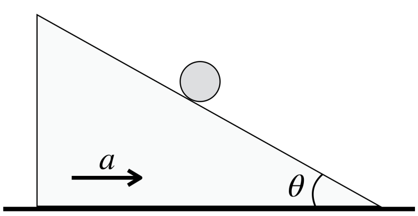
期末試験 1　静かに手をはなすことで質点（質量 m）を落下させた．質点には重力の他に粘性抵抗（抵抗係数 γ）が加わる．手をはなしてから時間 t での質点の速度を v として，次の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g とし，速度の向きは鉛直下向きを正とする．

(1)　落下する質点に加わる粘性抵抗を γ と v を用いて表せ．
(2)　質点の運動方程式を，γ，g，m，v，$\dot{v}$ を用いて表せ．
(3)　前問で求めた運動方程式を解き，v を γ，g，m，t，v を用いて表せ．
(4)　終端速度を γ，g，m を用いて表せ．

期末試験 2　水平面に対する傾きが θ の台があり，台の上に質点（質量 m）が固定されている．図のように台を水平右向きに一定の加速度 a で動かすとき，次の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g とし，摩擦力や空気抵抗は無視できるものとする．

(1)　台に固定された座標系で観測するとき，質点に加わる慣性力を求めよ．ただし，水平右向きを正とする．
(2)　台に固定した座標系で観測すると，固定を外しても質点が静止していた．このときの a を求めよ．

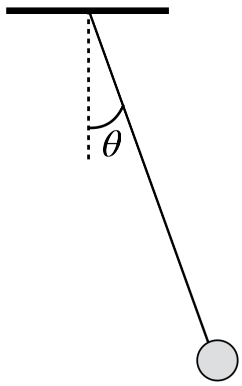


期末試験 3　天井に一端が固定された長さ l の糸の他端に，質点（質量 m）が取り付けられている．糸は伸び縮みせず，糸の質量は無視できるとする．質点はある鉛直面内で運動するものとし，鉛直下向きを基準として反時計まわりを正とする角 θ を用いて表す．次の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g とし，質点には重力と張力以外の力は加わっていないものとせよ．なお，$|\theta| \ll 1$ では $\sin\theta \simeq \theta$ が成り立つ．

(1)　質点の接線方向の加速度を a とするとき，$a = l\ddot{\theta}$ となることを説明せよ．

(2)　$|\theta| \ll 1$ であるとき，$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$（ただし，$\omega > 0$）を満たす．$\omega$ を求めよ．

(3)　時刻 $t = 0$ で $\theta = \theta_0$ から質点を静かにはなす．このとき，θ を，θ_0，ω，t を用いて表せ．



期末試験 4　x-y 平面上で運動する質点（質量 m）がある．運動量の x 成分と y 成分をそれぞれ p_x，p_y として，次の問いに答えよ．なお，極座標 (r, θ) は，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を満たすものとする．

(1)　速度の x 成分と y 成分を $\dot{x}$，$\dot{y}$ とする．p_x と p_y を，m，$\dot{x}$，$\dot{y}$ を用いてそれぞれ表せ．

(2)　p_x と p_y を，m，r，θ，$\dot{r}$，$\dot{\theta}$ を用いてそれぞれ表せ．

(3)　原点まわりの角運動量の z 成分 $l_z = xp_y - yp_x$ を，m，r，θ，$\dot{r}$，$\dot{\theta}$ から必要なものを用いて表せ．

期末試験 5　質点 A（質量 m_A）と質点 B（質量 m_B）がある．はじめ B が静止していて，これに A が速度 v_A で衝突したところ，衝突後に A が静止した．このとき，次の問いに答えよ．

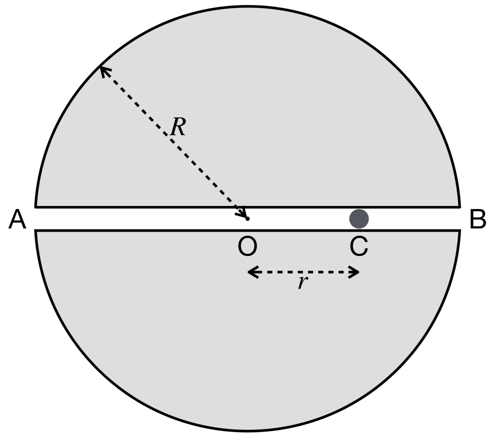
(1)　衝突直後の B の速度を，v_A，m_A，m_B を用いて表せ．

(2)　この衝突のはねかえり係数 e を，m_A と m_B を用いて表せ．

(3)　衝突直前の A の運動エネルギーを K_A とする．衝突直後の B の運動エネルギーを e と K_A を用いて表せ．

期末試験 6　図のように，地球の中心 O を通り，地表の点 A と点 B を結ぶ細長いトンネル内における質点（質量 m）の直線運動を考える．地球を半径 R，一様な密度 ρ の球とみなし，次の問いに答えよ．ここで，トンネル内の点 C（ただし OC$= r$）にある質点が地球から受ける力は，点 O を中心とした半径 r の球の質量が点 O に集まったと仮定した場合に質点が受ける万有引力に等しい．万有引力以外の力は無視できるとき，次の問いに答えよ．なお，万有引力定数を G とし，答えは ρ，G，m，R のうち必要なものを用いて表すこと．また，地球の自転と公転の影響は無視できるものとし，地球の質量 $\dfrac{4}{3}\pi\rho R^3$ は質点の質量 m に比べて十分に大きいとせよ．

(1)　質点が点 C にあるとき，質点にはたらく万有引力の大きさは，定数 k を用いて kr と書ける．k を求めよ．
(2)　点 B から質点を静かにはなしたとき，はじめて点 B に戻るのにかかる時間を求めよ．
(3)　点 B での質点の位置エネルギーを求めよ．ただし，点 O での位置エネルギーを 0 とする．
(4)　点 B から質点を静かにはなしたとき，点 O を通過するときの質点の速さを求めよ．



解答例

物理学 I (2018 年度：鳴海)　　グループ:　　番号:　　名前:

期末試験 1　静かに手をはなすことで質点（質量 m）を落下させた．質点には重力の他に粘性抵抗（抵抗係数 γ）が加わる．手をはなしてから時間 t での質点の速度を v として，次の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g とし，速度の向きは鉛直下向きを正とする．

(1)　落下する質点に加わる粘性抵抗を γ と v を用いて表せ．
(2)　質点の運動方程式を，γ, g, m, v, $\dot{v}$ を用いて表せ．
(3)　前問で求めた運動方程式を解き，v を γ, g, m, t, v を用いて表せ．
(4)　終端速度を γ, g, m を用いて表せ．

(1) $-\gamma v$,　(2) $m\dot{v} = mg - \gamma v$ //

(3) $\dot{v} = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right)$ より $\frac{dv}{v - \frac{mg}{\gamma}} = -\frac{\gamma}{m}dt$

両辺を積分することで $\log\left|v - \frac{mg}{\gamma}\right| = -\frac{\gamma}{m}t + C'$ (C'は定数)

よって $v = \frac{mg}{\gamma} + Ae^{-\frac{\gamma}{m}t}$ (Aは定数).

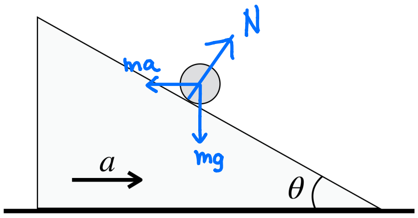
問題文より, $t=0$ で $v=0$. よって $A = -\frac{mg}{\gamma}$.

以上より $v = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$ //

(4) $\frac{mg}{\gamma}$ //

期末試験 2　水平面に対する傾きが θ の台があり，台の上に質点（質量 m）が固定されている．図のように台を水平右向きに一定の加速度 a で動かすとき，次の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g とし，摩擦力や空気抵抗は無視できるものとする．

(1)　台に固定された座標系で観測するとき，質点に加わる慣性力を求めよ．ただし，水平右向きを正とする．
(2)　台に固定した座標系で観測すると，固定を外しても質点が静止していた．このときの a を求めよ．



(1) $-ma$

(2) 水平方向と鉛直方向のつりあいより,

$N\cos\theta = mg$,　$N\sin\theta = ma$

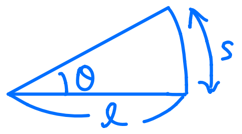
∴ $\frac{mg}{\cos\theta} = \frac{ma}{\sin\theta}$　∴ $a = g\tan\theta$ //

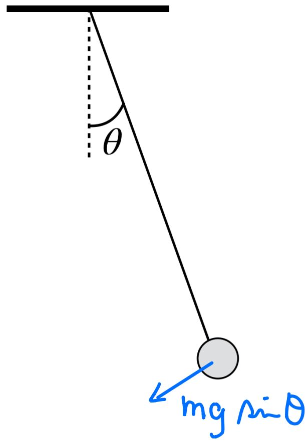
期末試験 3　天井に一端が固定された長さ l の糸の他端に，質点（質量 m）が取り付けられている．糸は伸び縮みせず，糸の質量は無視できるとする．質点はある鉛直面内で運動するものとし，鉛直下向きを基準として反時計まわりを正とする角 θ を用いて表す．次の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g とし，質点には重力と張力以外の力は加わっていないものとせよ．なお，$|\theta| \ll 1$ では $\sin\theta \simeq \theta$ が成り立つ．

(1)　質点の接線方向の加速度を a とするとき，$a = l\ddot{\theta}$ となることを説明せよ．

(2)　$|\theta| \ll 1$ であるとき，$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$（ただし，$\omega > 0$）を満たす．$\omega$ を求めよ．

(3)　時刻 $t = 0$ で $\theta = \theta_0$ から質点を静かにはなす．このとき，θ を，θ_0，ω，t を用いて表せ．





(1)　半径 l の弧の長さ s は，
$s = l\theta$ で表される．
これを2回微分することで $a = l\ddot{\theta}$ //

(2)　質点の接線方向の運動方程式は

$ma = -mg\sin\theta$

(1)より $a = l\ddot{\theta}$ なので　$\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta$.

$|\theta| \ll 1$ のとき $\sin\theta \simeq \theta$ より　$\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{l}\theta$.

$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ と比較すると，$\omega > 0$ より　$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ //

(3)　(2)で得られた式は単振動の運動方程式．

よってその一般解は　$\theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t$（AとBは定数）.

$t = 0$ で　$\theta = \theta_0$，$\dot{\theta} = 0$ なので　$A = \theta_0$，$B = 0$.

よって　$\theta = \theta_0\cos\omega t$ //

期末試験 4　x-y 平面上で運動する質点（質量 m）がある．運動量の x 成分と y 成分をそれぞれ p_x，p_y として，次の問いに答えよ．なお，極座標 (r, θ) は，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を満たすものとする．

(1)　速度の x 成分と y 成分を $\dot{x}$，$\dot{y}$ とする．p_x と p_y を，m，$\dot{x}$，$\dot{y}$ を用いてそれぞれ表せ．
(2)　p_x と p_y を，m，r，θ，$\dot{r}$，$\dot{\theta}$ を用いてそれぞれ表せ．
(3)　原点まわりの角運動量の z 成分 $l_z = xp_y - yp_x$ を，m，r，θ，$\dot{r}$，$\dot{\theta}$ から必要なものを用いて表せ．

(1)　$p_x = m\dot{x}$，　$p_y = m\dot{y}$ //

(2)　$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$，　$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$ より

$p_x = m(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta})$，　$p_y = m(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta})$ //

(3)
$$
\begin{aligned}
l_z &= xp_y - yp_x \\
&= r\cos\theta \cdot m(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta}) - r\sin\theta\cdot m(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta}) \\
&= mr^2\dot{\theta}\cos^2\theta + mr^2\dot{\theta}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$\therefore\ l_z = mr^2\dot{\theta}$ //

期末試験 5　質点 A（質量 m_{A}）と質点 B（質量 m_{B}）がある．はじめ B が静止していて，これに A が速度 v_{A} で衝突したところ，衝突後に A が静止した．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　衝突直後の B の速度を，v_{A}，m_{A}，m_{B} を用いて表せ．
(2)　この衝突のはねかえり係数 e を，m_{A} と m_{B} を用いて表せ．
(3)　衝突直前の A の運動エネルギーを K_{A} とする．衝突直後の B の運動エネルギーを e と K_{A} を用いて表せ．

衝突直後のBの速度をv_B'とする．

(1)　運動量保存の法則より　$m_A v_A = m_B v_B'$　　$\therefore\ v_B' = \dfrac{m_A}{m_B} v_A$ //

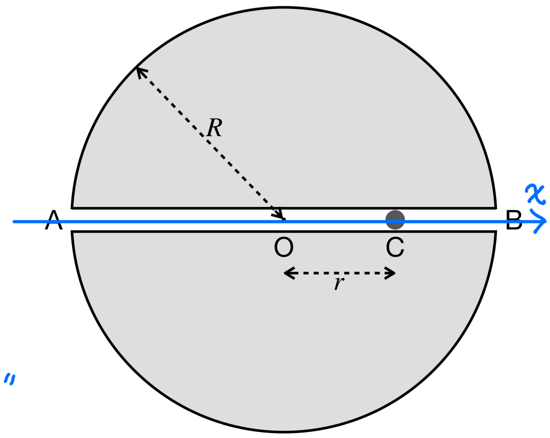
(2)　$e = -\dfrac{0 - v_B'}{v_A - 0} = \dfrac{v_B'}{v_A} = \dfrac{m_A}{m_B}$ //

(3)　衝突直後のBの運動エネルギーK_Bは

$K_B = \dfrac{1}{2} m_B v_B'^2 = \dfrac{1}{2} m_B \left(\dfrac{m_A}{m_B} v_A\right)^2 = \dfrac{m_A}{m_B}\cdot\dfrac{1}{2} m_A v_A^2 = eK_A$ //

期末試験 6　図のように，地球の中心 O を通り，地表の点 A と点 B を結ぶ細長いトンネル内における質点（質量 m）の直線運動を考える．地球を半径 R，一様な密度 ρ の球とみなし，次の問いに答えよ．ここで，トンネル内の点 C（ただし OC$=r$）にある質点が地球から受ける力は，点 O を中心とした半径 r の球の質量が点 O に集まったと仮定した場合に質点が受ける万有引力に等しい．万有引力以外の力は無視できるとき，次の問いに答えよ．なお，万有引力定数を G とし，答えは ρ，G，m，R のうち必要なものを用いて表すこと．また，地球の自転と公転の影響は無視できるものとし，地球の質量 $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$ は質点の質量 m に比べて十分に大きいとせよ．

(1)　質点が点 C にあるとき，質点にはたらく万有引力の大きさは，定数 k を用いて kr と書ける．k を求めよ．
(2)　点 B から質点を静かにはなしたとき，はじめて点 B に戻るのにかかる時間を求めよ．
(3)　点 B での質点の位置エネルギーを求めよ．ただし，点 O での位置エネルギーを 0 とする．
(4)　点 B から質点を静かにはなしたとき，点 O を通過するときの質点の速さを求めよ．



(1)　半径rの球の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ で，
その質量は $\frac{4}{3}\pi\rho r^3$.
よって，万有引力の大きさは
$$G\frac{m\cdot\frac{4}{3}\pi\rho r^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho m G\, r$$
∴ $k=\frac{4}{3}\pi\rho m G$ //

(2)　(1)より，質点の運動方程式は，図のようにx軸をとると，
$m\ddot{x} = -kx$　($k=\frac{4}{3}\pi\rho m G$)．これは単振動の運動方程式．
はじめてBに戻る時間は単振動の周期なので　$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ として
$$T=\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$$ //

(3)　(1)より　$U_B = \int_0^R kr\,dr = \frac{1}{2}kR^2 = \frac{2}{3}\pi\rho m G R^2$.

(4)　力学的エネルギー保存の法則より，点Oでの速さv_0は，
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{2}{3}\pi\rho m G R^2$$
∴ $v_0 = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}}$ //