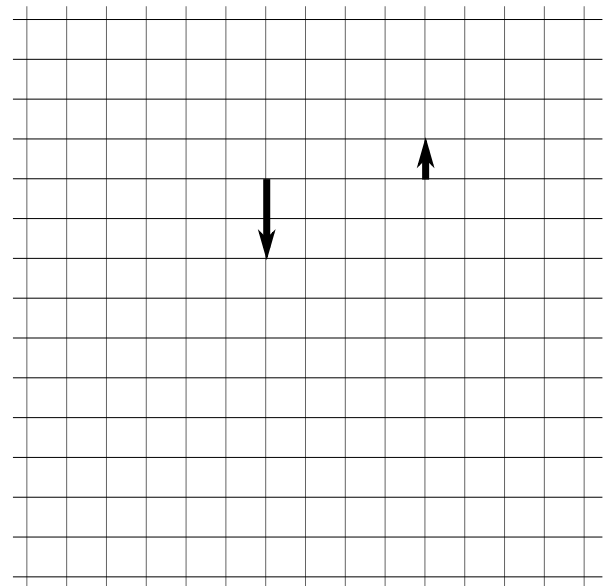


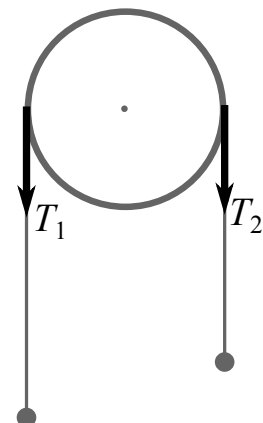
中間試験 1 一様な 1 次元物体の質量中心は $x_M = \frac{1}{L} \int x dx$ (ここで, L は物体の長さ, 積分範囲は物体の領域) である. これを用いて, 長さ L の一様な棒の質量中心を図の座標軸について求めなさい.



中間試験 2 作用線が互いに平行で逆向きな二つの力を一つの力に合成する方法を, 図を用いて説明しなさい.

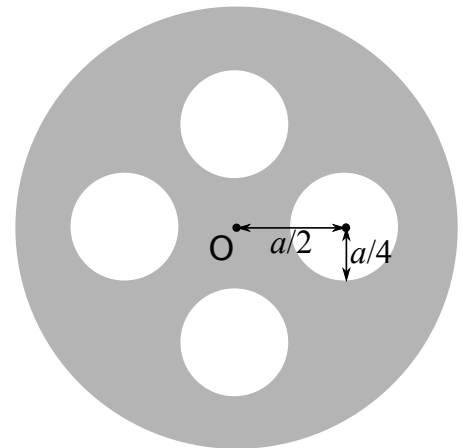


中間試験 3 Atwood の装置について, 滑車の慣性モーメント I が十分に小さいとき滑車の両側の張力 T_1 と T_2 が等しいとみなせることを, 滑車の回転に関する運動方程式を用いて説明せよ.



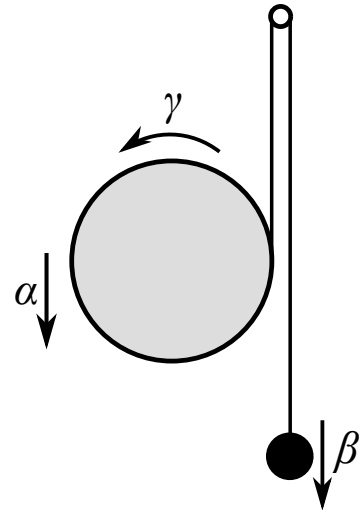
中間試験 4 質量 M の剛体がある。剛体上のある点 A を通る軸のまわりに力のモーメント N が加わることで、剛体は角速度 $\omega(t) = \alpha t + \beta$ (ここで、 α と β は定数) で回転している。点 A を通る軸が質量中心を通る軸から h 離れているとき、質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。なお、問題文中の軸は全て鉛直方向を向くものとする。

中間試験 5 半径 a の一様なうすい円板から 4 つの円がくり抜かれた物体 (質量 M) を作製した。くり抜かれた円は全て、くり抜く前の円板の中心 O から $\frac{a}{2}$ 離れたところを中心とし、半径 $\frac{a}{4}$ の円である。この物体について、 O を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。ただし、半径 r 、質量 m のうすい円板について、質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{mr^2}{2}$ である。



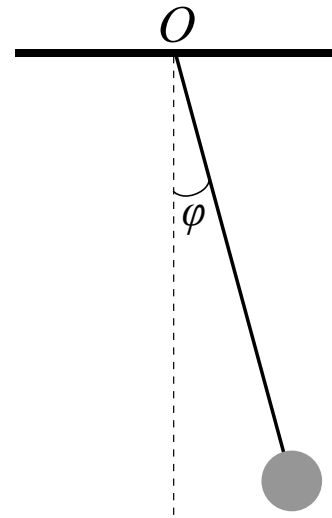
中間試験 6 薄い円板（半径 a 、質量 M ）のまわりに糸を巻きつけ、ほどけた糸の部分をなめらかな水平釘にかけ、糸の端に質量 m の質点をつるしてはなす。張力を T 、円板の質量中心の加速度を α 、角加速度を γ 、質点の加速度を β とする（並進運動の正方向は鉛直下向き、回転運動の正方向は反時計回りとする）。重力加速度の大きさを g とし、空気抵抗は無視できるものとして次の問いに答えなさい。ただし、この円板について、質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{Ma^2}{2}$ である。

- (1) 質点について運動方程式を記せ。
- (2) 円板の並進運動と回転運動について、それぞれの運動方程式を記せ。
- (3) 円板と質点の落下に伴う糸の長さの変化に着目し、 α 、 β 、 γ 、 a の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (4) α 、 β 、 γ 、 T をそれぞれ a 、 g 、 M 、 m を用いて表せ。



中間試験 7 質量の無視できる棒 (長さ L) の一端に一様な球 (半径 a , 質量 M) をつけ、もう一端を固定することで振り子とする。固定点を O , 重力加速度の大きさを g とし, 空気抵抗は無視できるものとして次の問いに答えなさい。ただし, この球について, 中心を通る軸のまわりの慣性モーメントは $I_M = \frac{2}{5}Ma^2$ である。

- (1) 点 O のまわりの力のモーメント N を求めなさい。
- (2) 点 O のまわりの慣性モーメント I を求めなさい。
- (3) 振幅 φ が十分に小さいとき, この振り子の周期を, a , g , L を用いて表せ。その際, φ が十分に小さいとき $\sin \varphi \doteq \varphi$ であることを用いよ。



解答例

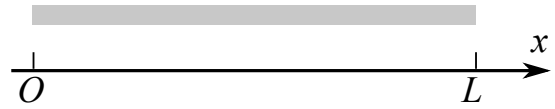
応用物理学 I (2019 年度 : 鳴海)

番号:

名前:

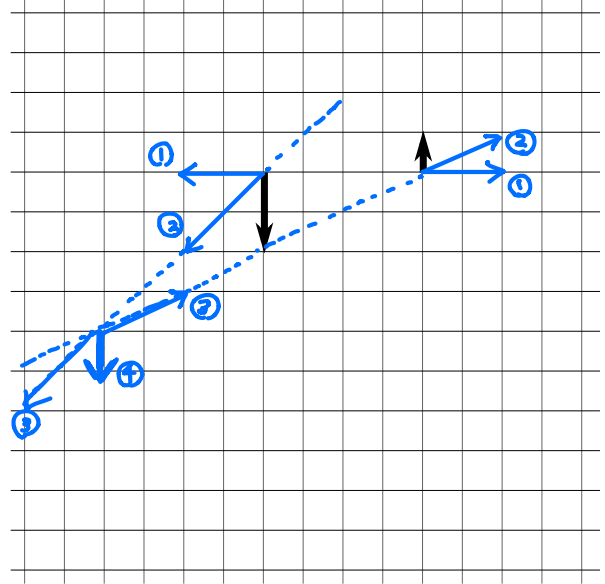
中間試験 1 一様な 1 次元物体の質量中心は $x_M = \frac{1}{L} \int_0^L x dx$ (ここで, L は物体の長さ, 積分範囲は物体の領域) である. これを用いて, 長さ L の一様な棒の質量中心を図の座標軸について求めなさい.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{1}{L} \int_0^L x dx = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^L \\ &= \frac{1}{2} L \text{ ,,} \end{aligned}$$



中間試験 2 作用線が互いに平行で逆向きな二つの力を一つの力に合成する方法を, 図を用いて説明しなさい.

- ① 同一作用線上で見かけの力 (= 合力が 0) とそれぞれに作用させる.
- ② 元の力との合力とそれぞれ考える.
- ③ 作用線の交点に力を移動
- ④ 二つの力の合力が元の二つの力を合成したもの.



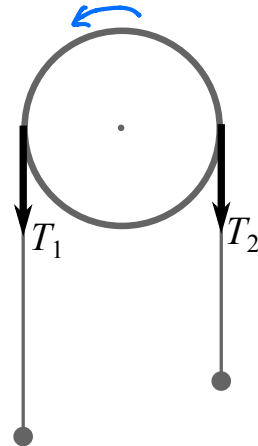
中間試験 3 Atwood の装置について, 滑車の慣性モーメント I が十分に小さいとき滑車の両側の張力 T_1 と T_2 が等しいとみなせることを, 滑車の回転に関する運動方程式を用いて説明せよ.

滑車の半径を a とすると, 回転の運動方程式は

$$I \frac{d\omega}{dt} = aT_1 - aT_2$$

$$I \approx 0 \text{ のとき } aT_1 - aT_2 = 0$$

$$\therefore T_1 = T_2 \text{ ,,}$$



中間試験 4 質量 M の剛体がある。剛体上のある点 A を通る軸のまわりに力のモーメント N が加わることで、剛体は角速度 $\omega(t) = \alpha t + \beta$ (ここで、 α と β は定数) で回転している。点 A を通る軸が質量中心を通る軸から h 離れているとき、質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。なお、問題文中の軸は全て鉛直方向を向くものとする。

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt}(\alpha t + \beta) = \alpha \quad \text{より} \quad I = \frac{N}{\dot{\omega}} = \frac{N}{\alpha}$$

$$\text{平行軸の定理より} \quad I = I_n + Mh^2$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{N}{\alpha} - Mh^2 \quad ,,$$

中間試験 5 半径 a の一様なうすい円板から 4 つの円がくり抜かれた物体 (質量 M) を作製した。くり抜かれた円は全て、くり抜く前の円板の中心 O から $\frac{a}{2}$ 離れたところを中心とし、半径 $\frac{a}{4}$ の円である。この物体について、 O を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。ただし、半径 r 、質量 m のうすい円板について、質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{mr^2}{2}$ である。

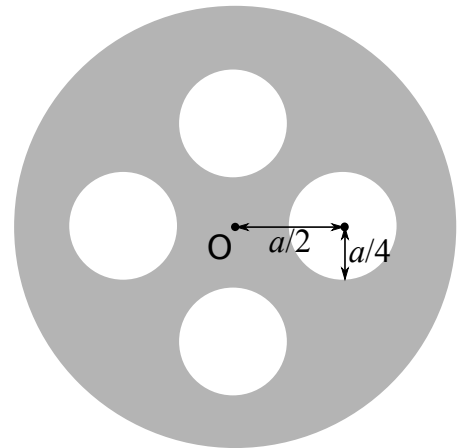
$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} M_1 a^2 \\ I_2 = \frac{M_2 (\frac{a}{4})^2}{2} + M_2 \cdot (\frac{a}{2})^2 = \frac{9}{32} M_2 a^2 \end{cases}$$

$$\therefore \sigma = \frac{M}{\pi a^2 - 4 \times \pi (\frac{a}{4})^2} = \frac{4M}{3\pi a^2} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} M_1 = \sigma \times \pi a^2 = \frac{4}{3} M \\ M_2 = \sigma \times \pi (\frac{a}{4})^2 = \frac{1}{12} M \end{cases}$$

以上より

$$I = I_1 - 4I_2 = \frac{55}{96} M a^2 \quad ,,$$



中間試験 6 薄い円板 (半径 a , 質量 M) のまわりに糸を巻きつけ, ほどけた糸の部分になめらかな水平釘にかけ, 糸の端に質量 m の質点をつるしてはなす. 張力を T , 円板の質量中心の加速度を α , 角加速度を γ , 質点の加速度を β とする (並進運動の正方向は鉛直下向き, 回転運動の正方向は反時計回りとする). 重力加速度の大きさを g とし, 空気抵抗は無視できるものとして次の問いに答えなさい. ただし, この円板について, 質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{Ma^2}{2}$ である.

- (1) 質点について運動方程式を記せ.
- (2) 円板の並進運動と回転運動について, それぞれの運動方程式を記せ.
- (3) 円板と質点の落下に伴う糸の長さの変化に着目し, α, β, γ, a の間に成り立つ関係式を求めよ.
- (4) α, β, γ, T をそれぞれ a, g, M, m を用いて表せ.

$$(1) \quad m\beta = mg - T \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(2) \quad M\alpha = Mg - T \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{2}Ma^2\gamma = aT \quad \dots \textcircled{3}$$

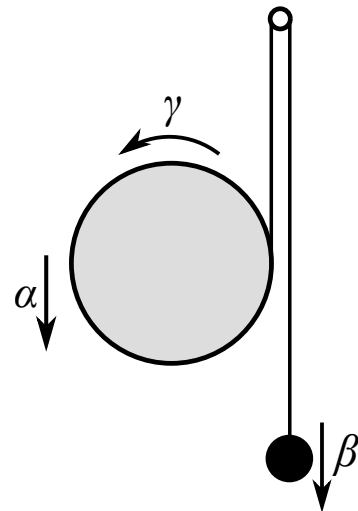
$$(3) \quad dx_1 + dx_2 = a d\theta \text{ より}$$

$$\alpha + \beta = a\gamma \dots \textcircled{4}$$

$$(4) \quad \textcircled{1} \sim \textcircled{4} \text{ より}$$

$$\alpha = \frac{m+M}{3m+M} g, \quad \beta = \frac{3m-M}{3m+M} g$$

$$\gamma = \frac{4m}{a(3m+M)} g, \quad T = \frac{2mM}{3m+M} g$$



中間試験 7 質量の無視できる棒 (長さ L) の一端に一様な球 (半径 a , 質量 M) をつけ、もう一端を固定することで振り子とする。固定点を O 、重力加速度の大きさを g とし、空気抵抗は無視できるものとして次の問いに答えなさい。ただし、この球について、中心を通る軸のまわりの慣性モーメントは $I_M = \frac{2}{5}Ma^2$ である。

- (1) 点 O のまわりの力のモーメント N を求めなさい。
- (2) 点 O のまわりの慣性モーメント I を求めなさい。
- (3) 振幅 φ が十分に小さいとき、この振り子の周期を、 a , g , L を用いて表せ。その際、 φ が十分に小さいとき $\sin \varphi \doteq \varphi$ であることを用いよ。

反時計まわりを正とする。

$$(1) N = -Mg(L+a) \sin \varphi$$

(2) 平行軸の定理より

$$I = \frac{2}{5}Ma^2 + M(L+a)^2$$

(3) 回転の運動方程式は

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = N$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mg(L+a)}{I} \sin \varphi$$

φ が小さいとき、これは単振動の微分方程式となる。

よってその周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg(L+a)}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left\{ \frac{2a^2}{5(L+a)} + L+a \right\}}$$

