中間試験 1　時刻 t [s] での位置 $\boldsymbol{r}(t)$ [m] が $(-5t, 2t^3+3, 1)$ と表される 3 次元運動について，時刻 t での速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を求めよ．

中間試験 2　質量 M の質点について，時刻 t での加速度が $a(t) = a_0 t^2$（ただし a_0 は定数）で表される．このとき，時刻 t で質点に加わる力を求めよ．

中間試験 3　質点 A（質量 M_{A}）が，質点 O から距離 r_{A} の場所にある．また，質点 B（質量 M_{B}）が，質点 O から距離 r_{B} の場所にある．$M_{\mathsf{B}} = \alpha M_{\mathsf{A}}$，$r_{\mathsf{B}} = \beta r_{\mathsf{A}}$ のとき，O が B から受ける万有引力は，O が A から受ける万有引力の何倍か答えよ．

中間試験 4　質量 M の質点を鉛直上向きに速さ v_0 で投げ上げた．質点に重力のみが加わっているとき，質点が投射点から鉛直方向に距離 H 落下するのに要する時間を求めよ．ただし，重力加速度は g とせよ．

中間試験 5　電気抵抗（抵抗 R）とコンデンサ（電気容量 C）が直列に並んだ電気回路を RC 直列回路と呼ぶ（図）．電源として直流電源（電圧 E）を用いるとき，コンデンサの電荷 $Q(t)$ について

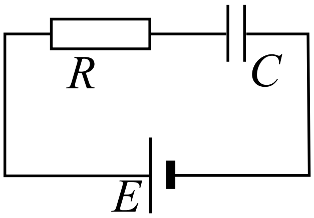
$$R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{Q(t)}{C}=E$$

が成り立つ．ここで，電流 $I(t)$ が $I(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}$ と表されることを用いた．次の問いに答えよ．

(1)　定常状態での電荷 Q_∞ を求めよ．

(2)　電荷 $Q(t)$ の一般解を求めよ．

(3)　$t=0$ で電荷がたまっていない（つまり $Q(0)=0$）とき，電荷 $Q(t)$ の時間変化を表す式を求めよ．



中間試験 6　バネ（自然長 l，バネ定数 k）の一端に取り付けられた質点（質量 M）について，水平方向の運動を考える．質点と逆の端は，強制的に水平方向に動かすことができるものとする．図のように座標軸を考え，質点の位置を $x(t)$，質点と逆の端の位置を $X(t)$ で表すとき，次の問いに答えよ．ただし，バネの復元力の大きさは自然長からのずれに比例する（フックの法則）とせよ．

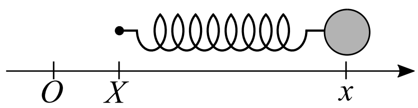
(1) 質点に加わる力を k，l，$x(t)$，$X(t)$ を用いて表せ．

(2) 質点の取り付けられていない一端を $X(t) = X_0 \sin \Omega t$（X_0 と Ω は定数）で水平方向に振動させる．このとき，$\omega = \sqrt{k/M}$，$y(t) = x(t) - l$ について以下が成り立つことを示せ：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = \omega^2 X_0 \sin \Omega t.$$

(3) 上記の微分方程式を解くことで $y(t)$ の一般解を求めよ．ただし，$\Omega \neq \omega$ とせよ．

(4) 時刻 $t = 0$ で質点がつりあいの位置（$x(0) = l$）に静止しているときの位置の時間変化 $x(t)$ を求めよ．



中間試験 7　質点（質量 M）の鉛直方向の運動を考える．質点には，重力の他に，空気抵抗として慣性抵抗（比例係数 κM）が加わるものとする．鉛直上向きを正とする速度を $v = dy/dt$，重力加速度を g で表すと，質点の運動方程式は，上昇時と下降時のそれぞれについて以下のように記述される：

$$\text{上昇時}: M\frac{dv}{dt} = -Mg - \kappa M v^2,\quad \text{下降時}: M\frac{dv}{dt} = -Mg + \kappa M v^2.$$

$y = 0$ から速さ v_0 で鉛直上向きに質点を投射するとき，再び $y = 0$ に落ちるときの速度を V として，次の問いに答えよ．なお，必要であれば，$\dfrac{dv}{dt} = v\dfrac{dv}{dy}$ を用いなさい．

(1)　上昇時には $y = -\dfrac{1}{2\kappa}\ln\left|\dfrac{g+\kappa v^2}{g+\kappa v_0^2}\right|$，下降時には $y = \dfrac{1}{2\kappa}\ln\left|\dfrac{g-\kappa v^2}{g-\kappa V^2}\right|$ が成り立つことをそれぞれ示せ．

(2)　最高点 $y = H$ で $v = 0$ となることを踏まえて，$V = -\sqrt{\dfrac{g}{g+\kappa v_0^2}}\,v_0$ と表されることを示せ．

中間試験 1　時刻 t [s] での位置 $\boldsymbol{r}(t)$ [m] が $(-5t, 2t^3+3, 1)$ と表される 3 次元運動について，時刻 t での速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を求めよ．

$(-5,\ 6t^2,\ 0)$ [m/s]

中間試験 2　質量 M の質点について，時刻 t での加速度が $a(t) = a_0 t^2$（ただし a_0 は定数）で表される．このとき，時刻 t で質点に加わる力を求めよ．

$Ma_0 t^2$

中間試験 3　質点 A（質量 M_A）が，質点 O から距離 r_A の場所にある．また，質点 B（質量 M_B）が，質点 O から距離 r_B の場所にある．$M_\mathrm{B} = \alpha M_\mathrm{A}$，$r_\mathrm{B} = \beta r_\mathrm{A}$ のとき，O が B から受ける万有引力は，O が A から受ける万有引力の何倍か答えよ．

$$F_B = G\frac{M_0 M_B}{r_B^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} G\frac{M_0 M_A}{r_A^2}$$

$\therefore\ \dfrac{\alpha}{\beta^2}$ 倍

中間試験 4　質量 M の質点を鉛直上向きに速さ v_0 で投げ上げた．質点に重力のみが加わっているとき，質点が投射点から鉛直方向に距離 H 落下するのに要する時間を求めよ．ただし，重力加速度は g とせよ．

鉛直上向きを正とする．運動方程式は　$M\dfrac{dv}{dt} = -Mg$.

よって　$v = -gt + v_0$，さらに　$y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t$.

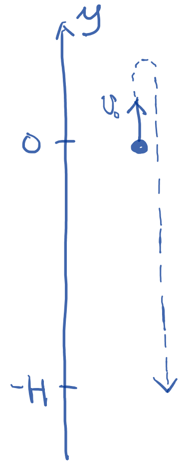
$y = -H$ となるのは

$$-H = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

$$\Leftrightarrow\ t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}$$

$t > 0$ より

$$t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}$$



中間試験 5　電気抵抗（抵抗 R）とコンデンサ（電気容量 C）が直列に並んだ電気回路を RC 直列回路と呼ぶ（図）．電源として直流電源（電圧 E）を用いるとき，コンデンサの電荷 $Q(t)$ について

$$R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = E$$

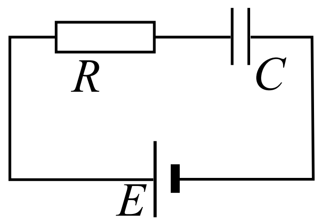
が成り立つ．ここで，電流 $I(t)$ が $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ と表されることを用いた．次の問いに答えよ．

(1)　定常状態での電荷 Q_∞ を求めよ．

(2)　電荷 $Q(t)$ の一般解を求めよ．

(3)　$t = 0$ で電荷がたまっていない（つまり $Q(0) = 0$）とき，電荷 $Q(t)$ の時間変化を表す式を求めよ．

(1) 定常状態では $\frac{dQ_\infty}{dt} = 0$ ． よって $Q_\infty = \underline{\underline{CE}}$ //



(2) $\dot{Q}(t) = -\frac{Q}{RC} + \frac{E}{R} = -\frac{1}{RC}(Q - CE)$

$\Rightarrow \int \frac{dQ}{Q - CE} = \int \left(-\frac{1}{RC}\right) dt$ ∴ $\ln|Q - CE| = -\frac{t}{RC} + A$ （A は定数）

よって $\underline{\underline{Q(t) = CE + Be^{-\frac{t}{RC}} \quad (B\text{は定数})}}$ //

(3) $t = 0$ で $Q = 0$ より $B = -CE$

よって $Q(t) = \underline{\underline{CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}}$ //

中間試験 6　バネ（自然長 l，バネ定数 k）の一端に取り付けられた質点（質量 M）について，水平方向の運動を考える．質点と逆の端は，強制的に水平方向に動かすことができるものとする．図のように座標軸を考え，質点の位置を $x(t)$，質点と逆の端の位置を $X(t)$ で表すとき，次の問いに答えよ．ただし，バネの復元力の大きさは自然長からのずれに比例する（フックの法則）とせよ．

(1) 質点に加わる力を k，l，$x(t)$，$X(t)$ を用いて表せ．

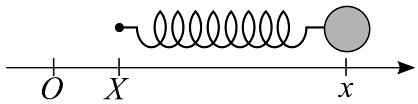
(2) 質点の取り付けられていない一端を $X(t) = X_0 \sin \Omega t$（X_0 と Ω は定数）で水平方向に振動させる．このとき，$\omega = \sqrt{k/M}$，$y(t) = x(t) - l$ について以下が成り立つことを示せ：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = \omega^2 X_0 \sin \Omega t.$$

(3) 上記の微分方程式を解くことで $y(t)$ の一般解を求めよ．ただし，$\Omega \neq \omega$ とせよ．

(4) 時刻 $t = 0$ で質点がつりあいの位置（$x(0) = l$）に静止しているときの位置の時間変化 $x(t)$ を求めよ．

(1) $F = -k(x - X - l)$



(2) 運動方程式は $M\ddot{x} = -k(x - X - l)$.

ここで $\frac{k}{M} = \omega^2$，$x - l = y$ より　$\ddot{y} = -\omega^2(y - X_0 \sin \Omega t)$

$\Leftrightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 X_0 \sin \Omega t$ ■

(3) 特解を $y = A \sin \Omega t$ とおき Aを求める．運動方程式に代入すると，

$(-A\Omega^2 + \omega^2 A) \sin \Omega t = \omega^2 X_0 \sin \Omega t$　∴ $A = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} X_0$.

一方，斉次微分方程式 $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ の一般解は

$y = B \cos \omega t + C \sin \omega t$　（BとCは定数）

以上より，一般解は　$y = B \cos \omega t + C \sin \omega t + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} X_0 \sin \Omega t$

（BとCは定数）

(4) 初期条件より，$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$.

また　$\dot{y} = -B\omega \sin \omega t + C\omega \cos \omega t + \frac{\omega^2 \Omega X_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$

$\dot{y}(0) = 0$ より，$C = -\frac{\omega \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} X_0$.

以上より

$x(t) = l + y(t) = l + \frac{\omega}{\omega^2 - \Omega^2} X_0 (-\Omega \sin \omega t + \omega \sin \Omega t)$ //

中間試験 7　質点（質量 M）の鉛直方向の運動を考える．質点には，重力の他に，空気抵抗として慣性抵抗（比例係数 κM）が加わるものとする．鉛直上向きを正とする速度を $v = dy/dt$，重力加速度を g で表すと，質点の運動方程式は，上昇時と下降時のそれぞれについて以下のように記述される：

$$\text{上昇時}: M\frac{dv}{dt} = -Mg - \kappa M v^2, \quad \text{下降時}: M\frac{dv}{dt} = -Mg + \kappa M v^2.$$

$y = 0$ から速さ v_0 で鉛直上向きに質点を投射するとき，再び $y = 0$ に落ちるときの速度を V として，次の問いに答えよ．なお，必要であれば，$\dfrac{dv}{dt} = v\dfrac{dv}{dy}$ を用いなさい．

(1) 上昇時には $y = -\dfrac{1}{2\kappa}\ln\left|\dfrac{g+\kappa v^2}{g+\kappa v_0^2}\right|$，下降時には $y = \dfrac{1}{2\kappa}\ln\left|\dfrac{g-\kappa v^2}{g-\kappa V^2}\right|$ が成り立つことをそれぞれ示せ．

(2) 最高点 $y = H$ で $v = 0$ となることを踏まえて，$V = -\sqrt{\dfrac{g}{g+\kappa v_0^2}}\,v_0$ と表されることを示せ．

(1) 上昇時は $\dot{v} = -g - \kappa v^2$. ここで $\dot{v} = v v'$ $\left(v' = \frac{dv}{dy}\right)$ を用いると,

$$\int \frac{v\,dv}{v^2 + g/\kappa} = \int (-\kappa)\,dy \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|v^2 + g/\kappa\right| = -\kappa y + A \quad (A\text{は定数})$$

$y=0$ で $v=v_0$ より, $A = \frac{1}{2}\ln\left|v_0^2 + g/\kappa\right|$. ∴ $-\kappa y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v^2+g/\kappa}{v_0^2+g/\kappa}\right|$.

下降時は $\frac{1}{2}\ln\left|v^2 - g/\kappa\right| = \kappa y + B$ (Bは定数)

$y=0$ で $v=V$ より, $B = \frac{1}{2}\ln\left|V^2 - g/\kappa\right|$. ∴ $\kappa y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v^2-g/\kappa}{v_0^2-g/\kappa}\right|$ ■

(2) それぞれの式について, 最高点 $y=H$ で $v=0$ なので,

$$H = -\frac{1}{2\kappa}\ln\left(\frac{g/\kappa}{v_0^2+g/\kappa}\right) = \frac{1}{2\kappa}\ln\left(\frac{g/\kappa}{g/\kappa - V^2}\right). \quad \left(V<\sqrt{g/\kappa}\ \text{を用いた}\right).$$

この等式から $\dfrac{v_0^2+g/\kappa}{g/\kappa} = \dfrac{g/\kappa}{g/\kappa - V^2} \Leftrightarrow \dfrac{\kappa v_0^2 + g}{g} = \dfrac{g}{g-\kappa V^2}$

$$\Leftrightarrow g - \kappa V^2 = \frac{g^2}{\kappa v_0^2 + g} \Leftrightarrow \kappa V^2 = g - \frac{g^2}{\kappa v_0^2+g} = \frac{g\kappa v_0^2}{\kappa v_0^2 + g}$$

$\Leftrightarrow V^2 = \dfrac{g v_0^2}{\kappa v_0^2 + g}$ ∴ $V<0$ より $V = -\sqrt{\dfrac{g}{\kappa v_0^2 + g}}\,v_0$ ■