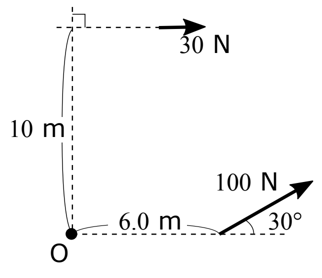
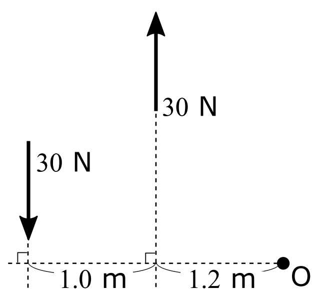
物理学Ｉ (2017 年度：鳴海)　　番号:　　名前:

期末試験 1　$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 5xy\boldsymbol{i} + 2x^3\boldsymbol{j}$（ただし $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ はそれぞれ x 方向と y 方向を向く単位ベクトル）について，x-y 平面上で $y = x^3$ を通り原点から点 $(2, 8)$ に至る経路 C について，仕事 $W = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

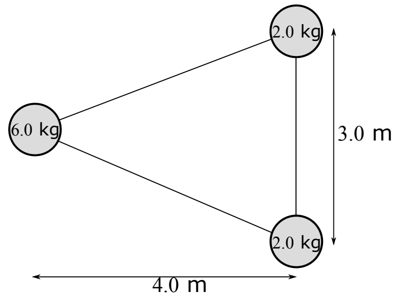
期末試験 2　保存力 $F(x) = -4x^3 + 8x$ が加わる質点の運動を考える．質点の初期位置 x_0 が，(i) $0 < x_0 < 2$ のときと，(ii) $x_0 > 2$ のときについて，質点がどのような運動をするかそれぞれ簡潔に説明せよ．ただし，いずれの場合も初速度は 0 とする．

期末試験 3　以下のそれぞれについて点 O を中心とする力のモーメントを求めよ．ただし，紙面手前方向を z 方向とし，z 方向を向く単位ベクトルを $\boldsymbol{k}$ として答えを表しなさい．





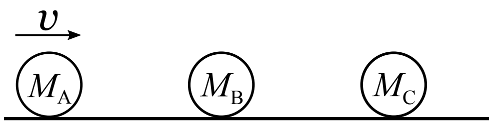
期末試験 4　二等辺三角形（底辺 3.0 m，高さ 4.0 m）の各頂点に，6.0 kg と 2.0 kg の質点が合計で 3 つある．この 3 質点系の質量中心の位置を求めよ．ただし，座標軸は各自で設定して回答中に明記しなさい．



期末試験 5　質量 M_{A}，M_{B}，M_{C} の 3 つの質点 A，B，C が，なめらかな水平面上でこの順に一直線に並んで静止している．いま，A が速さ v で B に衝突すると，次に B が C と衝突する．A と B の衝突におけるはねかえり係数を e_1，B と C の衝突におけるはねかえり係数を e_2 として，次の問いに答えよ．

(1)　1 回目の衝突後の A の速度 v_{A} を，M_{A}，M_{B}，e_1，v を用いて表せ．

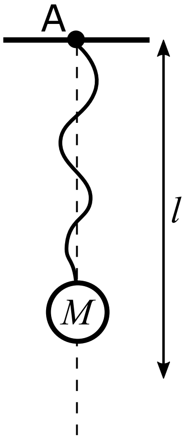
(2)　2 回目の衝突後の C の速度 v_{C} を，M_{A}，M_{B}，M_{C}，e_1，e_2，v を用いて表せ．



期末試験 6　点 A に自然長 l のゴムひもの一端を固定し，もう一端に質量 M の質点を取り付ける．質点を点 A から静かに落下させるときの運動について，次の問いに答えよ．なお，ゴムひもは，自然長より短いとき（図）は質点に力を及ぼさないが，自然長より長いときはバネ定数 k のバネとして質点に力を及ぼすものとする．また，空気抵抗は無視し，重力加速度は g とせよ．

(1)　点 A から l だけ落下したときの質点の速さを，l と g を用いて表せ．

(2)　地面から点 A までの高さを H とする．質点が地面に衝突しないような H の条件（不等式）を求めよ．



期末試験 7　荷電粒子にはたらく力は，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を用いて $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ と書ける．いま，z 方向を向く微小磁場中での荷電粒子（質量 M，電気量 q）の運動を，地面に固定されたデカルト座標系 (x, y, z) と，z 軸のまわりに一定の微小角速度 ω で回転するデカルト座標系 (x', y', z) とで観測するとき，次の問いに答えよ．

(1) 固定座標系での速度を $\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ で表す．このとき，荷電粒子にはたらく力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ について，F_x と F_y を求めよ．磁場は z 方向を向いているので $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ と書けることに注意せよ．

(2) 回転座標系での速度を $\boldsymbol{v} = (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z})$，加速度を $\boldsymbol{a} = (\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z})$ で表す．このとき，荷電粒子の x' 方向と y' 方向の運動方程式を書け．なお，ω^2 や ωB を含む項は微小量として無視して構わない．また，回転角 $\varphi = \omega t$ に対して $x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$，$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$ は既知とせよ．

(3) 角速度 ω がある値のとき，荷電粒子は回転座標系で静止する．この角速度 ω_{L} を求めよ．

解答例

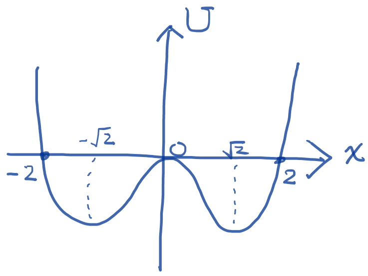
期末試験 1　$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 5xy\boldsymbol{i} + 2x^3\boldsymbol{j}$（ただし $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ はそれぞれ x 方向と y 方向を向く単位ベクトル）について，x-y 平面上で $y = x^3$ を通り原点から点 $(2, 8)$ に至る経路 C について，仕事 $W = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

$$W = \int_C (5xy\,\boldsymbol{i} + 2x^3\boldsymbol{j}) \cdot (dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j})$$
$$= \int_C (5xy\,dx + 2x^3 dy)$$
$$= \int_0^2 5x^4 dx + \int_0^8 2y\,dy$$
$$= \left[x^5\right]_0^2 + \left[y^2\right]_0^8$$
$$= 32 + 64 = \underline{\underline{96}}$$

期末試験 2　保存力 $F(x) = -4x^3 + 8x$ が加わる質点の運動を考える．質点の初期位置 x_0 が，(i) $0 < x_0 < 2$ のときと，(ii) $x_0 > 2$ のときについて，質点がどのような運動をするかそれぞれ簡潔に説明せよ．ただし，いずれの場合も初速度は 0 とする．

F(x) に対応する位置エネルギー U(x) は　$U(x) = x^4 - 4x^2$.

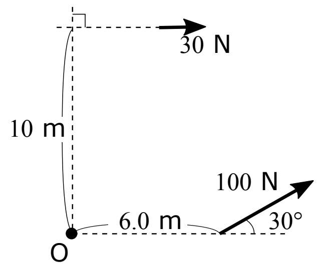
U(x) は右のようなグラフになる．

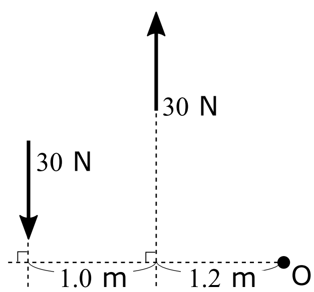


(i) $0 < x_0 < 2$ のときは右側の谷から抜けられないので $0 < x < 2$ の領域内で振動する．

(ii) $x_0 > 2$ のときは谷を越えるエネルギーを有しているので $-x_0 < x < x_0$ で振動する．

期末試験 3　以下のそれぞれについて点 O を中心とする力のモーメントを求めよ．ただし，紙面手前方向を z 方向とし，z 方向を向く単位ベクトルを $\boldsymbol{k}$ として答えを表しなさい．





$(-10 \cdot 30 + 6.0 \cdot 100 \cdot \sin 30^\circ)\,\mathbb{k}$

$= 0$

$(-1.2 \times 30 + 2.2 \times 30)\,\mathbb{k}$

$= 30\,\mathbb{k}\ [\mathrm{N \cdot m}]$

期末試験 4　二等辺三角形（底辺 3.0 m，高さ 4.0 m）の各頂点に，6.0 kg と 2.0 kg の質点が合計で 3 つある．この 3 質点系の質量中心の位置を求めよ．ただし，座標軸は各自で設定して回答中に明記しなさい．

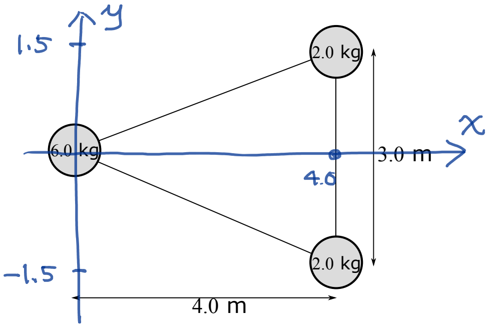
6.0kg の質点を原点とする右図のような座標軸を考える。

このとき，

$$x_M = \frac{0\times6.0 + 4.0\times2.0 + 4.0\times2.0}{6.0+2.0+2.0} = 1.6\ \mathrm{m}$$

$$y_M = \frac{-1.5\times2.0 + 0\times6.0 + 1.5\times2.0}{2.0+6.0+2.0} = 0$$

∴ (1.6m, 0m)



（※座標系のとり方次第で答は変わります）

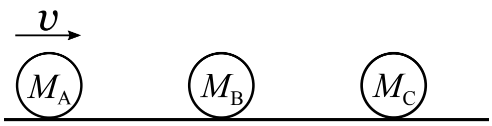
期末試験 5　質量 M_A，M_B，M_C の 3 つの質点 A，B，C が，なめらかな水平面上でこの順に一直線に並んで静止している．いま，A が速さ v で B に衝突すると，次に B が C と衝突する．A と B の衝突におけるはねかえり係数を e_1，B と C の衝突におけるはねかえり係数を e_2 として，次の問いに答えよ．

(1)　1 回目の衝突後の A の速度 v_A を，M_A，M_B，e_1，v を用いて表せ．

(2)　2 回目の衝突後の C の速度 v_C を，M_A，M_B，M_C，e_1，e_2，v を用いて表せ．

(1) 運動量保存則より　$M_A v = M_A v_A + M_B v_B$ …①

はねかえり係数の式より　$e_1 = \dfrac{v_B - v_A}{v - 0}$ …②



②×M_A＋①；　$(1+e_1)M_A v = (M_A+M_B)v_B$

よって　$v_B = \dfrac{(1+e_1)M_A}{M_A+M_B}v$．　$v_A = v_B - e_1 v = \underline{\underline{\dfrac{M_A - e_1 M_B}{M_A+M_B}v}}$ //

(2) 運動量保存則より　$M_B v_B = M_B v_B' + M_C v_C'$ …③

はねかえり係数の式より　$e_2 = \dfrac{v_C' - v_B'}{v_B - 0}$ …④

③と④は，①と②の　$M_A \to M_B$，$M_B \to M_C$，$v \to v_B$，$v_B \to v_C'$，$v_A \to v_B'$，$e_1 \to e_2$

としたものなので　$v_C' = \dfrac{(1+e_2)M_B}{M_B+M_C}v_B$

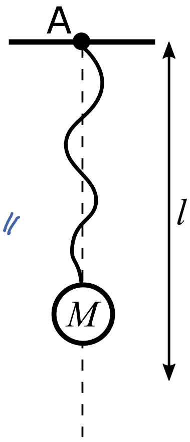
(1)の結果を踏まえると，　$v_C' = \underline{\underline{\dfrac{(1+e_1)(1+e_2)M_A M_B}{(M_A+M_B)(M_B+M_C)}v}}$ //

期末試験 6　点 A に自然長 l のゴムひもの一端を固定し，もう一端に質量 M の質点を取り付ける．質点を点 A から静かに落下させるときの運動について，次の問いに答えよ．なお，ゴムひもは，自然長より短いとき（図）は質点に力を及ぼさないが，自然長より長いときはバネ定数 k のバネとして質点に力を及ぼすものとする．また，空気抵抗は無視し，重力加速度は g とせよ．

(1)　点 A から l だけ落下したときの質点の速さを，l と g を用いて表せ．

(2)　地面から点 A までの高さを H とする．質点が地面に衝突しないような H の条件（不等式）を求めよ．

以下，重力による位置エネルギーの基準はAの高さとする．



(1)　力学的エネルギー保存則より，求める速さ v は

$$\underbrace{0+0}_{A} = \underbrace{\frac{1}{2}Mv^2 + (-Mgl)}_{l\text{落下したとき}} \quad \therefore \quad v = \sqrt{2gl}$$

(2)　Aから最下点までの距離を h とする．
力学的エネルギー保存則より

$$\underbrace{0+0+0}_{A} = \underbrace{0 + (-Mgh) + \frac{1}{2}k(h-l)^2}_{\text{最下点}}$$

よって　$\frac{1}{2}k(h-l)^2 - Mgh = 0$

$$\Leftrightarrow \quad h^2 - 2\left(l + \frac{Mg}{k}\right) + l^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h = l + \frac{Mg}{k} \pm \sqrt{\left(l + \frac{Mg}{k}\right)^2 - l^2}$$

$h > l + \frac{Mg}{k}$ なので　$h = l + \frac{Mg}{k} + \sqrt{\left(l + \frac{Mg}{k}\right)^2 - l^2}$

$$= l + \frac{Mg}{k} + \sqrt{\frac{M^2g^2}{k^2} + \frac{2lMg}{k}}$$

求める条件は　$H > h$．つまり

$$H > l + \frac{Mg}{k} + \sqrt{\frac{M^2g^2}{k^2} + \frac{2lMg}{k}}$$

期末試験 7　荷電粒子にはたらく力は，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を用いて $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ と書ける．いま，z 方向を向く微小磁場中での荷電粒子（質量 M，電気量 q）の運動を，地面に固定されたデカルト座標系 (x, y, z) と，z 軸のまわりに一定の微小角速度 ω で回転するデカルト座標系 (x', y', z) とで観測するとき，次の問いに答えよ．

(1) 固定座標系での速度を $\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ で表す．このとき，荷電粒子にはたらく力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ について，F_x と F_y を求めよ．磁場は z 方向を向いているので $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ と書けることに注意せよ．

(2) 回転座標系での速度を $\boldsymbol{v} = (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z})$，加速度を $\boldsymbol{a} = (\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z})$ で表す．このとき，荷電粒子の x' 方向と y' 方向の運動方程式を書け．なお，ω^2 や ωB を含む項は微小量として無視して構わない．また，回転角 $\varphi = \omega t$ に対して $x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$，$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$ は既知とせよ．

(3) 角速度 ω がある値のとき，荷電粒子は回転座標系で静止する．この角速度 ω_{L} を求めよ．

(1) $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix} = (q\dot{y}B,\ -q\dot{x}B,\ 0)$

$\because$ $F_x = q\dot{y}B$, $F_y = -q\dot{x}B$ //

(2) 固定座標系の運動方程式は $M\ddot{x} = F_x$, $M\ddot{y} = F_y$.

回転座標系ではコリオリ力と遠心力を考慮して

$$\begin{cases} M\ddot{x}' = q\dot{y}B + 2M\omega\dot{y}' + Mx'\omega^2 \fallingdotseq q\dot{y}B + 2M\omega\dot{y}' \\ M\ddot{y}' = -q\dot{x}B - 2M\omega\dot{x}' + My'\omega^2 \fallingdotseq -q\dot{x}B - 2M\omega\dot{x}' \end{cases}$$

いま，$\dot{x} = \dot{x}'\cos\varphi - x'\sin\varphi\,\omega - \dot{y}'\sin\varphi - y'\cos\varphi\cdot\omega$ より

$q\dot{x}B \fallingdotseq q\dot{x}'\cos\varphi B - q\dot{y}'\sin\varphi B \fallingdotseq q\dot{x}'B$

($\because$ φ が微小のとき $\cos\varphi \fallingdotseq 1$, $\sin\varphi \fallingdotseq \varphi$)

同様に $q\dot{y}B \fallingdotseq q\dot{y}'B$

以上より，回転座標系での運動方程式は

$M\ddot{x}' = (qB + 2M\omega)\dot{y}'$, $M\ddot{y}' = -(qB + 2M\omega)\dot{x}'$ //

(3) $M\ddot{x}' = M\ddot{y}' = 0$ となる角速度は $qB + 2M\omega_L = 0$

$\Leftrightarrow$ $\omega_L = -\dfrac{qB}{2M}$ //

(※ この角速度はラーモア周波数と呼ばれる量.)