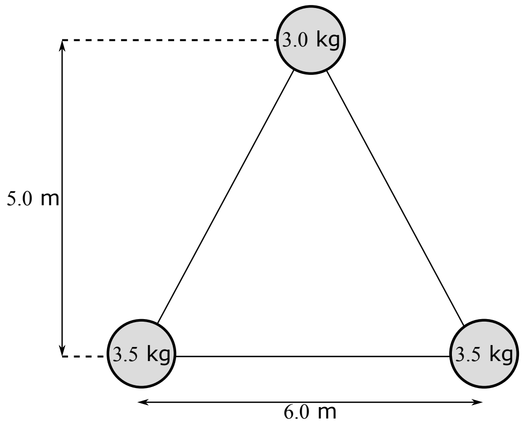
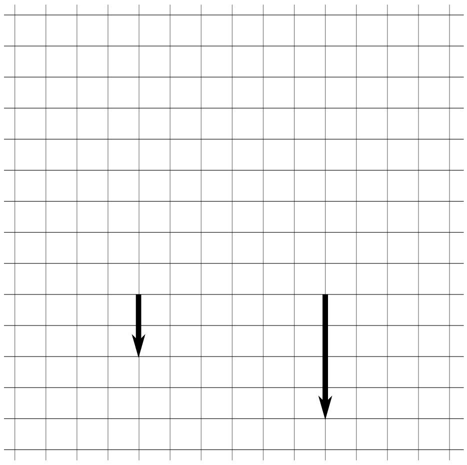
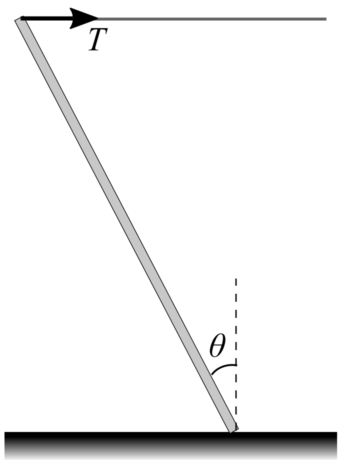
中間試験 1　底辺が 6.0 m，高さが 5.0 m の二等辺三角形の頂点に，図のように質点が配置されている．この質点系の質量中心の位置を求めよ．座標軸は各自で設定し，回答中に明記すること．



中間試験 2　作用線が互いに平行な 2 つの力を 1 つの力に合成する方法を，図を用いて説明せよ．

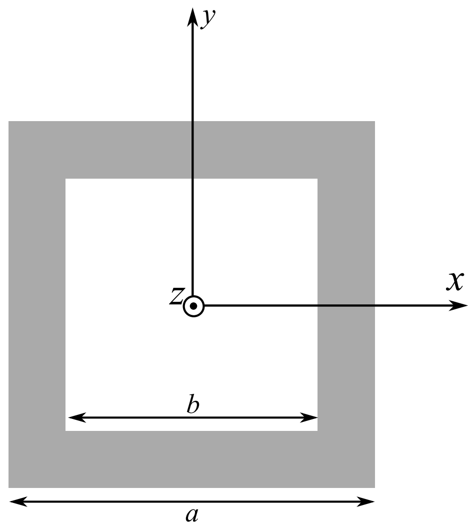


中間試験 3　質量 M の一様な棒が，糸で水平方向に引っ張られることで，鉛直方向から角 θ 傾いて静止している．糸の張力 T を求めよ．ただし，重力加速度は g とせよ．



中間試験 4　3.0 kg の剛体について，質量中心を通る軸 A のまわりの慣性モーメントを測定したら 8.0 kg·m^2 であった．軸 A と平行で水平方向に 2.0 m 離れた軸 B を回転中心として，5.0 N·m の力のモーメントが加わる．このとき，時刻 t での軸 B のまわりの角速度を求めよ．ただし，初期角速度を -3 rad/s とする．

中間試験 5　辺の長さが a の一様な正方形板がある．この板の中心部分を，辺の長さが b の正方形でくり抜くことで，幅が $(a-b)/2$ の枠型の物体を作製した（図）．この物体の質量が M であるとき，質量中心を通り面に垂直な軸（z 軸）についての慣性モーメントを求めよ．ただし，質量 m，辺の長さが h である正方形板について，質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\dfrac{mh^2}{6}$ である．



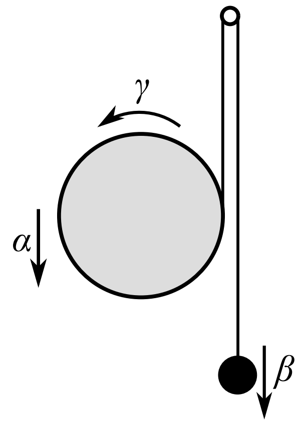
中間試験 6　円板（質量 M，半径 a）のまわりに質量の無視できる糸を巻きつけ，糸のほどけた部分を釘にかけ，端に質点（質量 m）をつるす（図）．この釘は水平に打ち込まれて固定されており，糸との摩擦力は無視できる．円板の質量中心の加速度を α，円板の角加速度を γ，質点の加速度を β，糸の張力を T として，次の問いに答えよ．ただし，円板の質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $I_M = \dfrac{1}{2}a^2M$ である．また，重力加速度を g とし，角速度と角加速度は図に示されている向きを正の方向とせよ．

(1)　円板の並進運動と回転運動について，それぞれの運動方程式を記せ．

(2)　α，β，γ，a の間に成り立つ関係式を記せ．

(3)　$\beta = \dfrac{3m - M}{3m + M}g$ を示せ．

(4)　円板と質点の加速度が等しくなるための条件を求めよ．また，そのときの加速度を求めよ．



中間試験 7　あらい水平床に球（質量 M，半径 a）が静止している．この球を，中心を通る鉛直面内で床からの高さが $a+h$ の場所を力積 $\overline{F}$ の撃力で水平に突く．球の運動に関して次の問いに答えよ．ただし，球の質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメントは $I_M = \dfrac{2}{5}a^2 M$ である．また，球と床の間の動摩擦係数を μ'，重力加速度を g とし，速度と角速度は図に示されている向きを正の方向とせよ．

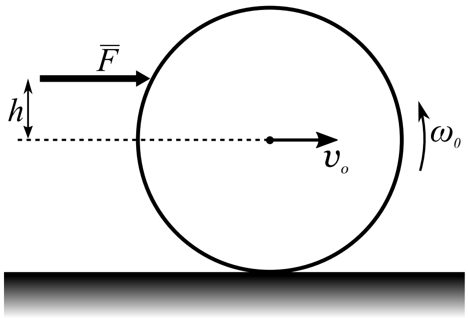
(1) 突いた直後の球の質量中心の速度を v_0 とする．v_0 を，M，$\overline{F}$ を用いて表せ．

(2) 突いた直後の球の質量中心まわりの角速度を ω_0 とする．ω_0 を，a，h，M，$\overline{F}$ を用いて表せ．

(3) 突いた瞬間から球がすべらずに転がるような高さを H とする．H を a を用いて表せ．

(4) $0 < h < H$ の高さを突くと，球はすべりながら転がり，動摩擦力が進行方向と逆向きにはたらく．突いてから時間 t 後の球の速度 $v(t)$ と，質量中心まわりの角速度 $\omega(t)$ を求めよ．それぞれ，μ'，ω_0，a，g，t，v_0 のいずれかを用いて表すこと．

(5) 前問におけるすべりの速度は $v(t) + a\omega(t)$ で表される．このことを踏まえて，すべりがなくなるまでの時間を，μ'，a，$\overline{F}$，g，h，M を用いて表せ．

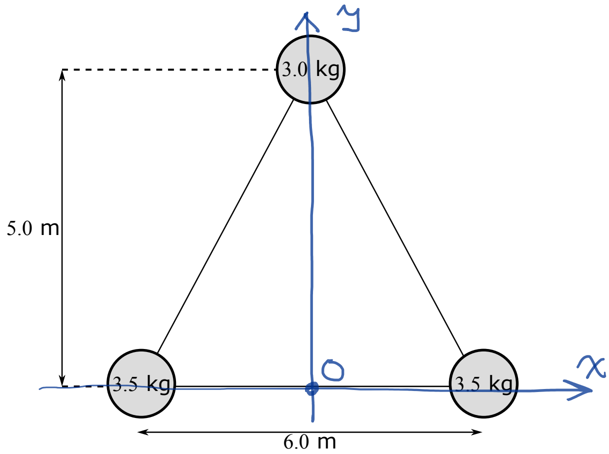


中間試験 1　底辺が 6.0 m，高さが 5.0 m の二等辺三角形の頂点に，図のように質点が配置されている．この質点系の質量中心の位置を求めよ．座標軸は各自で設定し，回答中に明記すること．

右図のように座標軸を定める。

$$x_M = \frac{-3.0\times 3.5 + 0\times 3.0 + 3.0\times 3.5}{3.5+3.0+3.5} = 0$$

$$y_M = \frac{0\times 3.5 + 0\times 3.5 + 5.0\times 3.0}{3.5+3.5+3.0} = 1.5$$



答　(0 m, 1.5 m)

※ 座標軸の取り方で答は変わる。

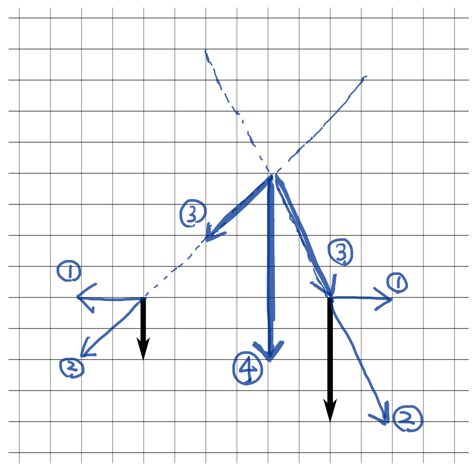
中間試験 2　作用線が互いに平行な 2 つの力を 1 つの力に合成する方法を，図を用いて説明せよ．

① 仮想的な力の組（合力 0）を考える。

② 元の力と仮想的な力との合力をとる。

③ ②で得られた合力のそれぞれの作用線の交点に力を移動する
（作用線の定理により動かせる）

④ ③の力の合力が元の平行な2つの力の合力となる



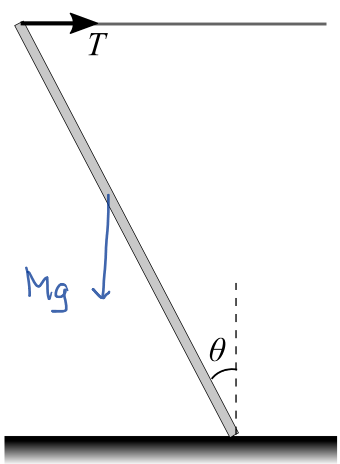
中間試験 3　質量 M の一様な棒が，糸で水平方向に引っ張られることで，鉛直方向から角 θ 傾いて静止している．糸の張力 T を求めよ．ただし，重力加速度は g とせよ．

棒は回転していないので，力のモーメントのつりあいより

$$\frac{1}{2}L\,Mg\sin\theta - LT\cos\theta = 0$$

（L は棒の長さ）

答　$T = \frac{1}{2}Mg\cos\theta$



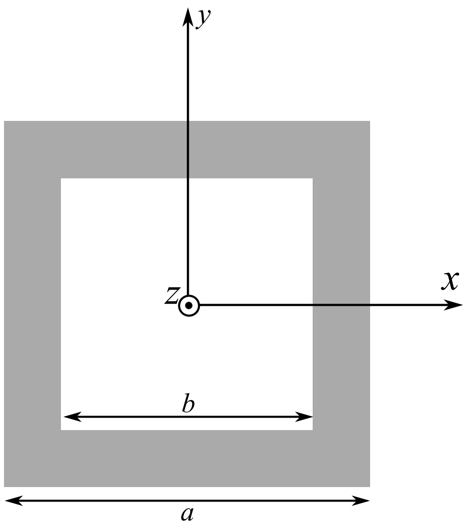
中間試験 4　3.0 kg の剛体について，質量中心を通る軸 A のまわりの慣性モーメントを測定したら 8.0 kg·m^2 であった．軸 A と平行で水平方向に 2.0 m 離れた軸 B を回転中心として，5.0 N·m の力のモーメントが加わる．このとき，時刻 t での軸 B のまわりの角速度を求めよ．ただし，初期角速度を − 3 rad/s とする．

平行軸の定理より $I_B = I_A + Mh^2 = 8.0 + 3.0 \times 2.0^2 = 20.0$ kg·m^2.

よって $\frac{d\omega}{dt} = \frac{5.0}{20.0} = 0.25$.

∴ $\omega = \underline{\underline{0.25t - 3 \ [\mathrm{rad/s}]}}$ //

中間試験 5　辺の長さが a の一様な正方形板がある．この板の中心部分を，辺の長さが b の正方形でくり抜くことで，幅が $(a-b)/2$ の枠型の物体を作製した（図）．この物体の質量が M であるとき，質量中心を通り面に垂直な軸（z 軸）についての慣性モーメントを求めよ．ただし，質量 m，辺の長さが h である正方形板について，質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{mh^2}{6}$ である．



面密度 $\sigma = \frac{M}{a^2 - b^2}$.

一辺が a の正方形の，中心まわりの慣性モーメントは

$$I_a = \frac{1}{6} M_a a^2 = \frac{1}{6} \frac{a^2}{a^2 - b^2} M a^2.$$

（ここで $\sigma = \frac{M_a}{a^2} = \frac{M}{a^2 - b^2}$ を用いた）

同様に，一辺が b の正方形については

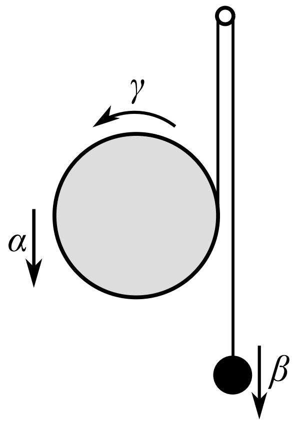
$$I_b = \frac{1}{6} \frac{b^2}{a^2 - b^2} M b^2.$$

よって求める慣性モーメントは

$$I = I_a - I_b = \frac{1}{6} \frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2} M = \underline{\underline{\frac{1}{6}(a^2 + b^2) M}}$$ //

中間試験 6　円板（質量 M，半径 a）のまわりに質量の無視できる糸を巻きつけ，糸のほどけた部分を釘にかけ，端に質点（質量 m）をつるす（図）．この釘は水平に打ち込まれて固定されており，糸との摩擦力は無視できる．円板の質量中心の加速度を α，円板の角加速度を γ，質点の加速度を β，糸の張力を T として，次の問いに答えよ．ただし，円板の質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $I_M = \frac{1}{2}a^2M$ である．また，重力加速度を g とし，角速度と角加速度は図に示されている向きを正の方向とせよ．

(1)　円板の並進運動と回転運動について，それぞれの運動方程式を記せ．
(2)　α，β，γ，a の間に成り立つ関係式を記せ．
(3)　$\beta = \dfrac{3m-M}{3m+M}g$ を示せ．
(4)　円板と質点の加速度が等しくなるための条件を求めよ．また，そのときの加速度を求めよ．



(1)　$\underline{\underline{M\alpha = Mg - T}}$ …①，$\underline{\underline{\frac{1}{2}a^2M\gamma = aT}}$ …②

(2)　動く質点から見た円板の速度は $v_{円} - v_{質}$.
回転との関係から，$v_{円} - v_{質} = a\omega$
両辺を微分することで $\alpha - (-\beta) = a\gamma$　∴ $\underline{\underline{\alpha + \beta = a\gamma}}$ …③

(3)　質点の運動方程式は $m\beta = mg - T$ …④
②より $\frac{M}{2}(a\gamma) = T \Leftrightarrow \frac{M}{2}(\alpha+\beta) = T$ …⑤
①と④より，$Mm(\alpha+\beta) = 2Mmg - (M+m)T$ …⑥
⑤と⑥より，$\left\{m + \frac{1}{2}(M+m)\right\}T = Mmg$　∴ $T = \frac{2mM}{3m+M}g$
よって④より，$\beta = g - \frac{2mM}{3m+M}g = \frac{3m-M}{3m+M}g$ ■

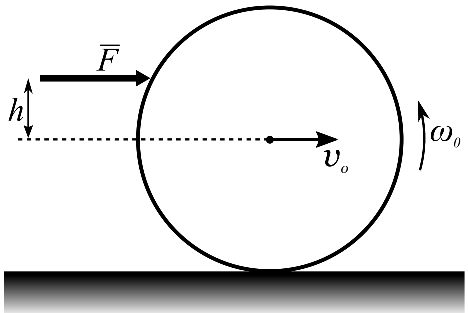
(4)　①より $\alpha = g - \frac{T}{M} = \frac{m+M}{3m+M}g$.
よって $\alpha = \beta \Leftrightarrow m+M = 3m-M \Leftrightarrow \underline{\underline{m=M \text{ のとき}}}$
このとき $\alpha = \beta = \underline{\underline{\frac{1}{2}g}}$ //

中間試験 7 あらい水平床に球（質量 M，半径 a）が静止している．この球を，中心を通る鉛直面内で床からの高さが $a+h$ の場所を力積 $\overline{F}$ の撃力で水平に突く．球の運動に関して次の問いに答えよ．ただし，球の質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメントは $I_M = \frac{2}{5}a^2M$ である．また，球と床の間の動摩擦係数を μ'，重力加速度を g とし，速度と角速度は図に示されている向きを正の方向とせよ．

(1) 突いた直後の球の質量中心の速度を v_0 とする．v_0 を，M，$\overline{F}$ を用いて表せ．
(2) 突いた直後の球の質量中心まわりの角速度を ω_0 とする．ω_0 を，a，h，M，$\overline{F}$ を用いて表せ．
(3) 突いた瞬間から球がすべらずに転がるような高さを H とする．H を a を用いて表せ．
(4) $0 < h < H$ の高さを突くと，球はすべりながら転がり，動摩擦力が進行方向と逆向きにはたらく．突いてから時間 t 後の球の速度 $v(t)$ と，質量中心まわりの角速度 $\omega(t)$ を求めよ．それぞれ，μ'，ω_0，a，g，t，v_0 のいずれかを用いて表すこと．
(5) 前問におけるすべりの速度は $v(t) + a\omega(t)$ で表される．このことを踏まえて，すべりがなくなるまでの時間を，μ'，a，$\overline{F}$，g，h，M を用いて表せ．

(1) $M v_0 = \overline{F}$ ∴ $v_0 = \dfrac{\overline{F}}{M}$

(2) $\frac{2}{5}a^2 M \omega_0 = -h\overline{F}$ ∴ $\omega_0 = -\dfrac{5h\overline{F}}{2a^2M}$

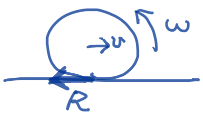


(3) $h = H$ のとき $v_0 + a\omega_0 = 0$

つまり $\dfrac{\overline{F}}{M} - a\dfrac{5H\overline{F}}{2a^2M} = 0$ ∴ $H = \dfrac{2}{5}a$

(4) $R = -\mu' M g$ より，右図を踏まえると運動方程式は

$$\begin{cases} M\dfrac{dv}{dt} = -\mu' M g \\ \dfrac{2}{5}a^2M\dfrac{d\omega}{dt} = -a\mu' M g \end{cases} \quad ∴ \quad \begin{cases} v = -\mu' g t + v_0 \\ \omega = -\dfrac{5\mu' g}{2a}t + \omega_0 \end{cases} 〃$$



(5)
$$v + a\omega = -\mu' g t + \frac{\overline{F}}{M} - \frac{5}{2}\mu' g t + \left(-\frac{5h\overline{F}}{2aM}\right)$$
$$= -\frac{7}{2}\mu' g t + \frac{(2a-5h)\overline{F}}{2aM}$$

$v + a\omega = 0$ となる時間を T とおくと

$$T = \frac{2}{7\mu' g} \times \frac{(2a-5h)\overline{F}}{2aM} = \frac{(2a-5h)\overline{F}}{7a\mu' g M} 〃$$