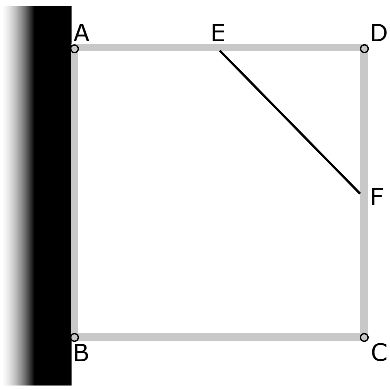
期末試験 1　(x, y) 平面内に 2 つの定点 A，B があり，それぞれの x 座標を a，b とする．A と B を結ぶ曲線のうち，長さ $I = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$ が最小となるのは直線であることを示せ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ である．

期末試験 2　図のように，4 本の一様な等しい棒を蝶番でなめらかに連結し，AB を鉛直に保って固定する．AD の中点 E と CD の中点 F とを糸でつなぐことで，全体で正方形を形成させる．糸の張力を求めよ．



期末試験 3　バネ（バネ定数 k）の一端を平らな鉛直壁に固定し，もう一端に質点（質量 M）を取り付けてなめらかな水平面上に置く．質点は壁と垂直な方向にのみ動く．質点の位置を x で表すとき，この運動のラグランジアン $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ を求めよ．ただし，x の原点はバネの自然長の位置とせよ．

期末試験 4　ラグランジアンが $\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \dfrac{1}{2}M\dot{x}^2 - U(x)$ と表される運動について，一般化運動量を p で表すとき，ハミルトニアン $\mathcal{H}(x,p)$ を求めよ．

期末試験 5　質点 A（質量 M_{A}）と質点 B（質量 M_{B}）が水平な同一直線上にあり，A の位置を x_{A}，B の位置を x_{B} で表す．質点間には相互位置のみに依存する保存力が加わっており，その位置エネルギーを $U(x_{\mathsf{A}}-x_{\mathsf{B}})$ とする．このとき，x_{A} と x_{B} を一般化座標とするラグランジアンは $\mathcal{L}(x_{\mathsf{A}},x_{\mathsf{B}}) = \dfrac{1}{2}M_{\mathsf{A}}\dot{x}_{\mathsf{A}}^2+\dfrac{1}{2}M_{\mathsf{B}}\dot{x}_{\mathsf{B}}^2-U(x_{\mathsf{A}}-x_{\mathsf{B}})$ で表される．$x = x_{\mathsf{A}} - x_{\mathsf{B}}$，$X = \dfrac{M_{\mathsf{A}}x_{\mathsf{A}} + M_{\mathsf{B}}x_{\mathsf{B}}}{M_{\mathsf{A}} + M_{\mathsf{B}}}$ として，次の問いに答えよ．

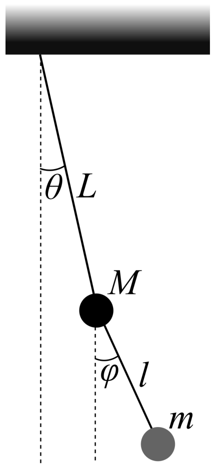
(1)　$x_{\mathsf{A}} = X + \dfrac{M_{\mathsf{B}}}{M_{\mathsf{A}}+M_{\mathsf{B}}}x$，$x_{\mathsf{B}} = X - \dfrac{M_{\mathsf{A}}}{M_{\mathsf{A}}+M_{\mathsf{B}}}x$ であることを示せ．

(2)　x と X を一般化座標とするラグランジアン $\mathcal{L}(x,X,\dot{x},\dot{X})$ を求めよ．

(3)　質量中心の速度 $\dot{X}$ は一定であることを示せ．

期末試験 6　天井に一端を固定した長さ L の棒に質点 1（質量 M）を取り付け，鉛直線からの角度を θ で表す．さらに，質点 1 に長さ l の棒で質点 2（質量 m）を取り付け，鉛直線からの角度を φ で表す．質点の運動について，次の問いに答えよ．ただし，位置エネルギーの基準は天井の高さとし，重力加速度は g を用いよ．

(1) 質点 1 の位置エネルギーを，g，L，M，θ を用いて表せ．
(2) 質点 1 の運動エネルギーを，L，M，$\dot{\theta}$ を用いて表せ．
(3) 質点 2 の位置エネルギーを求めよ．
(4) 質点 2 の運動エネルギーを求めよ．なお，棒と天井との接触点を原点として水平右方向および鉛直下向きをそれぞれ正とする x-y 平面では，質点 2 の位置 (x_2, y_2) は $x_2 = L\sin\theta + l\sin\varphi$，$y_2 = L\cos\theta + l\cos\varphi$ と書ける．
(5) ラグランジアン $\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ を求めよ．



【このページは空白です】

期末試験 1　(x, y) 平面内に 2 つの定点 A，B があり，それぞれの x 座標を a，b とする．A と B を結ぶ曲線のうち，長さ $I = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$ が最小となるのは直線であることを示せ．ただし，$y' = \frac{dy}{dx}$ である．

求めたいのは $\delta I=0$ となる y.

オイラーの微分方程式より

$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$　ここで $f=\sqrt{1+(y')^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ なので

$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)=0$　∴ $\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=C$ (Cは定数)

y'について解くと $y'^2=C^2(1+y'^2)$　∴ $y'^2=\frac{C^2}{1-C^2}$

ここで $\frac{C^2}{1-C^2}=D^2$ (Dは定数) とおくと $y'=D$

よって $y=Dx+E$ (Eは定数) より

題意は示された.

期末試験 2　図のように，4 本の一様な等しい棒を蝶番でなめらかに連結し，AB を鉛直に保って固定する．AD の中点 E と CD の中点 F とを糸でつなぐことで，全体で正方形を形成させる．糸の張力を求めよ．

ADが時計まわりに $\delta\theta$ 回転するとすると，張力がする仮想仕事は

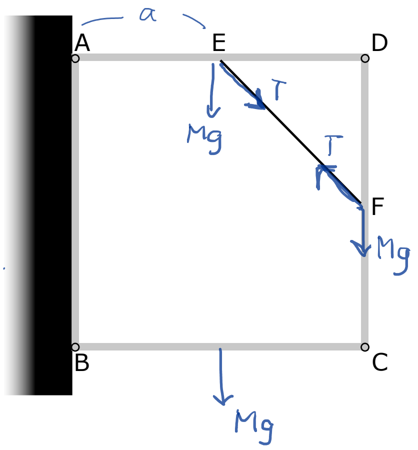
$\delta W_T = \frac{1}{\sqrt{2}}T\cdot a\delta\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}T\cdot 2a\delta\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}Ta\delta\theta$.

重力がする仮想仕事は 棒の質量をM，重力加速度をgとして

$\delta W_G = Mg\,a\delta\theta + Mg\cdot 2a\delta\theta + Mg\cdot a\delta\theta = 4Mg\,a\cdot\delta\theta$.

仮想仕事の原理より　$\delta W_T + \delta W_G = 0$

∴　$T = 4\sqrt{2}Mg$ //



期末試験 3　バネ（バネ定数 k）の一端を平らな鉛直壁に固定し，もう一端に質点（質量 M）を取り付けてなめらかな水平面上に置く．質点は壁と垂直な方向にのみ動く．質点の位置を x で表すとき，この運動のラグランジアン $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ を求めよ．ただし，x の原点はバネの自然長の位置とせよ．

$K=\frac{1}{2}M\dot{x}^2$，$U=\frac{1}{2}kx^2$

∴ $\mathcal{L}=\frac{1}{2}M\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$ //

期末試験 4　ラグランジアンが $\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - U(x)$ と表される運動について，一般化運動量を p で表すとき，ハミルトニアン $\mathcal{H}(x,p)$ を求めよ．

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{p}{M}$$

$$\mathcal{H} = \dot{x}p - \mathcal{L} = \frac{p^2}{M} - \left\{\frac{1}{2}M\left(\frac{p}{M}\right)^2 - U\right\}$$

$$\therefore \mathcal{H}(x,p) = \underline{\underline{\frac{p^2}{2M} + U(x)}}$$ //

期末試験 5　質点 A（質量 M_{A}）と質点 B（質量 M_{B}）が水平な同一直線上にあり，A の位置を x_{A}，B の位置を x_{B} で表す．質点間には相互位置のみに依存する保存力が加わっており，その位置エネルギーを $U(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}})$ とする．このとき，x_{A} と x_{B} を一般化座標とするラグランジアンは $\mathcal{L}(x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}) = \frac{1}{2}M_{\mathrm{A}}\dot{x}_{\mathrm{A}}^2 + \frac{1}{2}M_{\mathrm{B}}\dot{x}_{\mathrm{B}}^2 - U(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}})$ で表される．$x = x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}}$，$X = \dfrac{M_{\mathrm{A}}x_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}}x_{\mathrm{B}}}{M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}}}$ として，次の問いに答えよ．

(1)　$x_{\mathrm{A}} = X + \dfrac{M_{\mathrm{B}}}{M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}}}x$，$x_{\mathrm{B}} = X - \dfrac{M_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}}}x$ であることを示せ．
(2)　x と X を一般化座標とするラグランジアン $\mathcal{L}(x, X, \dot{x}, \dot{X})$ を求めよ．
(3)　質量中心の速度 $\dot{X}$ は一定であることを示せ．

(1) $\dfrac{M_A}{M_A+M_B} = m_A$, $\dfrac{M_B}{M_A+M_B} = m_B$ とおくと，$X = m_A x_A + m_B x_B$ …①

$x = x_A - x_B$ に m_B をかけて①と足すと $m_B x + X = (m_A + m_B)x_A$

$m_A + m_B = 1$ を踏まえると $x_A = X + \dfrac{M_B}{M_A+M_B}x$.

$$x_B = x_A - x = X + \frac{M_B}{M_A+M_B}x - \frac{M_A+M_B}{M_A+M_B}x = X - \frac{M_A}{M_A+M_B}x.$$ ■

(2)
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M_A(\dot{X} + m_B\dot{x})^2 + \frac{1}{2}M_B(\dot{X} - m_A\dot{x})^2 - U(x)$$

$$= \frac{1}{2}(M_A + M_B)\dot{X}^2 + (M_A m_B - M_B m_A)\dot{X}\dot{x} + \frac{1}{2}(M_A m_B^2 + M_B m_A^2)\dot{x}^2 - U(x)$$

$M_A m_B - M_B m_A = 0$, $M_A m_B^2 + M_B m_A^2 = \dfrac{M_A M_B}{M_A + M_B}\left(= \dfrac{1}{M_A} + \dfrac{1}{M_B}\right)$ より

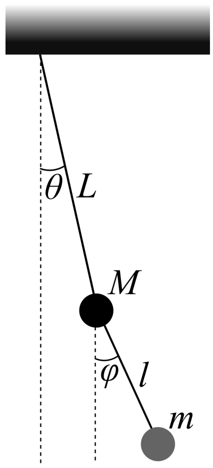
$$\mathcal{L}(x, X, \dot{x}, \dot{X}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(M_A + M_B)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\frac{M_A M_B}{M_A + M_B}\dot{x}^2 - U(x)}}$$ //

(3) ラグランジュの運動方程式より $\dfrac{d}{dt}\left((M_A + M_B)\dot{X}\right) = 0$.

よって　$(M_A + M_B)\dot{X} = C$　(C は定数)　なので $\dot{X}$ は一定. ■

期末試験 6　天井に一端を固定した長さ L の棒に質点 1（質量 M）を取り付け，鉛直線からの角度を θ で表す．さらに，質点 1 に長さ l の棒で質点 2（質量 m）を取り付け，鉛直線からの角度を φ で表す．質点の運動について，次の問いに答えよ．ただし，位置エネルギーの基準は天井の高さとし，重力加速度は g を用いよ．

(1) 質点 1 の位置エネルギーを，g，L，M，θ を用いて表せ．
(2) 質点 1 の運動エネルギーを，L，M，$\dot{\theta}$ を用いて表せ．
(3) 質点 2 の位置エネルギーを求めよ．
(4) 質点 2 の運動エネルギーを求めよ．なお，棒と天井との接触点を原点として水平右方向および鉛直下向きをそれぞれ正とする x-y 平面では，質点 2 の位置 (x_2, y_2) は $x_2 = L\sin\theta + l\sin\varphi$, $y_2 = L\cos\theta + l\cos\varphi$ と書ける．
(5) ラグランジアン $\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ を求めよ．



(1) $U_1 = \underline{\underline{-MgL\cos\theta}}$ //　(2) $K_1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2}}$ //

(3) $U_2 = \underline{\underline{-mg(L\cos\theta + l\cos\varphi)}}$ //

(4) $K_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$

$\dot{x}_2 = L\cos\theta\cdot\dot{\theta} + l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$ より

$\dot{x}_2^2 = L^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2lL\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + l^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2$

同様に　$\dot{y}_2^2 = L^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2lL\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + l^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2$

よって　$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = L^2\dot{\theta}^2 + 2lL(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2$

$= L^2\dot{\theta}^2 + 2lL\cos(\theta-\varphi)\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2$

以上より　$K_2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mlL\cos(\theta-\varphi)\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2}}$ //

(5) $\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(M+m)L^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mlL\cos(\theta-\varphi)\,\dot{\theta}\dot{\varphi}}}$

$\underline{\underline{+ MgL\cos\theta + mgL\cos\theta + mgl\cos\varphi}}$ //

【このページは空白です】