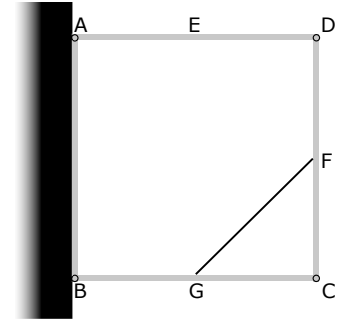


期末試験 1 4 本の一様な等しい棒 (長さ L , 質量 M) を蝶番でなめらかに連結し, AB を鉛直に保って固定する. このとき, BC の中点 G と CD の中点 F とを糸でつなぐだけでは正方形を形成できないことを示せ. なお, 重力加速度の大きさは g としなさい.



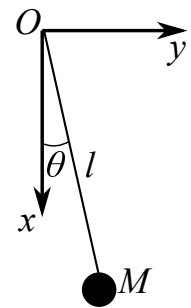
期末試験 2 鉛直上向きを正方向とする z 軸について, 質点 (質量 M) が z 軸に沿って動くように束縛されている. 重力のみを受ける質点の運動について, ラグランジアン $\mathcal{L}(z, \dot{z})$ を書きなさい. なお, 重力による位置エネルギーの基準は $z = 0$ とし, 重力加速度の大きさは g としなさい.

期末試験 3 系のラグランジアンが $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ と表される運動について, 次の問いに答えよ.

- (1) 一般化運動量 p を求めよ.
- (2) ハミルトニアン $\mathcal{H}(x, p)$ を求めよ.
- (3) 正準方程式から, $\frac{dx}{dt}$ と $\frac{dp}{dt}$ をそれぞれ求めなさい.

期末試験 4 点 O で一端を固定した長さ l の棒の他端に質点 (質量 M) を取り付ける. この棒を鉛直面内で回転運動できるようにすると単振り子とみなせる. 図のように, 点 O を原点として x 軸と y 軸をとり, 棒が鉛直線となす角を θ とする. このとき, 質点の座標は $(x, y) = (l \cos \theta, l \sin \theta)$ で表される. 重力加速度の大きさを g として, 次の問いに答えなさい.

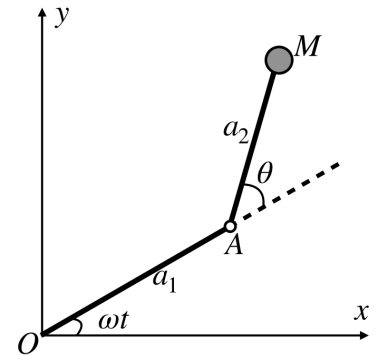
- (1) 重力による位置エネルギーを θ, g, l, M を用いて表しなさい. ただし, 位置エネルギーの基準点は原点 O の高さとしなさい.
- (2) \dot{x} と \dot{y} を, それぞれ $\theta, \dot{\theta}, l$ を用いて表しなさい.
- (3) ラグランジアン $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta})$ を求めなさい.
- (4) ラグランジュの運動方程式から, 単振り子の運動方程式 $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$ を求めなさい.



期末試験 5 静止座標系から見た質点の位置を (x, y) で表す. 同じ質点を, 一定の角速度 ω で回転する座標系から見た位置を (X, Y) で表す. ただし, 回転する座標系の中心は静止座標系の原点とする. それぞれの位置の間には
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$
 という関係がある. このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) \dot{x} と \dot{y} を, それぞれ $\omega, t, X, \dot{X}, Y, \dot{Y}$ を用いて表しなさい.
- (2) 位置エネルギーを $U(X, Y)$ とするとき, ラグランジアン $\mathcal{L}(X, Y, \dot{X}, \dot{Y})$ を求めなさい.
- (3) ラグランジュの運動方程式から, 回転する座標系での運動方程式を求めなさい.

期末試験 6 なめらかな水平面上で、質量の無視できる棒（長さ a_1 ）が原点 O の周りに一定の角速度 ω で回転している。棒の先端 A に別の質量の無視できる棒（長さ a_2 ）の一端をなめらかに固定し、棒の他端に質点（質量 M ）をとりつける。二つの棒が同一水平面上で運動するとき、質点は単振り子と同じ運動をする。この単り振子の角振動数を、 ω , a_1 , a_2 を用いて表しなさい。なお、一般化座標 θ は図のように定義しなさい。また、 $t = 0$ では、点 A が $(x, y) = (a_1, 0)$ に、質点が $(x, y) = (a_1 + a_2, 0)$ にあったものとしなさい。



解答例

応用物理学 I (2019 年度: 鳴海)

番号:

名前:

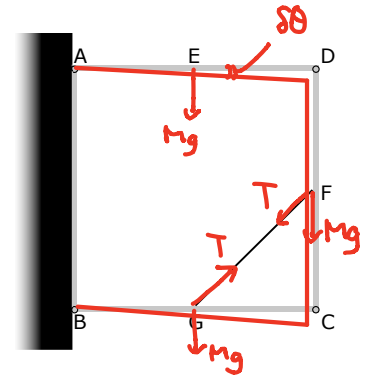
期末試験 1 4 本の一様な等しい棒 (長さ L , 質量 M) を蝶番でなめらかに連結し, AB を鉛直に保って固定する. このとき, BC の中点 G と CD の中点 F とを糸でつなぐだけでは正方形を形成できないことを示せ. なお, 重力加速度の大きさは g としなさい.

力が釣り合っていると仮定すると, 仮想変位を $\delta\theta$ (右回) として仮想仕事の原理より

力の釣り合い $\Leftrightarrow \delta'W = 0$

$$\Leftrightarrow Mg \cdot \frac{L}{2} \delta\theta + MgL \delta\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} T L \delta\theta + Mg \cdot \frac{L}{2} \delta\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} T \cdot \frac{L}{2} \delta\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow T = -4\sqrt{2} Mg$$



張力は負にならないので矛盾.

よって力は釣り合っておらず, 正方形は形成できないことが分かる

期末試験 2 鉛直上向きを正方向とする z 軸について, 質点 (質量 M) が z 軸に沿って動くように束縛されている. 重力のみを受ける質点の運動について, ラグランジアン $\mathcal{L}(z, \dot{z})$ を書きなさい. なお, 重力による位置エネルギーの基準は $z = 0$ とし, 重力加速度の大きさは g としなさい.

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - Mgz$$

期末試験 3 系のラグランジアンが $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$ と表される運動について, 次の問いに答えよ.

- (1) 一般化運動量 p を求めよ.
- (2) ハミルトニアン $\mathcal{H}(x, p)$ を求めよ.
- (3) 正準方程式から, $\frac{dx}{dt}$ と $\frac{dp}{dt}$ をそれぞれ求めなさい.

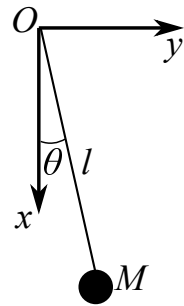
$$(1) \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M \dot{x}, \quad (\text{つまり } \dot{x} = \frac{p}{M})$$

$$(2) \quad \mathcal{H} = p \dot{x} - \mathcal{L} = p \cdot \frac{p}{M} - \frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{p}{M}\right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} kx^2$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{M}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -kx$$

期末試験 4 点 O で一端を固定した長さ l の棒の他端に質点 (質量 M) を取り付ける. この棒を鉛直面内で回転運動できるようにすると単振り子とみなせる. 図のように, 点 O を原点として x 軸と y 軸をとり, 棒が鉛直線となす角を θ とする. このとき, 質点の座標は $(x, y) = (l \cos \theta, l \sin \theta)$ で表される. 重力加速度の大きさを g として, 次の問いに答えなさい.

- (1) 重力による位置エネルギーを θ, g, l, M を用いて表しなさい. ただし, 位置エネルギーの基準点は原点 O の高さとしなさい.
- (2) \dot{x} と \dot{y} を, それぞれ $\theta, \dot{\theta}, l$ を用いて表しなさい.
- (3) ラグランジアン $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta})$ を求めなさい.
- (4) ラグランジュの運動方程式から, 単振り子の運動方程式 $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$ を求めなさい.



$$(1) \quad \dot{x} = -l \sin \theta \cdot \dot{\theta}, \quad \dot{y} = l \cos \theta \cdot \dot{\theta} \quad ,,$$

$$(2) \quad \text{原点 } O \text{ の高さを基準とすると } U = -Mg l \cos \theta \quad ,,$$

$$\text{(最下点の高さを基準とすると } U = Mg l (1 - \cos \theta) \quad ,,$$

$$(3) \quad \text{運動エネルギーは } K = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2$$

$$\text{よって } \mathcal{L} = \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2 + Mg l \cos \theta \quad \left(\text{or } \mathcal{L} = \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2 - Mg l (1 - \cos \theta) \right) \quad ,,$$

$$(4) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = -Mg l \sin \theta - \frac{d}{dt} (M l^2 \dot{\theta})$$

$$\therefore \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

期末試験 5 静止座標系から見た質点の位置を (x, y) で表す. 同じ質点を, 一定の角速度 ω で回転する座標系から見た位置を (X, Y) で表す. ただし, 回転する座標系の中心は静止座標系の原点とする. それぞれの位置の間には $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ という関係がある. このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) \dot{x} と \dot{y} を, それぞれ $\omega, t, X, \dot{X}, Y, \dot{Y}$ を用いて表しなさい.
- (2) 位置エネルギーを $U(X, Y)$ とするとき, ラグランジアン $\mathcal{L}(X, Y, \dot{X}, \dot{Y})$ を求めなさい.
- (3) ラグランジュの運動方程式から, 回転する座標系での運動方程式を求めなさい.

$$(1) \quad x = X \cos \omega t - Y \sin \omega t, \quad y = X \sin \omega t + Y \cos \omega t.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{X} \cos \omega t - \omega X \sin \omega t - \dot{Y} \sin \omega t - \omega Y \cos \omega t \\ \dot{y} = \dot{X} \sin \omega t + \omega X \cos \omega t + \dot{Y} \cos \omega t - \omega Y \sin \omega t, \end{cases}$$

(2) 運動エネルギーは,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \omega^2(X^2 + Y^2) - 2\omega\dot{X}Y + 2\omega X\dot{Y} \quad *1)$$

$$K = \frac{M}{2} \left\{ \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \omega^2(X^2 + Y^2) - 2\omega\dot{X}Y + 2\omega X\dot{Y} \right\}$$

$$\odot \quad \mathcal{L} = \frac{M}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{M\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) - M\omega(\dot{X}Y - X\dot{Y}) - U(X, Y) \quad "$$

$$(3) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = M\omega^2 X + M\omega\dot{Y} - \frac{\partial U}{\partial X}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = M\dot{X} - M\omega Y$$

$$\Rightarrow M\omega^2 X + M\omega\dot{Y} - \frac{\partial U}{\partial X} - (M\ddot{X} - M\omega\dot{Y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow M\ddot{X} = M\omega^2 X + 2M\omega\dot{Y} - \frac{\partial U}{\partial X} \quad "$$

$$\text{また, } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = M\omega^2 Y - M\omega\dot{X} - \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}} = M\dot{Y} + M\omega X$$

$$\Rightarrow M\omega^2 Y - M\omega\dot{X} - \frac{\partial U}{\partial Y} - (M\ddot{Y} + M\omega\dot{X}) = 0$$

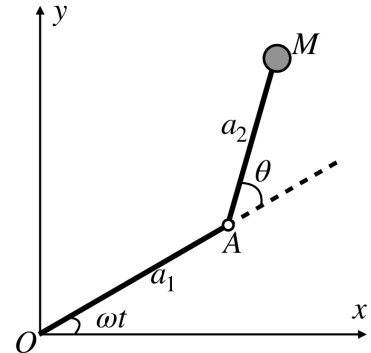
$$\Leftrightarrow M\ddot{Y} = M\omega^2 Y - 2M\omega\dot{X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad "$$

* 右辺第一項が遠心力, 第二項がコリオリ力を表す.

期末試験 6 なめらかな水平面上で、質量の無視できる棒（長さ a_1 ）が原点 O の周りに一定の角速度 ω で回転している。棒の先端 A に別の質量の無視できる棒（長さ a_2 ）の一端をなめらかに固定し、棒の他端に質点（質量 M ）をとりつける。二つの棒が同一水平面上で運動するとき、質点は単振り子と同じ運動をする。この単り振り子の角振動数を、 ω , a_1 , a_2 を用いて表しなさい。なお、一般化座標 θ は図のように定義しなさい。また、 $t = 0$ では、点 A が $(x, y) = (a_1, 0)$ に、質点が $(x, y) = (a_1 + a_2, 0)$ にあったものとしなさい。

質点の座標は

$$\begin{cases} x = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos(\omega t + \theta) \\ y = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin(\omega t + \theta) \end{cases}$$



よって

$$\begin{cases} \dot{x} = -a_1 \omega \sin \omega t - a_2 (\omega + \dot{\theta}) \sin(\omega t + \theta) \\ \dot{y} = a_1 \omega \cos \omega t + a_2 (\omega + \dot{\theta}) \cos(\omega t + \theta) \end{cases}$$

よって 質点の運動エネルギーは

$$K = \frac{M}{2} \left\{ a_1^2 \omega^2 + a_2^2 (\omega + \dot{\theta})^2 + 2a_1 a_2 \omega (\omega + \dot{\theta}) \cos \theta \right\}$$

質点に力は加わらないので $\mathcal{L} = K$

ラグランジアンによる運動方程式より、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -M a_1 a_2 \omega (\omega + \dot{\theta}) \sin \theta - \frac{d}{dt} \left\{ M a_2^2 (\omega + \dot{\theta}) + M a_1 a_2 \omega \cos \theta \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow -M a_1 a_2 \omega^2 \sin \theta - M a_1 a_2 \omega \dot{\theta} \sin \theta - M a_2^2 \ddot{\theta} + M a_1 a_2 \omega \sin \theta \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{a_1}{a_2} \omega^2 \sin \theta \quad \text{よって 角振動数は } \Omega^2 = \frac{a_1}{a_2} \omega^2$$

$$\therefore \Omega = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \omega$$