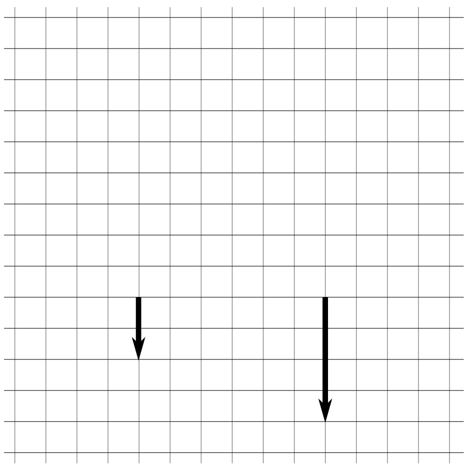
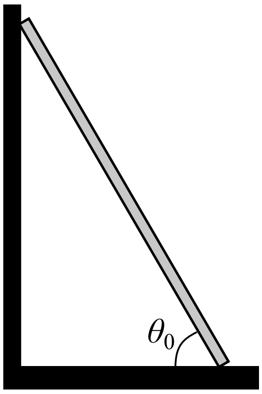
中間試験 1　一様な棒（長さ L，質量 M）の質量中心はどこか．座標軸を各自で設定し，その座標軸での値を答えよ．なお，一様な 1 次元物体の質量中心は $x_{\mathsf{M}} = \rho \int x dx$（ここで，$\rho$ は線密度，積分範囲は物体の領域）だが，この問題に限っては途中計算を書かずに答えだけでも良い．

中間試験 2　作用線が互いに平行な 2 つの力を 1 つの力に合成する方法を，図を用いて説明せよ．

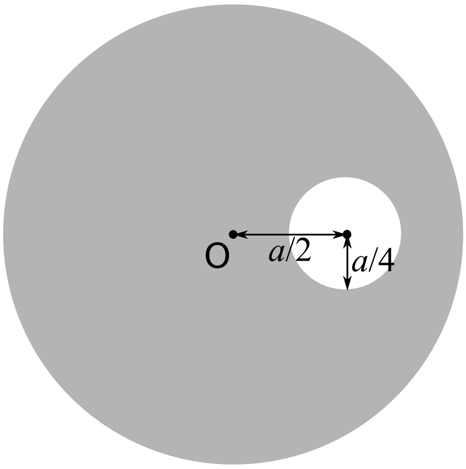


中間試験 3　密度が一様な棒を，あらい水平面（静止摩擦係数 μ）からなめらかな鉛直壁に立てかけて静止させる．棒を傾けていき，棒がすべりだす瞬間の傾斜角を θ_0 する．このとき，θ_0 と μ の関係式を求めよ．



中間試験 4　1.5 kg の剛体がある．剛体上のある点 A を通る軸のまわりに $-\ 70$ N·m の力のモーメントが加わっており，角速度 $\omega(t) = -\ 2t$〔rad/s〕 で回転している．この軸が質量中心を通る軸から 4.0 m 離れているとき，質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメントはいくらか．なお，問題文中の軸は全て鉛直方向を向くものとする．

中間試験 5　半径 a の一様なうすい円板から円がくり抜かれた物体（質量 M）を作製した．くり抜かれた円は，くり抜く前の円板の中心 O から $\frac{a}{2}$ 離れたところを中心とし，半径 $\frac{a}{4}$ の円である．この物体について，O を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよ．ただし，半径 r，質量 m のうすい円板について，質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{mr^2}{2}$ である．

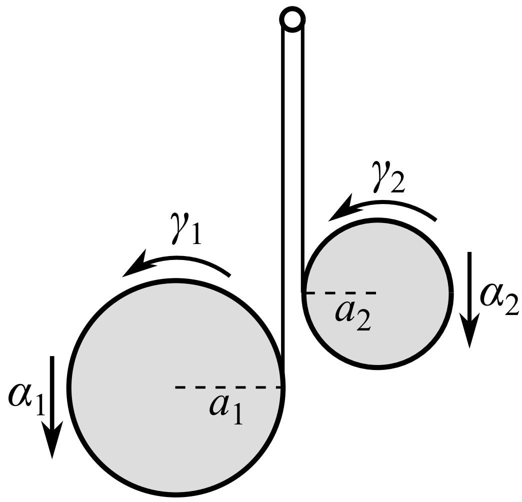


中間試験 6　糸の両端を，質量 M_1，M_2，半径 a_1，a_2 の 2 つの円板に巻きつけ，両円板を同一鉛直面内にして，糸をなめらかな釘にかけて放す．張力を T，質量中心の加速度を α_1，α_2，角加速度を γ_1，γ_2 とする（鉛直下向きを並進運動の正方向とし，反時計回りを回転運動の正方向とする）．重力加速度を g とし，空気抵抗は無視できるものとして次の問いに答えよ．ただし，半径 r，質量 m のうすい円板について，質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\dfrac{mr^2}{2}$ である．

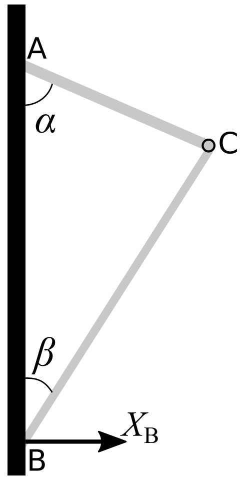
(1)　両円板の並進運動と回転運動について，それぞれの運動方程式を記せ．

(2)　α_1，α_2，a_1，a_2，γ_1，γ_2 の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　両円板の加速度 α_1，α_2 を，M_1，M_2，g で表せ．

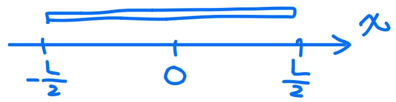


中間試験 7　質量が M_1，M_2 である一様な 2 本の太さの無視できる棒 AC，BC があり，2 本の棒は C でなめらかな蝶番でつながれている．さらに，A と B を同一鉛直線上の 2 点に固定する．$\angle$CAB $= \alpha$，$\angle$ABC $= \beta$ であるとき，B での壁からの垂直抗力の水平成分が $X_{\mathrm{B}} = \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}(M_1+M_2)g$（ここで，$g$ は重力加速度）と表されることを示せ．



中間試験 1　一様な棒（長さ L，質量 M）の質量中心はどこか．座標軸を各自で設定し，その座標軸での値を答えよ．なお，一様な 1 次元物体の質量中心は $x_{\mathrm{M}} = \rho \int x dx$（ここで，$\rho$ は線密度，積分範囲は物体の領域）だが，この問題に限っては途中計算を書かずに答えだけでも良い．

右のように座標軸を設定する．



質量中心は，線密度を $\rho = \frac{M}{L}$ とすると，

$$x_M = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x dx = 0 \;\text{//}$$

※座標軸のとり方により答の表現は異なる．

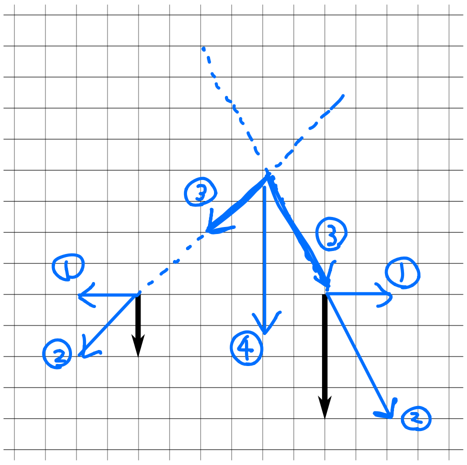
中間試験 2　作用線が互いに平行な 2 つの力を 1 つの力に合成する方法を，図を用いて説明せよ．

① それぞれの力の作用点に，合力が 0 の仮想的な力を加える．

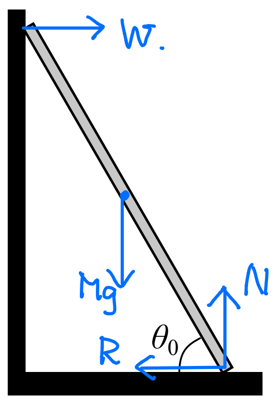
② 仮想的な力との合力を考える

③ 作用線の定理にもとづき，作用線の交点に力を移動させる．

④ それらの力の合力が互いに 2 つの力の合力となる．



中間試験 3　密度が一様な棒を，あらい水平面（静止摩擦係数 μ）からなめらかな鉛直壁に立てかけて静止させる．棒を傾けていき，棒がすべりだす瞬間の傾斜角を θ_0 する．このとき，θ_0 と μ の関係式を求めよ．



棒の質量を M，長さを L とする．壁からの垂直抗力を W，床からの垂直抗力を N，床との静止摩擦力を R とすると，

力のつりあいより，$N - Mg = 0$，　$W - R = 0$．

最大静止摩擦力では $R = \mu N = \mu Mg$．　よって $W = \mu Mg$．

また，力のモーメントのつりあいより，床との接点のまわりでは

$$\frac{L}{2} Mg \cos\theta_0 - L W \sin\theta_0 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos\theta_0 - \mu \sin\theta_0 = 0$$

$$\therefore \underline{\underline{\tan\theta_0 = \frac{1}{2\mu}}} \left(\Leftrightarrow \underline{\underline{\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu}\right)}} \right)$$

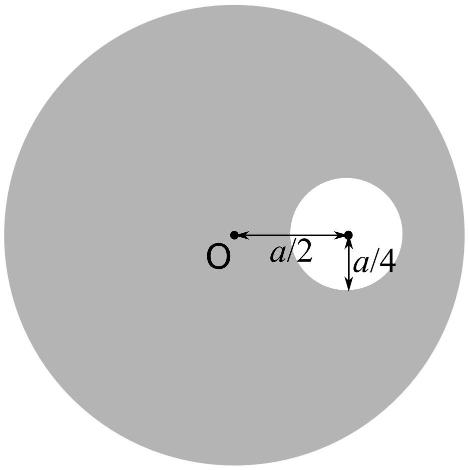
中間試験 4　1.5 kg の剛体がある．剛体上のある点 A を通る軸のまわりに − 70 N·m の力のモーメントが加わっており，角速度 $\omega(t) = -2t$〔rad/s〕 で回転している．この軸が質量中心を通る軸から 4.0 m 離れているとき，質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメントはいくらか．なお，問題文中の軸は全て鉛直方向を向くものとする．

角加速度は　$\dot{\omega} = -2$〔rad/s²〕．よって $I = \dfrac{-70}{-2} = 35$ kg·m².

平行軸の定理より　$35 = I_M + 1.5 \times 4.0^2$

$\therefore I_M = 11$ kg·m²

中間試験 5　半径 a の一様なうすい円板から円がくり抜かれた物体（質量 M）を作製した．くり抜かれた円は，くり抜く前の円板の中心 O から $\frac{a}{2}$ 離れたところを中心とし，半径 $\frac{a}{4}$ の円である．この物体について，O を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよ．ただし，半径 r，質量 m のうすい円板について，質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\dfrac{mr^2}{2}$ である．



くりぬかれた物体の面密度は

$$\rho = \frac{M}{\pi\left(a^2 - a^2/16\right)} = \frac{16M}{15\pi a^2}.$$

くりぬく前のOのまわりの慣性モーメントは，

$$I_1 = \frac{1}{2}M_1 a^2 = \frac{1}{2}\rho\cdot\pi a^2\cdot a^2 = \frac{8}{15}Ma^2.$$

くりぬく部分のOのまわりの慣性モーメントは，

$$I_2 = \frac{1}{2}M_2\left(\frac{a}{4}\right)^2 + M_2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{9}{32}a^2\cdot\rho\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{3}{160}Ma^2.$$

以上より，くりぬかれた物体の慣性モーメントは，

$$I = I_1 - I_2 = \frac{8}{15}Ma^2 - \frac{3}{160}Ma^2$$

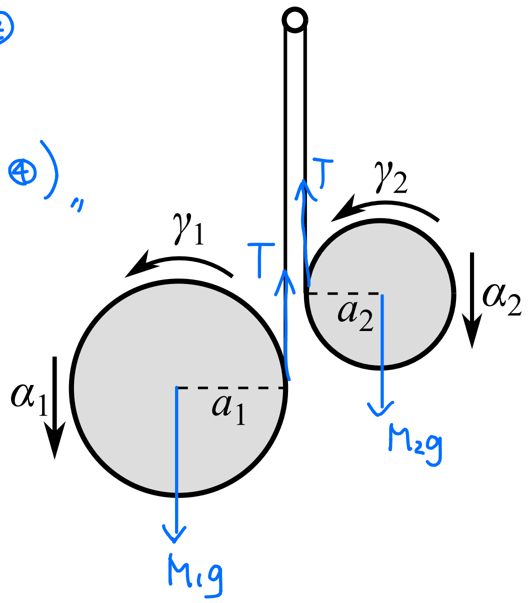
$$= \frac{256-9}{480}Ma^2 = \underline{\underline{\frac{247}{480}Ma^2}}$$

中間試験 6　糸の両端を，質量 M_1，M_2，半径 a_1，a_2 の 2 つの円板に巻きつけ，両円板を同一鉛直面内にして，糸をなめらかな釘にかけて放す．張力を T，質量中心の加速度を α_1，α_2，角加速度を γ_1，γ_2 とする（鉛直下向きを並進運動の正方向とし，反時計回りを回転運動の正方向とする）．重力加速度を g とし，空気抵抗は無視できるものとして次の問いに答えよ．ただし，半径 r，質量 m のうすい円板について，質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{mr^2}{2}$ である．

(1)　両円板の並進運動と回転運動について，それぞれの運動方程式を記せ．

(2)　α_1，α_2，a_1，a_2，γ_1，γ_2 の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　両円板の加速度 α_1，α_2 を，M_1，M_2，g で表せ．



(1) $M_1\alpha_1 = M_1 g - T \cdots ①$, $M_2\alpha_2 = M_2 g - T \cdots ②$

$\frac{1}{2}M_1 a_1^2 \gamma_1 = a_1 T$, $\frac{1}{2}M_2 a_2^2 \gamma_2 = -a_2 T$

$\left(\Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{2T}{M_1 a_1} \cdots ③\right)$　$\left(\Leftrightarrow \gamma_2 = -\frac{2T}{M_2 a_2} \cdots ④\right)$ //

(2) 微小時間での回転角を $d\theta_1, d\theta_2$，落下距離を dx_1, dx_2 とすると，

$dx_1 + dx_2 = a_1 d\theta_1 - a_2 d\theta_2$

$\therefore\ v_1 + v_2 = a_1\omega_1 - a_2\omega_2$

$\therefore\ \underline{\underline{\alpha_1 + \alpha_2 = a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2}} \cdots ⑤$

(3) ①~⑤ の5つの式から $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, T$ を求める:

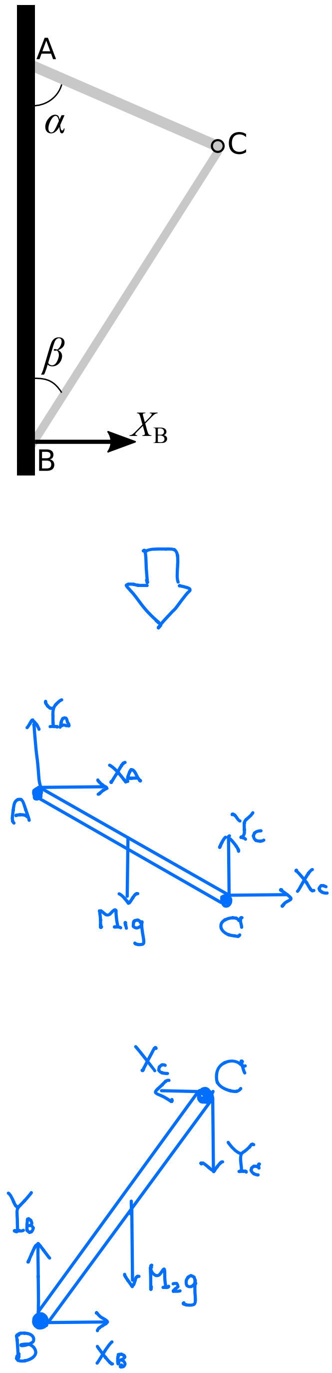
①,②より $M_1\alpha_1 - M_2\alpha_2 = (M_1 - M_2) g \cdots ⑥$

また，③~⑤より，$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2T}{M_1} + \frac{2T}{M_2} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = -2\alpha_1 + 2g - 2\alpha_2 + 2g$

$\therefore\ \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{4}{3} g \cdots ⑦$

⑥と⑦を解くと　$\underline{\underline{\alpha_1 = \frac{3M_1 + M_2}{3(M_1 + M_2)} g \ ,\ \alpha_2 = \frac{M_1 + 3M_2}{3(M_1 + M_2)} g}}$

中間試験 7　質量が M_1，M_2 である一様な 2 本の太さの無視できる棒 AC，BC があり，2 本の棒は C でなめらかな蝶番でつながれている．さらに，A と B を同一鉛直線上の 2 点に固定する．$\angle$CAB $= \alpha$，$\angle$ABC $= \beta$ であるとき，B での壁からの垂直抗力の水平成分が $X_B = \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}(M_1+M_2)g$ と表されることを示せ．ここで，g は重力加速度を表す．



右図のように各点に加わる力を設定する.

棒ACの長さを L_A とすると，力および力のモーメントのつりあいより，

$X_A + X_C = 0$ …① ，$Y_A + Y_C - M_1 g = 0$ …② ，

$\frac{L_1}{2} M_1 g \sin\alpha - L_1 X_A \cos\alpha - L_1 Y_A \sin\alpha = 0$ （Cのまわり）

$\Leftrightarrow M_1 g \sin\alpha - 2X_A \cos\alpha - 2Y_A \sin\alpha = 0$ …③

棒BCの長さを L_B とすると，力および力のモーメントのつりあいより，

$X_B - X_C = 0$ …④ ，$Y_B - Y_C - M_2 g = 0$ …⑤，

$\frac{L_2}{2} M_2 g \sin\beta + L_2 X_B \cos\beta - L_2 Y_B \sin\beta = 0$ （Cのまわり）

$\Leftrightarrow M_2 g \sin\beta + 2X_B \cos\beta - 2Y_B \sin\beta = 0$ …⑥

①と④より $X_A = -X_B$ …⑦，

②と⑤より $Y_A + Y_B = (M_1+M_2)g$ …⑧ である.

③に $\sin\beta$ をかけると，

$M_1 g \sin\alpha\sin\beta - 2X_A \cos\alpha\sin\beta - 2Y_A \sin\alpha\sin\beta = 0$ …③'

⑥に $\sin\alpha$ をかけると，

$M_2 g \sin\alpha\sin\beta + 2X_B \sin\alpha\cos\beta - 2Y_B \sin\alpha\sin\beta = 0$ …⑥'

③'と⑥'を足すと，⑦と⑧より

$-(M_1+M_2) g \sin\alpha\sin\beta + 2X_B \sin(\alpha+\beta) = 0$

$\therefore X_B = \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}(M_1+M_2)g$