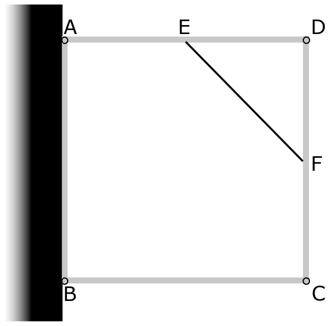
期末試験 1　4 本の一様な等しい棒（質量 M）を蝶番でなめらかに連結し，AB を鉛直に保って固定する．AD の中点と CD の中点を糸でつないで正方形を形成させる．重力加速度の大きさを g として，糸の張力を求めよ．



期末試験 2　バネ（バネ定数 k）の一端を壁に固定し，もう一端に質点（質量 M）を取り付けてなめらかな水平面上に置く．質点は壁と垂直な方向にのみ動く．質点の位置を x（原点はバネの自然長の位置）で表すとき，ラグランジアン $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ を求めよ．ただし，$x = 0$ のときのバネの位置エネルギーを 0 とせよ．

期末試験 3　系のラグランジアンが $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \dfrac{1}{2}M\dot{x}^2 - U(x)$ と表される運動について，次の問いに答えよ．

(1)　一般化運動量を $\mathcal{L}$ から求めよ．

(2)　一般化運動量を p で表すとき，ハミルトニアン $\mathcal{H}(x, p)$ を求めよ．

(3)　正準方程式から，$\dfrac{dx}{dt}$ と $\dfrac{dp}{dt}$ をそれぞれ求めなさい．

期末試験 4　水平面上にある質点 A（質量 M_A）と質点 B（質量 M_B）が，バネ（バネ定数 k，自然長 L）で連結しており，同一直線上を運動する．A，B の位置を x_A，x_B（ただし，$x_\mathsf{A} > x_\mathsf{B}$）で表すとき，次の問いに答えよ．

(1) 位置エネルギー $U(x_\mathsf{A}, x_\mathsf{B})$ を求めよ．ただし，バネが自然長のときの位置エネルギーを 0 とせよ．

(2) x_A と x_B を一般化座標とするとき，この系のラグランジアン $\mathcal{L}(x_\mathsf{A}, x_\mathsf{B}, \dot{x}_\mathsf{A}, \dot{x}_\mathsf{B})$ を求めよ．

(3) B を基準とした A の位置 $x = x_\mathsf{A} - x_\mathsf{B}$ と，2 つの質点の質量中心 $X = \dfrac{M_\mathsf{A}x_\mathsf{A} + M_\mathsf{B}x_\mathsf{B}}{M_\mathsf{A} + M_\mathsf{B}}$ について，$x_\mathsf{A} = X + \dfrac{M_\mathsf{B}}{M_\mathsf{A} + M_\mathsf{B}}x$，$x_\mathsf{B} = X - \dfrac{M_\mathsf{A}}{M_\mathsf{A} + M_\mathsf{B}}x$ であることを示せ．

(4) x と X を一般化座標とするとき，この系のラグランジアン $\mathcal{L}(x, X, \dot{x}, \dot{X})$ を求めよ．

(5) X に関するラグランジュの運動方程式から，系の質量中心 X がどのような運動をするか説明せよ．

(6) $y = x - L$ は単振動の運動方程式 $\ddot{y} = -\omega^2 y$（ただし，$\omega > 0$）を満たす．角振動数 ω を求めよ．

期末試験 5　水平板にあけた小穴に長さ L の糸を通し，板上の糸の端に質量 M_1 の質点をつけて板の上に置き，もう一端には質量 M_2 の質点をつけて鉛直に垂れ下げる．r，θ を図のように設定するとき，次の問いに答えよ．ただし，板面および小穴はなめらかで，空気抵抗は無視できるものとし，重力加速度は g とせよ．

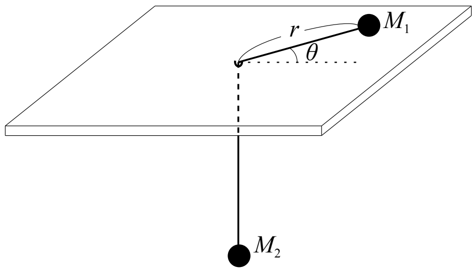
(1) $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ について，$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ を示せ．

(2) 質量 M_2 の質点が水平板から z だけ下にあるとき，系の位置エネルギーを求めよ．ただし，水平板の高さでの位置エネルギーを 0 とせよ．

(3) r と θ を一般化座標とするラグランジアン $\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ を求めよ（z を用いてはならないことに注意せよ）．

~~(4) 時刻 $t = 0$ で，$r = L$，$\dot{r} = 0$ のとき，r と θ を求めよ．ただし，$r = 0$ となった後の時刻は考慮しない．~~

(5) θ に関するラグランジュの運動方程式から得られる物理法則を答えよ．

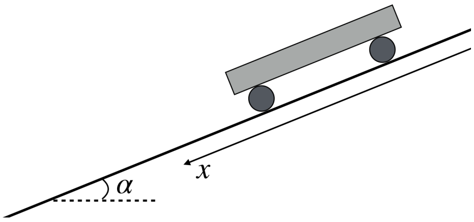


期末試験 6　台（質量 M）と 4 個の等価な車輪（質量 m，半径 a）からなる車が，水平と α の角をなす斜面上に置かれている．車の床は斜面に平行で，車輪は斜面上を滑らずに転がる．図のように，斜面下向きに x 軸をとり，車の移動距離を x で表す．車が斜面に沿って降下するとき，次の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさは g とせよ．

(1) 車が x 移動したとき，車の位置エネルギーを求めよ．ただし，$x = 0$ での位置エネルギーを 0 とせよ．なお，剛体の位置エネルギーは，全質量が質量中心に集まった質点の位置エネルギーと等しい．

(2) 降下しているときの車の運動エネルギーを求めよ．なお，剛体の運動エネルギーは並進と回転の運動エネルギーの合計で表され，1 つの車輪の回転の運動エネルギーが $\dfrac{1}{4}a^2m\omega^2$（ただし，ω は車輪の角速度）となることは説明なしに用いて良い．

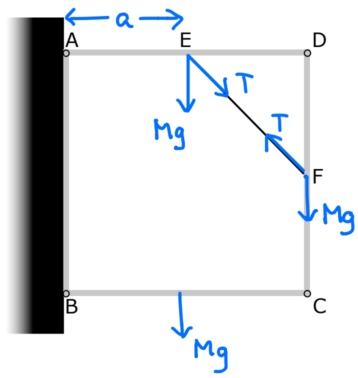
(3) 滑らないので $\dot{x} = a\omega$ が成り立つ．このことを踏まえて，車の加速度を α，g，m，M を用いて表せ．



解答例

応用物理学 I (2018 年度：鳴海)　　番号:　　名前:

期末試験 1　4 本の一様な等しい棒（質量 M）を蝶番でなめらかに連結し，AB を鉛直に保って固定する．AD の中点と CD の中点を糸でつないで正方形を形成させる．重力加速度の大きさを g として，糸の張力を求めよ．



ADが時計まわりにδθ回転するとき，張力がする仮想仕事は

$$\delta W_T = \frac{1}{\sqrt{2}}T\cdot a\delta\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}T\cdot 2a\delta\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}Ta\delta\theta \quad (\delta\theta\text{は微小})$$

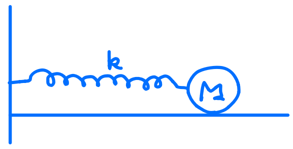
一方，重力がする仮想仕事は，

$$\delta W_G = Mg\cdot a\delta\theta + Mg\cdot 2a\delta\theta + Mg\cdot a\delta\theta = 4Mga\delta\theta$$

仮想仕事の原理より $\delta W_T + \delta W_G = 0$

よって $T = 4\sqrt{2}Mg$ 〃

期末試験 2　バネ（バネ定数 k）の一端を壁に固定し，もう一端に質点（質量 M）を取り付けてなめらかな水平面上に置く．質点は壁と垂直な方向にのみ動く．質点の位置を x（原点はバネの自然長の位置）で表すとき，ラグランジアン $\mathcal{L}(x,\dot{x})$ を求めよ．ただし，$x=0$ のときのバネの位置エネルギーを 0 とせよ．



運動エネルギーは $K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$.

位置エネルギーは $U = \frac{1}{2}kx^2$.

よって $\mathcal{L}(x,\dot{x}) = K - U = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ 〃

期末試験 3　系のラグランジアンが $\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - U(x)$ と表される運動について，次の問いに答えよ．

(1)　一般化運動量を $\mathcal{L}$ から求めよ．

(2)　一般化運動量を p で表すとき，ハミルトニアン $\mathcal{H}(x,p)$ を求めよ．

(3)　正準方程式から，$\frac{dx}{dt}$ と $\frac{dp}{dt}$ をそれぞれ求めなさい．

(1)　$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = M\dot{x}$

(2)　$\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L} = p\cdot\frac{p}{M} - \frac{1}{2}M\left(\frac{p}{M}\right)^2 + U(x) = \frac{p^2}{2M} + U(x)$

(3)　$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{M}$ 〃　　$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ 〃

期末試験 4 水平面上にある質点 A（質量 M_A）と質点 B（質量 M_B）が，バネ（バネ定数 k，自然長 L）で連結しており，同一直線上を運動する．A，B の位置を x_A，x_B（ただし，$x_A > x_B$）で表すとき，次の問いに答えよ．

(1) 位置エネルギー $U(x_A, x_B)$ を求めよ．ただし，バネが自然長のときの位置エネルギーを 0 とせよ．

(2) x_A と x_B を一般化座標とするとき，この系のラグランジアン $\mathcal{L}(x_A, x_B, \dot{x}_A, \dot{x}_B)$ を求めよ．

(3) B を基準とした A の位置 $x = x_A - x_B$ と，2 つの質点の質量中心 $X = \dfrac{M_A x_A + M_B x_B}{M_A + M_B}$ について，$x_A = X + \dfrac{M_B}{M_A + M_B}x$，$x_B = X - \dfrac{M_A}{M_A + M_B}x$ であることを示せ．

(4) x と X を一般化座標とするとき，この系のラグランジアン $\mathcal{L}(x, X, \dot{x}, \dot{X})$ を求めよ．

(5) X に関するラグランジュの運動方程式から，系の質量中心 X がどのような運動をするか説明せよ．

(6) $y = x - L$ は単振動の運動方程式 $\ddot{y} = -\omega^2 y$（ただし，$\omega > 0$）を満たす．角振動数 ω を求めよ．

(1) バネの長さは $x_A - x_B$．よって $U(x_A, x_B) = \frac{1}{2}k(x_A - x_B - L)^2$ //

(2) $K_A = \frac{1}{2}M_A\dot{x}_A^2$，$K_B = \frac{1}{2}M_B\dot{x}_B^2$ より

$\mathcal{L} = K_A + K_B - U = \frac{1}{2}M_A\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}M_B\dot{x}_B^2 - \frac{1}{2}k(x_A - x_B - L)^2$ //

(3) $x = x_A - x_B$ と $(M_A + M_B)X = M_A x_A + M_B x_B$ について，

第1式に M_B をかけて第2式との和をとると

$(M_A + M_B)X + M_B x = (M_A + M_B)x_A$ ∴ $x_A = X + \dfrac{M_B}{M_A + M_B}x$.

また，第1式に M_A をかけて第2式との差をとると，

$(M_A + M_B)X - M_A x = (M_A + M_B)x_B$ ∴ $x_B = X - \dfrac{M_A}{M_A + M_B}x$ //

(4) (2) に (3) を代入すると，

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M_A\left(\dot{X} + \frac{M_B}{M_A + M_B}\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}M_B\left(\dot{X} - \frac{M_A}{M_A + M_B}\dot{x}\right)^2 - \frac{1}{2}k(x - L)^2$

$= \frac{1}{2}(M_A + M_B)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{M_A M_B}{M_A + M_B}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - L)^2$ //

(5) $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial X} = 0$，$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}} = (M_A + M_B)\dot{X}$ より X に関するラグランジュの運動方程式は

$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial X} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}}\right) = 0 \Rightarrow (M_A + M_B)\ddot{X} = 0$．よって質量は等速直線運動をする．

(6) $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -k(x - L)$，$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = \dfrac{M_A M_B}{M_A + M_B}\dot{x}$ より x に関するラグランジュの運動方程式は

$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{M_A M_B}{M_A + M_B}\ddot{x} = -k(x - L)$．

$y = x - L$ について，$\ddot{x} = \ddot{y}$ より $\ddot{y} = -\dfrac{k(M_A + M_B)}{M_A M_B}y$ ∴ $\omega > 0$ より $\omega = \sqrt{\dfrac{k(M_A + M_B)}{M_A M_B}}$ //

期末試験 5　水平板にあけた小穴に長さ L の糸を通し，板上の糸の端に質量 M_1 の質点をつけて板の上に置き，もう一端には質量 M_2 の質点をつけて鉛直に垂れ下げる．r，θ を図のように設定するとき，次の問いに答えよ．ただし，板面および小穴はなめらかで，空気抵抗は無視できるものとし，重力加速度は g とせよ．

(1)　$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ について，$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ を示せ．

(2)　質量 M_2 の質点が水平板から z だけ下にあるとき，系の位置エネルギーを求めよ．ただし，水平板の高さでの位置エネルギーを 0 とせよ．

(3)　r と θ を一般化座標とするラグランジアン $\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ を求めよ（z を用いてはならないことに注意せよ）．

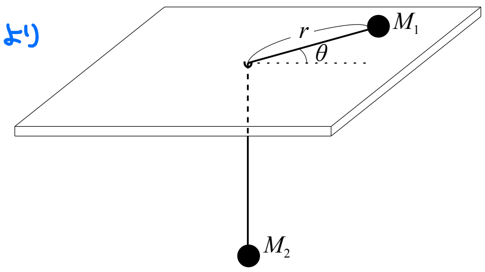
~~(4)　時刻 $t = 0$ で，$r = L$，$\dot{r} = 0$ のとき，r と θ を求めよ．ただし，$r = 0$ となった後の時刻は考慮しない．~~

(5)　θ に関するラグランジュの運動方程式から得られる物理法則を答えよ．

(1)　$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta}$，$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta}$ より

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta - 2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta\cdot\dot{\theta} + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\sin^2\theta + 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta} + r^2\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2$$

$$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$



(2)　質点 M_1 は水平板にあるので $U_1 = 0$．
一方，質点 M_2 は z だけ下にあるので $U_2 = -M_2 g z$．　∴ $U_1 + U_2 = -M_2 g z$

(3)　質点 M_1 について，$K_1 = \frac{1}{2}M_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$．一方，質点 M_2 について，$K_2 = \frac{1}{2}M_2\dot{z}^2$．
糸の長さが L なので　$z = L - r$　なので，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M_2\dot{r}^2 + M_2 g(L - r)$$

(4)　取消（問題設定にミスがありました．すみません．）

(5)　θ についてのラグランジュの運動方程式は，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = M_1 r^2\dot{\theta}$ より

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(M_1 r^2\dot{\theta}) = 0 \quad \therefore M_1 r^2\dot{\theta} = C \quad (C\text{は定数})$$

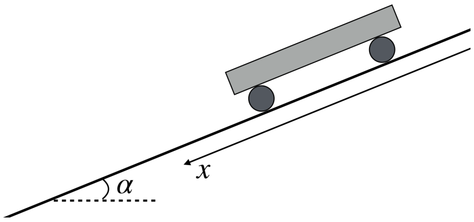
これは角運動量保存の法則

期末試験 6　台（質量 M）と 4 個の等価な車輪（質量 m，半径 a）からなる車が，水平と α の角をなす斜面上に置かれている．車の床は斜面に平行で，車輪は斜面上を滑らずに転がる．図のように，斜面下向きに x 軸をとり，車の移動距離を x で表す．車が斜面に沿って降下するとき，次の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさは g とせよ．

(1) 車が x 移動したとき，車の位置エネルギーを求めよ．ただし，$x=0$ での位置エネルギーを 0 とせよ．なお，剛体の位置エネルギーは，全質量が質量中心に集まった質点の位置エネルギーと等しい．

(2) 降下しているときの車の運動エネルギーを求めよ．なお，剛体の運動エネルギーは並進と回転の運動エネルギーの合計で表され，1 つの車輪の回転の運動エネルギーが $\frac{1}{4}a^2m\omega^2$（ただし，ω は車輪の角速度）となることは説明なしに用いて良い．

(3) 滑らないので $\dot{x}=a\omega$ が成り立つ．このことを踏まえて，車の加速度を α，g，m，M を用いて表せ．



(1) 台については，$-Mgx\sin\alpha$

車輪については，$-4mgx\sin\alpha$

∴ $-(M+4m)gx\sin\alpha$ 〃

(2) 台については $\frac{1}{2}M\dot{x}^2$，

車輪については $4\cdot\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{4}a^2m\omega^2\right)$

∴ $\frac{1}{2}(M+4m)\dot{x}^2+a^2m\omega^2$ 〃

（$\dot{x}=a\omega$ を用いて $\frac{1}{2}(M+6m)\dot{x}^2$ もOK）

(3) x を一般化座標とするとき，ラグランジアンは $\dot{x}=a\omega$ も踏まえて

$\mathcal{L}(x,\dot{x})=\frac{1}{2}(M+4m)\dot{x}^2+m\dot{x}^2+(M+4m)gx\sin\alpha$ と書ける．

ここで $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=(M+4m)g\sin\alpha$，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}=(M+6m)\dot{x}$ なので，

ラグランジュの運動方程式より

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)=0 \Rightarrow (M+6m)\ddot{x}=(M+4m)g\sin\alpha$$

$$\therefore\ \ddot{x}=\frac{M+4m}{M+6m}g\sin\alpha \text{〃}$$