psi(x+t) - \psi(x)}{\psi(x) - \psi(x-t)} \leqq k \tag{III.25}$$

を満たすとする．このとき等角写像 g_1, g_2 で，それぞれ上半平面と下半平面を互いに交わらないようなジョルダン領域に写し境界値として等式 $g_1(x) = g_2\bigl(\psi(x)\bigr)$ を満たすようなものが存在する．

この定理から，$\psi : f(I) \to f(I)$, $\psi(x) = f_2(f_1^{-1}(x))$ とおいたとき ψ が条件 (III.25) を満たすことを示せばよい．まず f_2 は I に関する鏡像の原理により R_1 上へ接続される．そうすると $f_2(f_1^{-1})$ は H_1 上定義された自己同型擬等角写像となり ∞ は ∞ へ写され，さらにこのとき $f(I)$ 上では ψ と一致している．この状況のもとで ψ が条件 (III.25) を満たすことが証明でき，よってさらに縫合定理を用いると $g_1(x) = g_2(\psi(x))$ を満たす等角写像 g_1, g_2 の存在がわかる．□

縫合問題の解を用いて，当初の目的であった次の存在定理を示そう:

定理 III – 4.10 (存在定理)**.** G を任意の領域，φ を G 上定義された任意の可測関数で，G 上

$$\sup_{z \in G} |\varphi(z)| < 1$$

を満たすとする．このとき G 上定義された擬等角写像 f で，G 上 a.e. に f の Beltrami 係数 μ_f は $\mu_f = \varphi$ を満たすようなものが存在する．

証明. まず階段関数の場合から考える．補題 Ⅲ – 4.5 での和集合 N と階段関数 φ を再び用いよう．正方形 $\{Q_{hk}\}$, $Q_{hk} \subset N$ を用いて以下のような性質を満たす長方形の列 $\{R_n\}$ を構築できる:

1. R_1 は $\{Q_{hk}\}$ の元の中のひとつである．
2. R_n は $R_{n-1} \subset R_n$ を満たす長方形で，$R_n - \overline{R_{n-1}}$ は R_{n-1} と合同である．
3. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = \mathbb{C}$．

これをふまえて (III.23) の場合から考える．このとき縫合問題の解から，擬等角写像列 $\{f_n\}$, $f_n : R_n \to R'_n$ で f_n の Beltrami 係数が a.e.R_n で φ と一致するようなものを作ることができる．f_n は R_n 上で ∞ の値を取らず，また等角写像を合成させることにより f_n は十分大きな n に対して $0, 1$ を不動点として持つようにできる．これにより正規化され，定理 Ⅲ − 2.7 より十分大きな m に対して $\{f_n \mid n \geqq m\}$ は R_m 上で正規族となる．よって R_m 内の任意のコンパクト集合上で一様収束するような $\{f_n\}$ の部分列 $\{f_{n,m}\}$ を取ることができる．この部分列 $\{f_{n,m+1}\}$ は，R_{m+1} 内の任意のコンパクト集合上で一様収束するような列 $\{f_{m+1,n}\}$ を部分列として含む．これより対角列 $\{f_{m,m}\}$ は任意の有界領域上で一様収束することがわかり，定理 Ⅲ − 2.9 より $f = \lim f_{m,m}$ は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への擬等角写像となる．よって近似定理 (定理 Ⅲ − 4.7) から f の Beltrami 係数 μ_f と φ が $\mathbb{C}$ のほとんどいたるところで等しいことがわかり，階段関数の場合は存在定理が成り立つことがいえる．

次に φ, $\sup|\varphi(z)| < 1$ が一般の可測関数の場合を考える．補題 Ⅲ − 4.5 より，φ を近似するような階段関数 φ_n が存在し，a.e.$\mathbb{C}$ 上で $\sup|\varphi_n(z)| \leqq \sup|\varphi(z)|$，$\lim \varphi_n = \varphi$ を満たす．上記の考察から，各々の φ_n に対して $\sup|\varphi|$ は 1 より小さいので a.e.$\mathbb{C}$ 上で Beltrami 係数が φ_n と等しいような $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への擬等角写像 f_n が存在する．各々の f_n に対し $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ とすると，f_n は 0, 1, ∞ を固定するような写像であるので $\{f_n\}$ は正規族となる．よって $\widehat{\mathbb{C}}$ の任意のコンパクト集合上で一様収束するような $\{f_n\}$ の部分列を取ることができ，$f = \lim f_n$ は $\mathbb{C}$ 上の擬等角写像となる．$f(\infty) = \infty$ と書けばこれは $\widehat{\mathbb{C}}$ 上に接続でき，近似定理 (定理 Ⅲ − 4.7) から f の Beltrami 係数 μ_f と φ がほとんどいたるところで等しい．これで主張が得られる．□

この存在定理と一意性定理 (定理 Ⅲ − 4.4) から，等角写像における基本性質の多くが擬等角写像に対しても成り立つことがわかる．例えば以下のようなものである (定理 Ⅲ − 4.12, Ⅲ − 4.13 は [1] による):

定理 III − 4.11 (可測型リーマンの写像定理)**.** G, G' を互いに等角同値な単連結領域，φ を G 上定義され $\sup|\varphi(z)| < 1$ を満たすような可測関数とする．そのとき G から G' への擬等角写像 f で，G 上 a.e. に Beltrami 係数 $\mu_f = \varphi$ を持つようなものが等角写像の自由度を除いて一意的に存在する．

証明．存在定理より，G 上定義された擬等角写像 h で，G 上 a.e. に Beltrami 係数 $\mu_h = \varphi$ を持つようなものが存在する．ここで系 Ⅲ−1.6 より $h(G)$ は G，従って G' と等角同値であるので，$g : h(G) \to G'$ となるような等角写像 g が存在する．さらに一意性定理により等角写像の合成は Beltrami 係数を変えない，つまり $\mu_h = \mu_{g\circ h}$ であるので，$f = g \circ h$ とすれば f が求める擬等角写像である．□

定理 III − 4.12 (可測型カラテオドリの定理)**.** G, G' をジョルダン領域，$f : G \to G'$ を擬等角写像とすると，f は $\overline{G}$ から $\overline{G'}$ への同相写像へ接続される．

証明. これは定理 Ⅲ-1.7 と同様の主張だが，ここでは存在定理を用いた別証明を与える．

f の Beltrami 係数を μ とすると μ は G 上定義された可測関数となるが，$\widehat{\mathbb{C}}-G$ 上で $\mu=0$ と定義すると μ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上定義された可測関数となる．存在定理より μ を Beltrami 係数として持つ $\widehat{\mathbb{C}}$ 上定義された擬等角写像 h が存在する．さらに f と h は同じ Beltrami 係数を持つので，一意性定理から $\mu_{h\circ f^{-1}}=0$ となり，$g=h\circ f^{-1}$ と書けば g は等角写像となる．よってカラテオドリの定理より g は $\overline{G'}$ から $\overline{h(G)}$ への同相写像へ接続される．h は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ の同相写像であるので $h(G)$ の境界と G の境界はそれぞれ対応しており，よって f は G から G' への同相写像へ接続された．□

定理 III − 4.13 (可測型リュービルの定理)**.** $\mathbb{C}$ 上定義された有界な擬等角写像は定数である．

証明. G を有界な領域とし，$f:\mathbb{C}\to G$ となるような擬等角写像 f が存在すると仮定する．f の Beltrami 係数を μ とすると，存在定理より μ を Beltrami 係数として持つ $\mathbb{C}$ 上定義された擬等角写像 h が存在する．ここで h は $h(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ となるものを選ぶ．さらに一意性定理から $\mu_{h\circ f^{-1}}=0$ であるので，$g=h\circ f^{-1}$ とおくと g は等角写像である．$g^{-1}=f\circ h^{-1}$ は $\mathbb{C}$ から G への等角写像であるのでリュービルの定理により g^{-1} は定数となる，よって $f\circ h^{-1}$ も定数となり，h は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への擬等角写像であったので $f(\mathbb{C})$ は定数となり，仮定に矛盾する．□

第IV章　正則運動

この章では擬等角写像論にとって著しい結果である，正則運動における λ-補題について述べる．1983 年に R. Mañé，P. Sad，D. Sullivan [4] により示された λ-補題により擬等角写像は等角写像の単なる拡張概念という範囲を超え，自然に存在する概念であることが示された．

1　円周歪曲率

擬等角写像の新たな定義を与えるために，次の円周歪曲率を導入する．

1.1　定義

定義 IV − 1.1. G, G' を $\mathbb{C}$ 上の領域とし，$f : G \to G'$ を向きを保つ同相写像とする．このとき $z \in G$ に対し

$$H_f(z) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\max_\zeta\{|f(\zeta) - f(z)| \mid |\zeta - z| = \varepsilon\}}{\min_\zeta\{|f(\zeta) - f(z)| \mid |\zeta - z| = \varepsilon\}} \tag{IV.1}$$

を f の z における円周歪曲率 (circular dilatation) という．

注意．$H_f(z)$ は $z \neq \infty, f(z) \neq \infty$ の場合に定義されているが，$z = \infty$ の場合は $H_f(\infty) = H_{\tilde{f}}(0)$, $\tilde{f}(z) = f(1/z)$，$f(z) = \infty$ の場合は $H_f(z) = H_{1/f}(z)$ とすることにより円周歪曲率は $\widehat{\mathbb{C}}$ へ拡張される．

注意．円周歪曲率は球面距離を用いても定義できる．すなわち

$$H_f(z) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\max_\zeta\{k(f(\zeta), f(z)) \mid k(\zeta, z) = \varepsilon\}}{\min_\zeta\{k(f(\zeta), f(z)) \mid k(\zeta, z) = \varepsilon\}}$$

とも表される．この記述には $H_f(z)$ を $\widehat{\mathbb{C}}$ 上で定義した場合に上述の $H_f(\infty) = H_{\tilde{f}}(0), H_f(z) = H_{1/f}(z)$ ように ∞ を特別な場合として定義しなくても良いという利点がある．

円周歪曲率は微小円の像である微小楕円の長径と短径の比の極限を表している．つまり円周歪曲率による定義は，解析的定義の考察の際に定数 k について述べたが，その楕円の長径，短径の比の極限を直接的に表した形である．

(IV.1) は $\zeta = z + re^{i\theta}$ と置き換えると

$$H_f(z) = \limsup_{r \to 0} \frac{\max_\theta |f(z + re^{i\theta}) - f(z)|}{\min_\theta |f(z + re^{i\theta}) - f(z)|} \tag{IV.2}$$

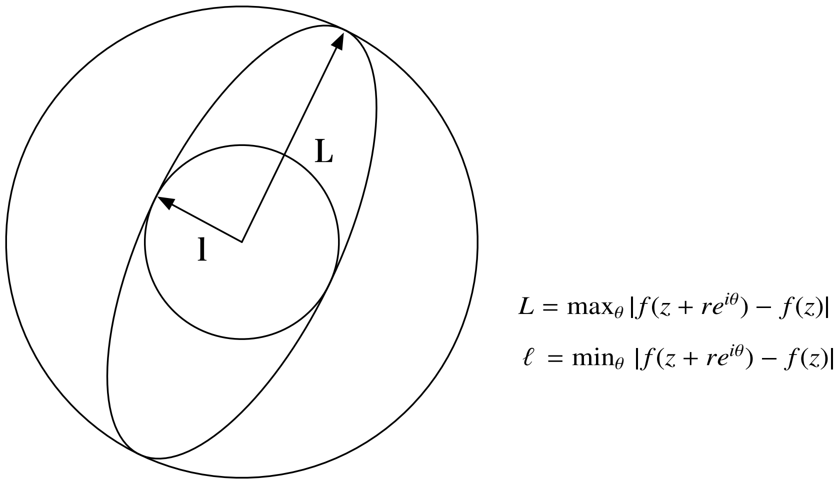


図 : 長径と短径の比の極限が円周歪曲率となる

と表すこともできる．ここで f の θ 方向に関する方向微分を $\partial_\theta f$ で表すことにすると，計算より任意の f の正則点 z に対して

$$\begin{aligned} \partial_\theta f(z) &= \lim_{r\to 0} \frac{f(z+re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} \\ &= e^{-i\theta}(f_x \cos\theta + f_y \sin\theta) \;=\; f_z + f_{\overline{z}}\, e^{-2i\theta} \end{aligned}$$

を得る．f は向きを保つので $|f_z| > |f_{\overline{z}}|$ より，$H_f(z)$ に対して

$$H_f(z) \;=\; \frac{\max_\theta |\partial_\theta f(z)|}{\min_\theta |\partial_\theta f(z)|} \;=\; \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|} \qquad \text{(IV.3)}$$

が成り立つ．(IV.3) の中央の方向微分の項を $D_f(z)$ で表し，これを歪曲比 (dilatation quotient) と呼ぶことがある．つまり f の正則点 z 上では円周歪曲率 $H_f(z)$ と歪曲比 $D_f(z)$ は等しい．上式より $K = (1+k)/(1-k)$ として，$|f_{\overline{z}}| \leqq k\,|f_z|$ と $\max_\theta |\partial_\theta f(z)| \leqq K \; \min_\theta |\partial_\theta f(z)|$ は同値であることがわかる．

1.2　必要性

円周歪曲率 H_f を用いて擬等角写像を特徴づけられることを示そう．次の定理 Ⅳ – 1.2, Ⅳ – 1.3 は必要性を，定理 Ⅳ – 1.4 は十分性を示している．

定理 IV – 1.2. K 擬等角写像 $f : G \to G'$ に対して，G 上 a.e. に $H_f \leqq K$ が成り立つ．

証明. G 上の a.e. の点は正則点であるので，f が擬等角写像ならば (IV.3) より G 上 a.e. に

$$H_f(z) \;=\; \frac{1 + |f_{\overline{z}}|/|f_z|}{1 - |f_{\overline{z}}|/|f_z|} \;\leqq\; \frac{1+k}{1-k} \;=\; K$$

が得られる．□

定理 IV − 1.3. K 擬等角写像 $f : G \to G'$ に対して，H_f は G 上で K に依存する定数以下となる．

証明. G, G' を $\mathbb{C}$ 上の有界な領域とする．任意の $z \in G$ に対して円板 $D_r = \{z \mid |z - z_0| < r\}$, $\overline{D_r} \subset G$ を考える．いま

$$m_1(r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z) - f(z_0)|$$

$$m_2(r) = \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - f(z_0)|$$

とおき，それぞれの max, min を与える z を z_1, z_2 とする．十分小さい r を選び，$|f(z) - f(z_0)| \leqq m_1(r)$ が G' に含まれるとしてよい．

円環領域 $B' = \{w \mid m_2(r) < |w - w(z_0)| < m_1(r)\} \subset G'$ に対し，その原像 B は z_0, z_2 と z_1, ∞ を隔てるような環状領域である．ここで $|z_1 - z_0| = |z_2 - z_0|$ を用いると，Teichmüller のモジュラスの定理を用いて

$$M(B) \leqq \pi$$

と評価できる．一方 B' のモジュラスは $M(B') = \log\bigl(m_1(r)/m_2(r)\bigr)$ であるので，$M(B') \leqq K\,M(B)$ から

$$\frac{m_1(r)}{m_2(r)} \;=\; H_f(z_0) \;\leqq\; e^{\pi K}$$

が得られ，主張が得られた．□

定理 Ⅳ − 1.2 と Ⅳ − 1.3 の違いは G 上 a.e. に成り立つか，G 上の至る所で成り立つかである．つまり f が K 擬等角であれば H_f は G 上 a.e. に K でおさえられ，そうでないような所でも K に依存するような定数でおさえられる．

1.3 十分性

定理 IV − 1.4. $f : G \to G'$ を向きを保つ同相写像とする．H_f が G 上有界であり，G 上 a.e. に $H_f \leqq K$ を満たすならば f は K 擬等角写像である．

証明. 定理 Ⅲ − 1.5 から，G, G' は無限遠点を含まないと仮定してもよい．

まず f が G 上偏絶対連続であることを示す．長方形 $R = \{x + iy \mid a < x < b,\, c < y < d\}$, $\overline{R} \subset G$ と R 上の水平線分 $I_y = \{x \mid x + iy \in R\}$ に対し，R を I_y で切ったときにできる 2 つの領域の下側の部分を R_y とおく．$f(R_y)$ の面積を $A(y)$ とおくと，これは y の関数として単調増加である．よって a.e.y, $c < y < d$ に対して有界な導関数 $A'(y)$ を持つ．

a.e.R に対して $H_f(z) \leqq K$ が成り立つので，Fubini の定理よりこれは a.e.y, $c < y < d$ に対し a.e.I_y 上で成り立つ．よって $A'(y)$ が存在し，a.e.x に対し $H_f(x + iy) \leqq K$ が成り立つという仮定のもと，I_y 上での f の絶対連続性が示せれば十分である．このような条件を満たす $I_{y_0} = I$ を固定する．

$F \subset I$ をコンパクト集合とし，H_f は F 上である定数 N を超えないとしよう．ここで N と K は等しいとは限らない．定理の条件より a.e. に $K \geqq H_f$ を満たすものが K であり，H_f は N を

完全に超えない，とするのが N である．この N に対して証明し，後にそこで得られた結果は K に対しても成り立つことを示す．最初に，$f(F)=F'$ の 1 次元 Lebesgue 測度 $l(F')$ が有界であり，$l(F)$ が 0 に向かうときそれと共に $l(F)$ も 0 に向かうことを示す．これがいえれば，後はこの結果を任意の I 上の Borel 部分集合へ拡張すれば，f の I 上での絶対連続性がわかる．

自然数 q を，$1/q$ が F と $-R$ との距離より小さくなるように選ぶ．I は開集合であるので F と $-R$ との距離は 0 にならないことに注意する．また

$$M(z,r)=\max_{|\lambda-z|=r}|f(\lambda)-f(z)|$$
$$m(z,r)=\min_{|\lambda-z|=r}|f(\lambda)-f(z)|$$

とし，閉集合 F_ε を

$$F_{1/q}=\left\{z\;\middle|\;z\in F,\ \sup_{0<r\leqq 1/q}\frac{M(z,r)}{m(z,r)}\leqq N+1\right\}$$

で定義する．q を ∞ へ近づけると，$F_{1/q}$ は F に収束するような単調増加列となり，つまり $F=\bigcup F_{1/q}$ と書ける．$F_{1/q}$ の像 $F'_{1/q}$ も同様に $F'=\bigcup F'_{1/q}$ とでき，$1/q=\varepsilon$ とすると Lebesgue 測度の性質から

$$\lim_{\varepsilon\to 0}l(F'_\varepsilon)\;=\;l(F') \tag{IV.4}$$

が得られる．

F_ε はコンパクトであったので，有限個の被覆 $\{D_\varepsilon(z_h)\}$, $D_\varepsilon(z_h)=\{\zeta\mid|\zeta-z_h|<\varepsilon\}$, $z\in F_\varepsilon$, $h=1,2,\cdots,n_\varepsilon$ で覆うことができる．いま，これらの被覆の円板は多くとも互いに 3 つ以上は重ならないとしてよい．つまり 3 つ以上で重なれば，そのうちの 1 つを取り除いても F_ε を覆う際には問題はない．各々の線分 $I\cap D_\varepsilon(z_h)$ は長さが 2ε であるので

$$l\left(I\cap\{D_\varepsilon\}\right)\;\geqq\;\varepsilon\,n_\varepsilon \tag{IV.5}$$

が成り立つ．

A を $F\subset A\subset I$ であるような開集合とすると，ε を $I-A$ と F の距離より小さく取れば $\{D_\varepsilon\}\cap I\subset A$ とできる．$l(A-F)$ は任意に小さく取れるので，$\limsup l(\{D_\varepsilon\}\cap I)\leqq l(A)\leqq l(F)$ が得られる．一方任意の ε に対し $\{D_\varepsilon\}\cap I\supset F_\varepsilon$ であり $\lim l(F_\varepsilon)$ であったので

$$\lim_{\varepsilon\to 0}l(\{D_\varepsilon\}\cap I)=l(F) \tag{IV.6}$$

が得られる．各 $D_\varepsilon(z_h)$ の像を $D'_\varepsilon(z_h)$ とすると，D_ε は 3 つ以上は重ならないことから $\{D'_\varepsilon(z_h)\}$ の面積は $\pi\sum_{h=1}^{n_\varepsilon}\bigl(m(z_h,\varepsilon)\bigr)^2/2$ より大きくなる．いますべての $D_\varepsilon(z_h)$ は長方形 $\{x+iy\mid a<x<b,\ y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon\}$ の中に含まれているので，これより結果として

$$2\bigl(A(y_0+\varepsilon)-A(y_0-\varepsilon)\bigr)\;\geqq\;\pi\sum_{h=1}^{n_\varepsilon}\bigl(m(z_h,\varepsilon)\bigr)^2$$

が得られる．右辺をさらに評価しよう．まず各々の z_h は F_ε 上の点であるので $h=1,\cdots,n\varepsilon$ に対

して $M(z_h,\varepsilon)/m(z_h,\varepsilon) \leqq N+1$ が得られ，Schwarz の不等式とあわせて

$$\begin{aligned} 2\big(A(y_0+\varepsilon)-A(y_0-\varepsilon)\big) &\geqq \frac{\pi}{(N+1)^2}\sum_{h=1}^{n_\varepsilon}\big(M(z_h,\varepsilon)\big)^2 \\ &\geqq \frac{\pi}{n_\varepsilon\,(N+1)^2}\left(\sum_{h=1}^{n_\varepsilon} M(z_h,\varepsilon)\right)^2 \end{aligned}$$

となる．(IV.5) より

$$l(D_\varepsilon\cap I)\ \frac{A(y_0+\varepsilon)-A(y_0-\varepsilon)}{2\,\varepsilon} \ \geqq\ \frac{\pi}{4(N+1)^2}\left(\sum_{h=1}^{n_\varepsilon} M(z_h,\varepsilon)\right)^2 \tag{IV.7}$$

が得られ，$\varepsilon\to 0$ とすると (IV.6) より (IV.7) の左辺は

$$\lim_{\varepsilon\to 0} l(D_\varepsilon\cap I)\ \frac{A(y_0+\varepsilon)-A(y_0-\varepsilon)}{2\,\varepsilon} \ =\ l(F)\,A'(y_0) \tag{IV.8}$$

と評価できる．

後は $\varepsilon\to 0$ としたときの (IV.7) の右辺の挙動を知りたい．まず最初にある固定された ε_0 をひとつ取る．ここで $\varepsilon<\varepsilon_0$ に対して $F'_{\varepsilon_0}\subset\bigcup D'_\varepsilon(z_h)$ である．各々の $D'_\varepsilon(z_h)$ は半径 $M(z_{h,\varepsilon})$ の円板内にあるので，任意の ε に対してある ε_0, $\varepsilon_0>\varepsilon>0$ が存在し，和集合の直径が

$$2\sum_{h=1}^{n_\varepsilon} M(z_h,\varepsilon)$$

となるような円板たちによって F_ε を被覆するようにできる．f は R 上一様連続であったので，$\varepsilon\to 0$ で $M(z_h,\varepsilon)$ は 0 へ収束する．よって Lebesgue 測度の定義より

$$l(\,F'_{\varepsilon_0})\ \leqq\ 2\ \liminf_{\varepsilon\to 0}\sum_{h=1}^{n_\varepsilon} M(z_h,\varepsilon)$$

が成り立つ．これは任意の ε_0 に対して成り立つので，(IV.4) より

$$l(\,F')\ \leqq\ 2\ \liminf_{\varepsilon\to 0}\sum_{h=1}^{n_\varepsilon} M(z_h,\varepsilon)$$

となる．これで (IV.7) の右辺を評価でき，(IV.8) とあわせて

$$\big(l(F')\big)^2 \leqq \frac{16}{\pi}\,(N+1)^2 A'(y_0) l(F) \tag{IV.9}$$

が得られ，まず最初に求めたかった絶対連続性，つまり $l(F)$ が 0 に向かうときそれと共に $l(F)$ も 0 に向かうことがいえた．この不等式は任意のコンパクト集合 $F\subset I$ で，任意の $z\in F$ に対して $H_f(z)\leqq N$ を満たすものに対して成り立っている．

次に，F を任意の I の Borel 部分集合で任意の $z\in F$ に対して $H_f(z)\leqq N$ を満たすようなものに対しても (IV.9) が成り立つかどうかをみる．そのためにまず Borel 集合を閉集合で近似し，I の

像 $I' = f(I)$ が Lebesgue 測度 l に関して σ-有限であることを示す．ここで集合 X が測度 μ に関して σ-有限であるとは，X が $\mu(A_n) < \infty$ を満たすような可算集合 $\{A_n\}$ の和集合になっているときをいう．

任意の $z \in I$ に対して $H_f(z)$ は有界なので，

$$\Psi(z) = \sup_{|r-z| \in I} \frac{M(z,r)}{m(z,r)}$$

も有界となる．E を I のコンパクト部分集合とすると，

$$E_N = E \cap I_N, \qquad I_n = \{z \mid \Psi(z) \leqq N\}$$

は閉集合となる．任意の $z \in E_N$ に対して $H_f(z) \leqq N$ であり，(IV.9) より $E'_N = f(E_N)$ は測度 l に関して有界である．N を自然数とすれば $E = \bigcup E_N$ であるので $E' = f(E)$ は Lebesgue 測度 l に関して σ-有限である．I' に関しても，I は可算閉区間の和で表されるので同じことが示される．

$B \subset I$ を $H_f \leqq N$ を満たすような Borel 集合としよう．このとき $B' = f(B)$ もまた Borel 集合であり，I' は σ-有限であったので閉集合列 $\{F'_k\}$, $F'_k \subset B'$, $k = 1, 2, \cdots$ で $\lim l(F'_k) = l(B')$ とできるものが存在する．F'_k の原像 $F_k = f^{-1}(F'_k)$ は閉集合であるので，任意の k に対して (IV.9) は $F = F_k$ と置き換えても成立する．さらに極限を考えると，(IV.9) の F, F' をそれぞれ B, B' へ置き換えられる．

最後に，(IV.9) は「任意の $z \in I$ に対して $H_f(z) \leqq N$ である」という仮定のもとで成り立っていたが，これを定理の仮定にそうような形，つまり「a.e.$z \in I$ に対して $H_f(z) \leqq N$ を満たす」という仮定へ改良したい．そのために測度 0 であるような Borel 集合 $B_0 \subset I$ とその像 B'_0 を考える．すると $B_0 \cap I_N$ 上では $H_f \leqq N$ となり，$l(B_0 \cap I_N) = 0$ であるのでその像 $(B_0 \cap I_N)'$ の l に関する測度も 0 になる．$B'_0 = \bigcup (B_0 \cap I_N)'$ であったのでこれより $l(B'_0) = 0$ を得る．

いま，I は a.e.$z \in I$ で $H_f(z) \leqq K$ を満たすように選んだので l に関して測度 0 となる Borel 集合 $B_0 \subset I$ で，$I - B_0$ 上で $H_f \leqq K$ となるようなものが存在する．そのとき上記の考察により $l(B'_0) = 0$ である．$B \subset I$ を任意の Borel 集合とすると，その像に関して $l(B') = l((B - B_0)')$ である．$B - B_0$ 上では $H_f \leqq K$ であったので，(IV.9) は

$$\bigl(l(B')\bigr)^2 \leqq \frac{16}{\pi}\,(N+1)^2 A'(y_0) l(B)$$

と改良された．この不等式は任意の Borel 集合 B とその像 $B' \subset I$ のもとで成り立っていたので，向きを保つ同相写像 f は I 上絶対連続であることが示された．同様の議論を R 内の垂直成分に対してもすることで，f の偏絶対連続性が示される．

以上で擬等角写像の解析的定義 1 の条件 *1.* が満たされることがわかった．条件 *2.* に関しては，いま f の偏絶対連続性により G 上 a.e. に f_z, $f_{\bar z}$ が存在することが保証されるので，Gehring-Lehto の補題 (定理 II – 3.8) より f は G 上 a.e. に全微分可能である．よって $z \in G$ を $H_f \leqq K$ を満たすような点とすると z が正則点であるような場合は定理 IV – 1.2 の証明より

$$H_f(z) \;=\; \frac{1 + |f_{\bar z}|/|f_z|}{1 - |f_{\bar z}|/|f_z|} \;\leqq\; \frac{1+k}{1-k} \;=\; K$$

となり，これより $|f_{\bar{z}}|/|f_z| \leqq k$ が得られる．z が正則点でない場合は点 z 上で $|f_z| = 0$ となり，よって $|f_{\bar{z}}|$ も 0 となる．これより，$r \to 0$ で 0 に収束するようなものをまとめて $o(r)$ で表すことにすると，$m(z,r) = o(r)$ となる．$H_f \leqq K$ より $M(z,r) = o(r)$ であり，これより K が有界であれば $\max_\theta |\partial_\theta f(z)| \leqq K \min_\theta |\partial_\theta f(z)|$ が常に成り立つ．これで条件 *2.* が成り立つことがいえ，主張が得られた．□

以上より，$H_f(z)$ により擬等角写像が定義できる．

定義 IV − 1.5 (円周歪曲率による定義)**.** G, G' を領域，$f : G \to G'$ を向きを保つ同相写像とする．f の円周歪曲率 $H_f(z)$ に対し，H_f が G 上いたるところで有界なとき，f を単に擬等角写像という．また G 上 a.e. に $H_f(z) \leqq K$ が成り立つとき，f を K 擬等角写像という．

2 双曲幾何，リーマン面

正則写像による双曲距離の縮小性はリーマン面上においても成り立つ．ここでは双曲距離，フックス群，リーマン面などの理論の結びつきについて述べる．証明は，言及する必要のあるものを除いてここでは述べない．2.1 節，2.2 節は [5] より，2.3 節，2.4 節は [1] より，2.2 節のフックス群に関する記述と 2.5 節は [8] より引用した．

2.1 双曲距離

まず双曲計量に関する基本的な性質を述べる．単位円板の自己同型写像 $w = L(z)$ において w の z に関する微分は

$$L'(z) = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}$$

と表されることから，等式

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2} = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

が成立する．よって単位円板 $\mathbb{D}$ 内に線素 $d\lambda$ を

$$d\lambda = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

と定義すれば，これは単位円板の自己同型写像によって変わらない計量である．これを単位円板の双曲計量と呼ぶ．この計量により，$\mathbb{D}$ 内に距離を定義できる．任意の 2 点 $z_1,\ z_2 \in \mathbb{D}$ に対して距離 $d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$ を，z_1 と z_2 を結ぶ区分的に滑らかな曲線 C の，双曲計量に関する長さの下限で定義する．つまり

$$d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \inf_C \int_C d\lambda = \inf_C \int_C \frac{|dz|}{1-|z|^2} \tag{IV.10}$$

と定義し，これを双曲距離と呼ぶ．また双曲距離を定義するような曲線 C を測地線という．この双曲距離が距離の公理を満たすことは容易にわかる．また双曲距離が $\mathbb{D}$ の自己同型写像で不変なのは明らかであろう．つまりそのような一次変換 $L : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ に対して

$$d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{D}}(L(z_1),\, L(z_2))$$

が成り立つ．

測地線を直線とみることで双曲幾何学を構築できる．測地線は $\partial\mathbb{D}$ と直行するような円弧となることが示され，それによりある測地線と「平行な」直線は無数に存在することもわかる．

今後の議論で重要となる性質は，Schwarz-Pick の定理から直ちに導かれる次の縮小原理である．

定理 IV − 2.1 (Schwarz-Pick の定理)**.** f を $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ 内への正則写像とする．このとき任意の $a \in \mathbb{D}$ に対して

$$\frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leqq \frac{1}{1-|a|^2}$$

が成り立つ．ここで等号が成り立つのは，f が $\mathbb{D}$ の自己正則写像であるときに限る．

定理 IV − 2.2 (縮小原理)**.** f を $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ 内への正則写像とする．このとき任意の 2 点 $z_1,\, z_2$ に対して

$$d_{\mathbb{D}}(f(z_1),\, f(z_2)) \leqq d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \tag{IV.11}$$

が成り立つ．

最後に，任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ に対して $d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$ は具体的に

$$d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \;=\; \frac{1}{2}\log\frac{1+\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}z_2}\right|} \tag{IV.12}$$

で与えられる．

2.2　一次変換群，フックス群

一次変換を表示する方法の 1 つに，係数を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のように行列の形に並べるというものがある．ここで $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc = 1$ である．この行列での表記のメリットは，一次変換の合成が簡単に計算できることである．例えば $L_1,\, L_2$ を一次変換としそれぞれに対応する行列の成分を対応する添字で表すと，$L_2 \circ L_1$ に対応する行列は

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

となる．さらにこのような行列全体の集合

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{C},\, ad-bc=1 \right\}$$

を考えると，$SL(2,\mathbb{C})$ は上記の考察から積に関して群をなす．これを 2 次の特殊線形群 (Special Linear group) という．同様に $SL(2,\mathbb{R})$, $SL(2,\mathbb{Z})$ なども定義できる．

$SL(2,\mathbb{C})$ の各要素はある一次変換に対応するが，A と $-A$ は一次変換として同じものであるのでこのようなものを同一視した集合を考える必要があり，これを $PSL(2,\mathbb{C})$ とする．$PSL(2,\mathbb{C})$ ももちろん積に関して群をなし，これを射影特殊線形群 (Projective Special Linear group) という．さらに一次変換全体の集合を $M\ddot{o}b(\widehat{\mathbb{C}})$ と表すと，この $M\ddot{o}b(\widehat{\mathbb{C}})$ は関数の合成に関して群をなすことがわかり，また $PSL(2,\mathbb{C})$ と $M\ddot{o}b(\widehat{\mathbb{C}})$ は群として同型であることも示される．よって以下では $PSL(2,\mathbb{C})$ とした場合は $M\ddot{o}b(\widehat{\mathbb{C}})$ の意味も含めて考えることにする．

同じコンセプトで単位円の自己同型写像 $M\ddot{o}b(\mathbb{D})$ が対応するようなものを考えると，これは集合

$$SU(1,1) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a,\, b \in \mathbb{C},\, |a|^2-|b|^2=1 \right\}$$

から，上記と同様に A と $-A$ を同一視した集合 $PSU(1,1)$ を考え積に関して群構造を入れると $M\ddot{o}b(\mathbb{D})$ と対応させることができる．

最後にフックス群を定義する．まずいくつか言葉を定義しておく．

定義 IV − 2.3. G を $PSL(2,\mathbb{C})$ の部分群とする．任意の *2* 点 $z_1,\, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対してこの *2* 点が G-同値であるとは，$f(z_1)=z_2$ となるような写像 $f \in G$ が存在するときにいう．また z と G-同値であるような点全体をまとめて z の G-軌道という．

定義 IV − 2.4. G を $PSL(2,\mathbb{C})$ の部分群，$D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ をある領域とする．G が領域 D で不連続な群であるとは以下の条件を満たすときにいう*:*

1. 任意の f に対して $f(D)=D$ となる，つまり f は D を保つ．

2. 任意の $z \in D$ に対して，z の G-軌道は D 内で収束するような部分点列を持たない．

定義 IV − 2.5 (フックス群)**.** 上半平面 H で不連続な $PSL(2,\mathbb{R})$ の部分群，あるいは単位円板 $\mathbb{D}$ で不連続な $PSU(1,1)$ の部分群をフックス群という．

例えば平行移動からなる群 $G_1 = \langle z \mapsto z+1 \rangle$ は明らかにフックス群である．また，原点を固定点に持つ変換群 $G_2 = \langle z \mapsto z/(1-z) \rangle$ は，一般に「G が領域 D で不連続ならば任意の $h \in PSL(2,\mathbb{C})$ に対して $h \circ G \circ h^{-1}$ も領域 $h(D)$ で不連続である」という事実より $h(z) = -1/z$ とすれば $G_2 = h \circ G_1 \circ h^{-1}$ と表されるので，G_2 もフックス群である．

2.3　リーマン面と普遍被覆面

ここではリーマン面を定義し，その普遍被覆面について述べる．

まずリーマン面を定義する．リーマン面は 1 次元複素多様体として定義される．

定義 IV − 2.6. R を連結な Hausdorff 空間とする．R の開集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と各 U_λ 上定義された写像の族 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が以下の性質を満たしているとする．

1. $R = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ である．
2. 各 φ_λ は，U_λ から複素平面上の開集合 $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ への同相写像である．
3. $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ のとき，座標変換 $\varphi_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$ は $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ から $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ への双正則写像，つまり正則な同相写像である．

このとき，U_λ を局所近傍，φ_λ を局所座標，U_λ と φ_λ の組 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ を座標近傍，その族 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を R の座標近傍系といい，$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は R に一次元複素構造を定めるという．この R と座標近傍系をあわせてリーマン面，または一次元複素多様体という．

R_1, R_2 をリーマン面とするとリーマン面の間の写像 $F : R_1 \to R_2$ に対しても次のようにして正則性を定義することができる．

任意の点 $p \in R_1$ に対し，p を含むような局所近傍 U とその局所座標 φ，$F(p) \in R_2$ の局所近傍 V とその局所座標 ψ を考える．いま $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(p)$ の近傍で正則であるとき，F を R_1 から R_2 への正則写像という．特に正則写像 F が同相，つまり全単射であるとき，F は R_1 から R_2 への双正則写像であるといい，またこのとき R_1 と R_2 は双正則同値であるという．

次に被覆面について定義しその性質を見る．R と $\widetilde{R}$ をリーマン面，$\pi : \widetilde{R} \to R$ を正則写像とする．いま π が以下の性質を満たすと仮定しよう: 任意の点 $p \in R$ に対しある p の近傍 U が存在し，$\pi^{-1}(U)$ の任意の連結成分を V とすると $\pi : V \to U$ が同相写像となる．このとき $(\widetilde{R}, \pi, R)$ を被覆，$\widetilde{R}$ を R の被覆面，π を射影と呼ぶ．さらに $\widetilde{R}$ が単連結であるとき，$(\widetilde{R}, \pi, R)$ を普遍被覆，$\widetilde{R}$ を R の普遍被覆面という．

リーマン面 R の普遍被覆面 $\widetilde{R}$ を実際に構成してみよう．まず言葉をいくつか説明する．R 上の連続曲線 $C = \{C(t) \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ を R 上の道という．道はジョルダン曲線である必要は無い．R 上の道 C, C' に対して，C の終点と C' の始点をくっつけた道を $C \circ C'$ のように表す．

被覆 $(\widetilde{R}, \pi, R)$ において，点 $\tilde{p} \in \widetilde{R}, p \in R$ が $\pi(\tilde{p}) = p$ を満たすとき，点 $\tilde{p}$ は点 p の上にあるという．また道 $\widetilde{C} \subset \widetilde{R}, C \subset R$ が $\pi(\widetilde{C}) = C$ を満たすとき，道 $\widetilde{C}$ を C の持ち上げという．

さて，この道を用いて R の普遍被覆面 $\widetilde{R}$ を構成しよう．まず R 上のある 1 点 p_0 を取り固定する．R の任意の点 p と，始点が p_0 で終点が p であるような曲線 C の組 (C, p) を考える．$(C, p), (C', p')$ をそのような組とすると，$p = p'$ でありかつ C と C' がホモトピックであるとき，(C, p) と (C', p') は同値であるとする．この同値関係により (C, p) は同値類を定め，これを $[C, p]$ と表す．この $[C, p]$ 全体が作る集合を $\widetilde{R}$ としよう．

このように構成した $\widetilde{R}$ が R の普遍被覆面になっているか確かめる．まず $\widetilde{R}$ に位相を入れる．R の 1 点 $\tilde{p} = [C, p]$ に対しこの p の近傍 $U_p \subset R$ で単連結になるようなものを取り，この近傍内の

点 $q \in U_p$ が終点で始点が p となる道を C_q とする．C と C_q を結ぶと $\widetilde{R}$ の点 $[C \circ C_q, q]$ が作られ，U_p から作られるこのような点全体を $\widetilde{U_p}$ で表す．U_p は単連結なので U_p と $\widetilde{U_p}$ は自然と 1 対 1 の対応がつき，このような $\widetilde{U_p}$ を $\widetilde{R}$ の座標近傍系に取れば，$\widetilde{R}$ は Hausdorff 空間となる．さらに射影 $\pi : \widetilde{R} \to R$ を $\pi([C,p]) = p$ で定めれば，$\widetilde{R}$ の構成の仕方から π は $\widetilde{R}$ から R の上への連続写像であることがわかり，π は 1 対 1 であったので同相写像となる．また同様に $\widetilde{R}$ の構成法より π は被覆面の定義を満たすこともわかる．

上記の方法から $\widetilde{R}$ の複素構造も定められる．任意の点 $\tilde{p} = [C,p] \in \widetilde{R}$ に対して，これより定まる p の座標近傍を U_p，その局所座標を z_p とする．U_p より $\widetilde{U}_p \subset \widetilde{R}$ が定まり，$\widetilde{U}_p$ の座標変換を $\widetilde{z}_p = z_p \circ \pi$ とすれば座標近傍 $(\widetilde{U}_p, \widetilde{z}_p)$ が定まり，このように構成される座標近傍系 $\{(\widetilde{U}_p, \widetilde{z}_p)\}_{\tilde{p}\in\Lambda}$ は $\widetilde{R}$ の複素構造を定める．以上を補題としてまとめておく:

補題 IV – 2.7. 上記のように構成した $\widetilde{R}$ は単連結なリーマン面であり，R の普遍被覆面となっている．

この補題 Ⅳ – 2.7 と次の Koebe の一意化定理により，リーマン面は以下の 3 つの形に帰着する．

定理 IV – 2.8 (Koebe の一意化定理)**.** 単連結なリーマン面は $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ のいずれかと双正則同値である．

以上の補題 Ⅳ – 2.7 と一意化定理 (定理 Ⅳ – 2.8) より以下を得る:

定理 IV – 2.9. 任意のリーマン面は普遍被覆面 $\widetilde{R}$ を持ち，$\widetilde{R}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ のいずれかと双正則同値である．

これによってリーマン面の普遍被覆面は $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ として扱うことができるようになる．さらに次の性質がある:

補題 IV – 2.10. リーマン面 R の普遍被覆面 $\widetilde{R}$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ と双正則同値となるのは R が $\widehat{\mathbb{C}}$ と双正則同値であるときに限る．

補題 IV – 2.11. リーマン面 R の普遍被覆面 $\widetilde{R}$ が $\mathbb{C}$ と双正則同値となるのは R が $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} - \{0\}$, トーラスのいずれかと双正則同値であるときに限る．

つまり 4 つの場合を除いたほとんどのリーマン面は普遍被覆面として $\mathbb{D}$ と同型なものを持つ．このようなリーマン面を双曲型と呼ぶことにする．

この構成法の正当性と必然性に関して次の性質を挙げておく．

補題 IV – 2.12 (道の一意性)**.** R の任意の点 $p \in R$ を取り，その上にある $\widetilde{R}$ の点を $\tilde{p}$ とする．このとき p を始点とする道 $C \subset R$ に対し，C の持ち上げ $\widetilde{C} \subset \widetilde{R}$ で $\tilde{p}$ を始点とするものが一意的に存在する．

補題 IV – 2.13 (普遍被覆の一意性)**.** R の 2 つの普遍被覆 $(\widetilde{R}_1, \pi_1, R_1)$, $(\widetilde{R}_2, \pi_2, R_2)$ に対して，双正則写像 $\widetilde{f} : \widetilde{R}_1 \to \widetilde{R}_2$ で $\pi_2 \circ \widetilde{f} = \pi_1$ を満たすものが存在する．

2.4　被覆変換群

被覆 $(\widetilde{R}, \pi, R)$ に対し，双正則写像 $\gamma : \widetilde{R} \to \widetilde{R}$ が $\pi \circ \gamma = \pi$ のような自己同型変換となっているとき，γ を被覆変換という．$(\widetilde{R}, \pi, R)$ の被覆変換全体を Γ と表すと，Γ は写像の合成に関して群をなす．この Γ を被覆変換群，特に普遍被覆面 $\widetilde{R}$ における被覆変換群は普遍被覆変換群と呼ばれる．

定理 Ⅳ – 2.9 より普遍被覆面は $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ のいずれかと同型であるので，普遍被覆変換は $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ の自己同型写像の一部，つまり Γ は $PSL(2,\mathbb{C})$, $PSU(1,1)$ の部分群ということもできる．

普遍被覆変換群 Γ の持つ基本的性質を見よう．

補題 IV – 2.14. リーマン面 R の普遍被覆 $(\widetilde{R}, \pi, R)$ の普遍被覆変換群 Γ は以下の性質を持つ:

1. 点 $p_0 \in R$ を基点とする R の基本群を $\pi_1(R, p_0)$ とし，任意の $[C_0] \in \pi_1(R, p_0)$ に対し $\widetilde{R}$ から $\widetilde{R}$ への変換を $[C_0]_* : [C, p] \mapsto [C_0 \circ C, p]$ で定めると，この対応 $\pi_1(R, p_0) \to \Gamma$，$[C_0] \mapsto [C_0]_*$ により $\pi_1(R, p_0)$ と Γ は同型となる．
2. 2 点 $\tilde{p}, \tilde{q} \in \widetilde{R}$ が $\pi(\tilde{p}) = \pi(\tilde{q})$ であるとき，$\tilde{q} = \gamma(\tilde{p})$ であるような $\gamma \in \Gamma$ が存在する．
3. 任意の点 $\tilde{p} \in \widetilde{R}$ に対して適当な $\tilde{p}$ の近傍 $\widetilde{U}_p$ を取ると，恒等変換を除く $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma(\widetilde{U}_p) \cap \widetilde{U}_p = \phi$ となる．特に恒等変換以外の γ は固定点を持たない．
4. $\widetilde{R}$ の任意のコンパクト集合 K に対して，$\gamma(K) \cap K \neq \phi$ となる $\gamma \in \Gamma$ は有限個である．このことを，Γ は $\widetilde{R}$ に固有不連続に作用する，という．

注意. 定義 Ⅳ – 2.4 の *2.* と補題 Ⅳ – 2.14 での *3.* でそれぞれ不連続という言葉が出てきたが，今回のケースではこれら 2 つの不連続性は互いに同値であることが示させる．つまり普遍被覆変換群はフックス群である．しかしこの逆は成り立たない．定義 Ⅳ – 2.5 の下の例にある G_2 は原点を固定点として持つが，上記の補題 Ⅳ – 2.14 の *2.* を見れば G_2 は普遍被覆変換群でないことがわかる．ただ，両者ともに $PSL(2,\mathbb{R})$ の部分群 (もしくは $PSU(1,1)$ の部分群) であるので，ある種のフックス群が普遍被覆変換群である，という言い方はできる．

普遍被覆面 $\widetilde{R}$ の普遍被覆変換群 Γ を用いて，新たなリーマン面 $\widetilde{R}/\Gamma$ を構成できることを示そう．任意の $\widetilde{R}$ の点 $\tilde{p}$ に対し，$\tilde{p}$ と Γ-同値であるようなもの全体を $[\tilde{p}]$ で表す．このような同値類 $[\tilde{p}]$ 全体の集合を $\widetilde{G}/\Gamma$ とする．また射影 $\pi^* : \widetilde{R} \to \widetilde{R}/\Gamma$ を $\pi^*(\tilde{p}) = [\tilde{p}]$ で定義する．

まず $\widetilde{R}/\Gamma$ に開集合を定義して位相を入れよう．任意の集合 $U \subset \widetilde{R}/\Gamma$ に対し，逆像 ${\pi^*}^{-1}(U) \subset \widetilde{R}$ が $\widetilde{R}$ の開集合となるとき，U を開集合であると定義する．このとき射影 $\pi^* : \widetilde{R} \to \widetilde{R}/\Gamma$ は全射の連続写像となる．また Γ は $\widetilde{R}$ に固有不連続に作用するので $\widetilde{R}/\Gamma$ は第二分離公理を満たし，よって Hausdorff 空間になる．さらに $\widetilde{R}$ が連結なので $\widetilde{R}/\Gamma$ も連結となる．

$\widetilde{R}/\Gamma$ の複素構造は次のようにして定める．任意の点 $\tilde{p} \in \widetilde{R}$ に対して定まる座標近傍 $(\widetilde{U}_p, \widetilde{z}_p)$ をひとつ取る．これより $p^* = \pi^*(\tilde{p})$, $U_p^* = \pi^*(\widetilde{U}_p)$ と定義すれば $\pi^* : \widetilde{U}_p \to U_p^*$ は単射であるので同相写像となり，よって $z_p^* = \widetilde{z}_p \circ \pi^*$ とおけば座標近傍系 $\{(U_p^*, z_p^*)\}_{p^* \in \Lambda}$ は $\widetilde{R}/\Gamma$ の複素構造を定め，$\widetilde{R}/\Gamma$ はリーマン面となる．また $\widetilde{R}/\Gamma$ の被覆は $(\widetilde{R}, \pi^*, \widetilde{R}/\Gamma)$ となる．

ここで構成したリーマン面 $\widetilde{R}/\Gamma$ に対して以下の定理が成り立つ:

定理 IV – 2.15. リーマン面 R の普遍被覆 $(\widetilde{R},\,\pi,\,R)$ とその普遍被覆変換群 Γ に対して，$\widetilde{R}$ と Γ による定まりリーマン面 $\widetilde{R}/\Gamma$ は R と双正則同値となる．

これらの性質により，例えば R を双曲型リーマン面，$(\widetilde{R},\,\pi,\,R)$ を R の普遍被覆，Γ を普遍被覆変換群とすると $\widetilde{R}$ は $\mathbb{D}$ と双正則同値となり，R は $\mathbb{D}/\Gamma$ と双正則同値となる．つまり $\pi : \widetilde{R} \to R$ を $\pi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}/\Gamma$ とみなせる．

2.5 縮小原理

以上で準備が整った．我々が必要とする性質は，リーマン面においても縮小原理 (定理 Ⅳ – 2.2) と同様の性質が成り立つということである．

まずリーマン面に双曲距離を入れる．R を双曲型リーマン面とし，$(\widetilde{R},\,\pi,\,R)$ を被覆，Γ をその普遍被覆変換群とする．定理 Ⅳ – 2.9, 補題 Ⅳ – 2.10, 補題 Ⅳ – 2.11 より，$\widetilde{R}$ は $\mathbb{D}$ と双正則同値であり，さらに定理 Ⅳ – 2.15 より R は $\mathbb{D}/\Gamma$ と双正則同値である．いま単位円板 $\mathbb{D}$ に (IV.10) のように双曲計量を定義すると，(IV.11) にもあるように双曲計量は一次変換で不変であり Γ は $PSU(1,1)$ の部分群であるので，$\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}/\Gamma$ に自然に計量を落とせば $\mathbb{D}/\Gamma$ 上の双曲計量 $d_{\mathbb{D}/\Gamma}$ を定義できる．双曲距離は．2 点 $z_1,\,z_2 \in \mathbb{D}/\Gamma$ に対して

$$d_{\mathbb{D}/\Gamma}(z_1,\,z_2) = \inf_{\widetilde{z_1}\in\pi^{-1}(z_1),\,\widetilde{z_2}\in\pi^{-1}(z_2)} d_{\mathbb{D}}(\widetilde{z_1},\,\widetilde{z_2})$$

で定義する．

さて，リーマン面上定義された双曲距離の縮小性を示そう:

定理 IV – 2.16 (縮小原理)**.** $R_1,\,R_2$ を双曲型リーマン面とする．このとき，任意の正則写像 $f : R_1 \to R_2$ と任意の *2* 点 $a, b \in R_1$ に対して

$$d_{R_2}\bigl(f(a), f(b)\bigr) \leqq d_{R_1}(a,b)$$

が成り立つ．

証明. $(\widetilde{R}_1,\,\pi_1,\,R_1)$, $(\widetilde{R}_2,\,\pi_2,\,R_2)$ をそれぞれ $R_1,\,R_2$ の被覆，$\Gamma_1,\,\Gamma_2$ をそれぞれの普遍被覆変換群とする．$R_1,\,R_2$ は双曲型であるので $R_1 = \mathbb{D}/\Gamma_1,\,R_2 = \mathbb{D}/\Gamma_2,\,\widetilde{R}_1 = \widetilde{R}_2 = \mathbb{D}$ としてよい．

一価性定理より，$\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$ となるような正則写像 $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が存在する．すると $f = \pi_2 \circ F \circ \pi_1$ であり，F により双曲距離は縮小することから結果的に f は双曲距離を縮小させる．□

3 λ-補題

ここでは我々の目的である λ-補題を証明する．[4] によるが，[7] も参考にした．

3.1　正則運動

定義 IV – 3.1. A を $\widehat{\mathbb{C}}$ の空でない部分集合，$\mathbb{D}$ を単位円板とし，$\mathbb{D}$ と A との直積から $\widehat{\mathbb{C}}$ 内への写像

$$i : \mathbb{D} \times A \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

が以下の 3 条件を満たすとき，i は A の正則運動であるという;

1. 任意の固定された $z_0 \in A$ に対し，$z_0(\lambda) = i(\lambda, z_0)$ は $\mathbb{D}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像である．

2. 任意の固定された $\lambda_0 \in \mathbb{D}$ に対し，$i_{\lambda_0}(z) = i(\lambda_0, z)$ は A から $\widehat{\mathbb{C}}$ 内への 1 対 1 写像である．

3. i_0 は A の恒等写像である．

3.2　λ-補題の証明

定理 IV – 3.2 (λ-補題 [4])**.** A を $\widehat{\mathbb{C}}$ の空でない部分集合，i を A の正則運動とする．このとき以下が成り立つ;

1. $i : \mathbb{D} \times A \to \widehat{\mathbb{C}}$ は連続である．

2. 任意の固定された λ に対して，$i_\lambda(z)$ は $\overline{A}$ 上の $\widehat{\mathbb{C}}$ 内への擬等角写像に拡張される．

3. i は $\overline{A}$ 上の正則運動へ拡張される．

証明. まず $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が有限集合のときは，有限集合に対する円周歪曲率は

$$H_f(z) = \frac{\max_{\zeta \in A(z)} k(f(\zeta), f(z))}{\min_{\zeta \in A(z)} k(f(\zeta), f(z))}$$

である．ここで，$A(\zeta) = \big\{ \zeta \in A - \{z\} \bigm| k(\zeta, z) = \min_{\xi \in A - \{z\}} k(\xi, z) \big\}$ である．したがって，$H_f(z)$ は有界であり，$A = \overline{A}$ 上の 1 対 1 写像は擬等角写像である．ゆえに *2.* は成立する．*1.* の連続性は，A が離散集合であることからわかる．*3.* は $\overline{A} = A$ より仮定されている．よって A が有限集合のときは定理の主張は得られる．

以下，A は無限集合であると仮定する．A は $0, 1, \infty$ を含み，i_λ は $0, 1, \infty$ を不動点として持つと仮定してよい．なぜならば，まず任意の異なる 3 点 $z_1, z_2, z_3 \in A$ に対して，z_1, z_2, z_3 をそれぞれ $0, 1, \infty$ へ写す一次変換を g，$i_\lambda(z_1), i_\lambda(z_2), i_\lambda(z_3)$ を $0, 1, \infty$ へ写す一次変換族を $\{h_\lambda\}$ とする．このとき

$$\tilde{i}_\lambda = h_\lambda \circ i_\lambda \circ g^{-1} : g(A) \to h_\lambda\big(i_\lambda(A)\big)$$

とおけば，これは λ に関わらず $0, 1, \infty$ を動かさない写像であり，また g, h_λ は一次変換であるので合成した写像は 1 対 1 となる．さらに，$\tilde{i}_\lambda(w_0)$ は固定した $w_0 \in g(A)$ に対して $\lambda \in \mathbb{D}$ に関して正則である．つまり h_λ は $i_\lambda(z_1), i_\lambda(z_2), i_\lambda(z_3)$ を $0, 1, \infty$ へ写す一次変換であるので，ある固定された $w_0 \in g(A)$, $z_0 = g^{-1}(w_0) \neq z_1, z_2, z_3$ に対して

$$\tilde{i}_\lambda(w_0) = \frac{i_\lambda(z_0) - i_\lambda(z_1)}{i_\lambda(z_0) - i_\lambda(z_3)} \cdot \frac{i_\lambda(z_2) - i_\lambda(z_3)}{i_\lambda(z_2) - i_\lambda(z_1)}$$

と表される．ここで λ を動かせば $i_\lambda(z_0)$, $i_\lambda(z_1)$, $i_\lambda(z_2)$, $i_\lambda(z_3)$ は一斉に動くが，いまこれらは λ に関して正則である．また , $z_0 = z_1, z_2, z_3$ の場合については，$z_0 = z_1$ のときは $\tilde{i}_\lambda$ は恒等的に 0, $z_0 = z_2$ のときは恒等的に 1 となるのでここでも正則である．さらに $z_0 = z_3$ の場合は恒等的に $\tilde{i}_\lambda(z_3) = \infty$ となるが，いま正則運動は $\widehat{\mathbb{C}}$ への写像として定義されているのでこの場合も我々の意味で正則であると言ってよい．すなわち任意の $w_0 \in g(A)$ に対して $\tilde{i}_\lambda(w_0)$ は λ に関して正則である．以上の考察から，最初の仮定は一般性を失わない．

A から 0,1,∞ でない任意の異なる 3 点 $x, y, z \in A$ を取る．これら 3 点に対し i を $\lambda \in \mathbb{D}$ の関数としてみたものをそれぞれ $x(\lambda) = i(\lambda, x)$, $y(\lambda) = i(\lambda, y)$, $z(\lambda) = i(\lambda, z)$ とおく．仮定よりこれらは正則である．

$\Omega = \widehat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$ とおく．Ω は双曲型リーマン面で双曲距離 d_Ω が定義される．定理 Ⅳ − 2.16 の双曲距離の縮小性により，$y \in A$ と $\mathbb{D}$ 内の 2 点 0, λ に対し

$$d_\Omega(y(\lambda), y(0)) \leqq d_{\mathbb{D}}(\lambda, 0) \tag{IV.13}$$

が成り立つ．λ を $|\lambda| \leqq R < 1$ とした場合，(IV.12) より $d_{\mathbb{D}}(\lambda, 0)$ は有界なので $d_\Omega(y(\lambda), y(0))$ も有界であり，$y(\lambda)$ か $y(0)$ のいずれか一方のみを $0, 1, \infty$ へ近づけると $d_\Omega(y(\lambda), y(0))$ も無限遠点へ近づく．これより 2 つのことがわかる．ひとつは，$|y(0)|$ が有界であると仮定すると $|y(\lambda)|$ も有界である．もうひとつは，$|y(0)|$ が十分小さければ $|y(\lambda)|$ も十分小さい．

さて，λ を $|\lambda| \leqq R < 1$ とする．$0 < m \leqq k(0, y) \leqq M < \pi/2$ (m, M は実数) を満たす y に対して，$k(x, y)$ が十分小さいと仮定しよう．このとき i_0 は恒等変換であるので $k(x(0), y(0))$ も十分小さく，$0 < m \leqq k(0, y) = k(0, y(0))$ より $k(x(0), y(0))/k(0, y(0))$ も十分小さい．すなわち $|(x(0) - y(0))/y(0)|$ も十分小さい．ここで正則関数 $g_1(\lambda) = (x(\lambda) - y(\lambda))/y(\lambda)$ は $0, 1, \infty$ を取らないので上述の双曲距離の縮小性により，$|\lambda| \leqq R < 1$ を満たす λ に対して $|g_1(0)|$ が十分小さいときは $|g_1(\lambda)|$ も十分小さい．従って $|(x(\lambda) - y(\lambda))/y(\lambda)|$ は十分小さくなり，すなわち $k(x(\lambda), y(\lambda))/k(0, y(\lambda))$ も十分小さい．$k(0, y(\lambda)) \leqq M < \pi/2$ であるので，結果として $k(x(\lambda), y(\lambda))$ は十分小さくなる．よって $|\lambda| \leqq R < 1$ を満たす λ に対し，i_λ は $A \cap \{z \mid m \leqq k(0, z) \leqq M\}$ で連続であり，$k(x(\lambda), y(\lambda))$ の評価は y を $A \cap \{z \mid m \leqq k(0, z) \leqq M\}$ 内で動かしても変わらないので i_λ は $A \cap \{z \mid m \leqq k(0, z) \leqq M\}$ で一様に連続である．同様の議論を $y \in \{m \leqq k(1, y) \leqq M\}$，$y \in \{m \leqq k(\infty, y) \leqq M\}$ に対してすればこれら 3 つの円環領域はリーマン球面全体を覆う．すなわち任意の $|\lambda| \leqq R < 1$ を満たす λ に対し i_λ は A 上で一様連続であり，一様性により $\overline{A}$ に連続的に拡張される．

また 0 と λ の役割を入れ替えることで類似の議論ができる，λ を上記と同様 $|\lambda| \leqq R < 1$ とする．$0 < m \leqq k(0, y(\lambda)) \leqq M < \pi/2$ を満たす y に対して $k(x(\lambda), y(\lambda))$ が十分小さいとき，$0 < m \leqq k(0, y(\lambda))$ より $k(x(\lambda), y(\lambda))/k(0, y(\lambda))$ も十分小さくなる．つまり $|x(\lambda) - y(\lambda)|/|y(\lambda)|$ も十分小さい．再び正則関数 $g_1(\lambda)$ を用いると双曲距離の縮小性により，$|\lambda| \leqq R < 1$ を満たす λ に対し $|g_1(\lambda)|$ が十分小さければ $|g_1(0)|$ も十分小さい，すなわち $|x(0) - y(0)|/|y(0)|$ も十分小さく，従って $k(x(0), y(0))/k(0, y(0))$ も十分小さい．$k(0, y(0)) \leqq M < \pi/2$ より $k(x, y) = k(x(0), y(0))$ は十分小さい．よって $|\lambda| \leqq R < 1$ を満たす λ に対し i_λ^{-1} は $i_\lambda(A) \cap \{z \mid m \leqq k(0, z) \leqq M\}$ で一様に連続である．同様の議論を $y \in \{m \leqq k(1, y(\lambda)) \leqq M\}$ と $y \in \{m \leqq k(\infty, y(\lambda)) \leqq M\}$ に対してすればこれら 3 つの円環領域はリーマン球面全体を覆い，すなわち $|\lambda| \leqq R < 1$ を満たす λ に対して i_λ^{-1} は $i_\lambda(A)$ 上で一様連続であり，一様性により連続性は $\overline{i_\lambda(A)}$ へ拡張される．以上の結果か

ら，$|\lambda| \leqq R < 1$ を満たす λ に対して $i_\lambda : \overline{A} \to \overline{i_\lambda(A)}$ は同相写像である．

$|\lambda| \leqq R < 1$ を満たす y に対して写像 i_λ の擬等角性を示す．これは円周歪曲率を用いて証明される．$|x-y| = |x-z| = \varepsilon$ を満たすような x, y, z に対し，$\lambda \in \mathbb{D}$ に関する関数 $g_2(\lambda) = \big(x(\lambda) - y(\lambda)\big)/\big(x(\lambda) - z(\lambda)\big)$ を考える．$g_2(\lambda)$ は $|\lambda| < 1$ で定義された $0, 1, \infty$ を取らない正則関数であるので前述の双曲距離の縮小性により，$|g_2(0)|$ は有限であることから $|g_2(\lambda)|$ は $|\lambda| \leqq R < 1$ に関して有界となる．$|g_2(\lambda)| < M$ とすると，上記の議論は任意の $|x-y| = |x-z| = \varepsilon$ を満たす x, y, z に対して成り立ち M は ε によらず，$x \in A$ にもよらない定数である．

以上の議論を球面距離に対してすれば，任意の $x \in A$ に対し一様に

$$\limsup_{\varepsilon' \to 0} \frac{\max_y\{k(x(\lambda_0), y(\lambda_0)) \mid k(x,y) = \varepsilon'\}}{\min_z\{k(x(\lambda_0), z(\lambda_0)) \mid k(x,z) = \varepsilon'\}} \ < \ M'$$

が成り立ち，定義 IV – 1.5 より i_{λ_0} は $\overline{A}$ 上の擬等角写像である．

残るは $i(\lambda, z)$ の連続性であるが，一般に $i(\lambda, z)$ がそれぞれ λ, z の関数として連続であることがいえても i の連続性はいえない．ここではまず正則関数族 $\{z(\lambda)\}_{z \in \overline{A}}$ の同程度連続性を示すことによって証明する．

$\mathcal{F} = \{z(\lambda)\}_{z \in \overline{A} - \{0,1,\infty\}}$ とすると任意の $z(\lambda) \in \mathcal{F}$ は $\mathbb{D}$ 上で $0, 1, \infty$ を取らない．なぜならば，$z(\lambda) = 0$ とすると $i_\lambda(z) = z(\lambda) = 0$ であり，1 対 1 写像 i_λ は 0 を不動点に持つので $z = 0$ となり $\mathcal{F}$ の定義に矛盾する．よって $z(\lambda) \neq 0$，同様にして $z(\lambda)$ は $1, \infty$ を取らない．$|\lambda_1 - \lambda_2|$ が十分小さいとき，$z(\lambda) \in \mathcal{F}$ に対して双曲距離の縮小性により (IV.13) と同様に

$$d_\Omega(z(\lambda_1), z(\lambda_2)) \leqq d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) \tag{IV.14}$$

が成り立つことから $|z(\lambda_1) - z(\lambda_2)|$ も十分小さくなる．この評価は $z \in \overline{A} - \{0, 1, \infty\}$ によらない，すなわち (IV.14) は任意の $z \in \overline{A} - \{0, 1, \infty\}$ に対して成り立ち，よって $\mathcal{F}$ は同程度連続である．$\{z(\lambda)\}_{z \in \overline{A}}$ は $0, 1, \infty \in A$ に対応する定数関数 $0(\lambda)$, $1(\lambda)$, $\infty(\lambda)$ を関数族 $\mathcal{F}$ に加えたものであるから，$\{z(\lambda)\}_{z \in \overline{A}}$ は同程度連続である．

以上を用いて任意の固定した $(\lambda_0, z_0) \in \mathbb{D} \times \overline{A}$ における $i(\lambda, z)$ の連続性を示そう．まず任意の $\varepsilon > 0$ を取る．すると $\varepsilon/2$ に対してある z_0 の近傍 $U_1(z_0)$ が存在し，$i_{\lambda_0}(z)$ の連続性から任意の $z \in U_1(z_0)$ に対して

$$|i(\lambda_0, z) - i(\lambda_0, z_0)| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．同様に $\varepsilon/2$ に対してある λ_0 の近傍 $U_2(\lambda_0)$ が存在し，$z_0(\lambda)$ の連続性から任意の $\lambda \in U_2(\lambda_0)$ に対して

$$|i(\lambda, z_0) - i(\lambda_0, z_0)| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．ここで先の同程度連続性によりこの評価は z が動いても成り立つことに注意する．すなわち

$$|i(\lambda, z) - i(\lambda_0, z)| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．

まとめると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon/2$ によって決まる λ_0 の近傍 $U_1(\lambda_0)$ と z_0 の近傍 $U_2(z_0)$ との直積 $U_\varepsilon(\lambda_0, z_0) = U_1(\lambda_0) \times U_2(z_0)$ が存在して，任意の $(\lambda, z) \in U_\varepsilon(\lambda_0, z_0)$ に対して

$$|i(\lambda, z) - i(\lambda_0, z_0)| \ \leqq \ |i(\lambda, z) - i(\lambda_0, z)| + |i(\lambda_0, z) - i(\lambda_0, z_0)| \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon$$

が成り立ち，よって $i(\lambda, z)$ は (λ_0, z_0) において連続である．$\square$

関連図書

[1] 今吉洋一・谷口雅彦, タイヒミュラー空間論（新版）, 日本評論社, 2004.

[2] 伊藤清三, ルベーグ積分論入門, 裳華房, 1963.

[3] O. Lehto and K.I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[4] R. Mañé, P. Sad and D. Sullivan, *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **16** (1983), 193–217.

[5] 志賀啓成, 複素解析学 II, 培風館, 1999.

[6] 須川敏幸, 擬等角写像入門, 数学セミナー vol.42, no.3/498, 日本評論社 (2003), 27–33.

[7] 谷口雅彦, フラクタル曲線についての解析学　擬等角写像外伝, 培風館, 2004.

[8] 谷口雅彦・奥村善英, 双曲幾何学への招待　複素数で視る, 培風館, 1996.