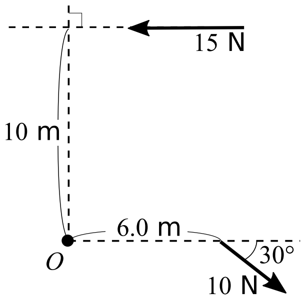
期末試験 1　一端が天井に固定され，他端に質点（質量 M）が取り付けられているバネ（バネ定数 k，自然長 L）がある．バネを鉛直下向きに伸ばして手をはなすと質点は振動した．時刻 t での質点の位置を $y(t)$ として，次の問いに答えなさい．ただし，$y(t)$ の原点は天井の高さとし，鉛直下向きを正としなさい．

(1)　この運動の運動方程式を書きなさい．

(2)　$Y(t) = y(t) - L - \dfrac{Mg}{k}$ とおくとき，$Y(t)$ の一般解を書きなさい．

期末試験 2　図のような二つの力が加わっているとき，点 O を中心とする力のモーメントの合計を求めなさい．ただし，紙面を x-y 平面とし，紙面手前方向を z 方向としなさい．



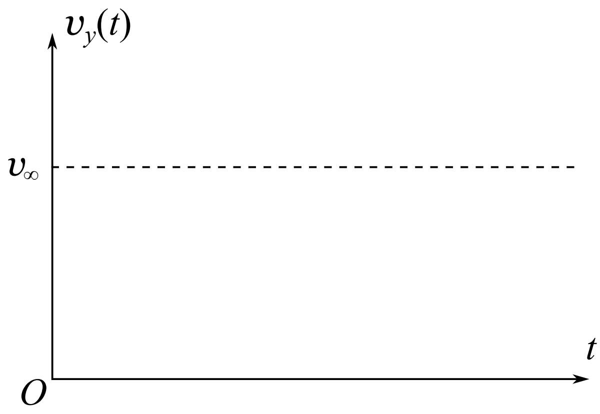
期末試験 3　質点 A（質量 M_A）が，静止している質点 B に速度 v_A で衝突したところ，衝突後に A が静止した．この衝突のはねかえり係数を e として，次の問いに答えなさい．

(1)　衝突後の B の速度を e と v_A を用いて表しなさい．

(2)　衝突前後での系の運動エネルギーの変化を求めなさい．

期末試験 4　質点（質量 M）を初速度 0 で落下させる．質点には重力と粘性抵抗（抵抗係数 γ）がはたらく．時刻 t での質点の速度を $v_y(t)$ で表すとき，次の問いに答えなさい．ただし，鉛直下向きを正の方向としなさい．

(1)　この運動の運動方程式から，終端速度 v_∞ を求めなさい．
(2)　$v_y(t)$ を求めなさい．
(3)　$v_y(t)$ の時間変化をグラフに図示しなさい．



期末試験 5　一定の加速度 α で鉛直方向に運動するエレベータ内で，床から h の高さから，質点（質量 M）を初速度 v_0 で水平に発射した．発射点を原点，発射方向を x 方向，鉛直上向きを y 方向として，次の問いに答えなさい．

(1)　エレベータ内の観測者から見た運動の運動方程式を，x 方向と y 方向のそれぞれについて書きなさい．
(2)　発射してから時間 t 経過したとき，エレベータ内の観測者から見た質点の位置 $(x(t), y(t))$ を求めなさい．

期末試験 6　$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = y^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ はそれぞれ x 方向と y 方向を向く単位ベクトルであるとする．

(1)　$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を，x，y，dx，dy から必要なものを用いて表しなさい．

(2)　原点 O から経路 C： $y = 2x$ で点 $A(2, 4)$ に至る線積分 $W = \displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めなさい．

期末試験 7　なめらかな曲面上で運動する質点（質量 M）を考える．質点は，高さ h_{A} の点 A を速さ v_{A} で通過し，その後，高さ h_{B} の点 B を通過した．このとき，次の問いに答えなさい．

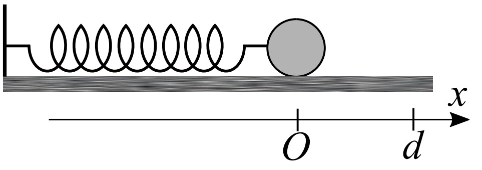
(1)　点 A での質点の運動エネルギーを書きなさい．

(2)　点 B での重力による位置エネルギーを書きなさい．ただし，高さ 0 を位置エネルギーの基準とする．

(3)　点 B での質点の速さを求めなさい

期末試験 8　バネ（バネ定数 k）の一端に質点（質量 M）をつけてあらい水平面に置き，バネの他端を壁に固定する．バネが自然長であるときの質点の位置を原点とし，壁と反対の方向を正の方向とする x 軸をとる．質点を原点から $x = d$（ただし $d > 0$）の位置 P まで移動させて静かにはなしたところ，質点は負方向に向かって運動をはじめ，原点を通り過ぎて点 Q で一旦静止した後，もう一度原点を通り過ぎて点 R で一旦静止した．このとき，次の問いに答えなさい．なお，動摩擦力の大きさは垂直抗力の大きさに比例し，以下ではその比例係数（動摩擦係数）を μ としなさい．

(1) 床から質点に加わる垂直抗力を，g と M を用いて表しなさい．
(2) 正方向に運動している場合と負方向に運動している場合のそれぞれについて運動方程式を書きなさい．
(3) 質点が点 P から点 Q まで移動するのにかかる時間を求めなさい．
(4) 点 R の座標を求めなさい．
(5) 質点はその後，もう一度往復運動を行って，最初の位置から 2 往復した位置 S で静止し，そのまま動かなくなった．点 S の座標が $x = d/5$ であるとき，定数 μ を k，M，g，d を用いて表しなさい．

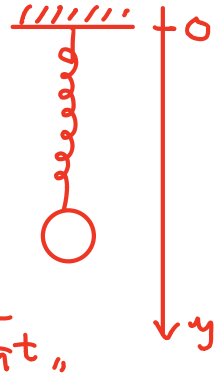


解答例

期末試験 1　一端が天井に固定され，他端に質点（質量 M）が取り付けられているバネ（バネ定数 k，自然長 L）がある．バネを鉛直下向きに伸ばして手をはなすと質点は振動した．時刻 t での質点の位置を $y(t)$ として，次の問いに答えなさい．ただし，$y(t)$ の原点は天井の高さとし，鉛直下向きを正としなさい．

(1)　この運動の運動方程式を書きなさい．

(2)　$Y(t) = y(t) - L - \dfrac{Mg}{k}$ とおくとき，$Y(t)$ の一般解を書きなさい．



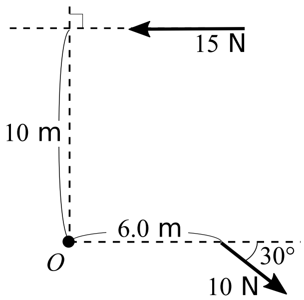
(1) $M\dfrac{d^2y}{dt^2} = -k(y-L) + Mg$ //

(2) (1)を変形すると $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}\left(y - L - \dfrac{Mg}{k}\right)$.

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2Y}{dt^2}$ より $\dfrac{d^2Y}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}Y$. これの一般解は

$Y = A\cos\sqrt{\dfrac{k}{M}}t + B\sin\sqrt{\dfrac{k}{M}}t$ //

期末試験 2　図のような二つの力が加わっているとき，点 O を中心とする力のモーメントの合計を求めなさい．ただし，紙面を x-y 平面とし，紙面手前方向を z 方向としなさい．



力のモーメント $\boldsymbol{N} = (N_x, N_y, N_z)$ について

$N_x = N_y = 0$

$N_z = 10 \times 15 \times \sin 90^\circ - 6.0 \times 10 \times \sin 30^\circ$

$= 120$ N·m //

期末試験 3　質点 A（質量 M_A）が，静止している質点 B に速度 v_A で衝突したところ，衝突後に A が静止した．この衝突のはねかえり係数を e として，次の問いに答えなさい．

(1)　衝突後の B の速度を e と v_A を用いて表しなさい．

(2)　衝突前後での系の運動エネルギーの変化を求めなさい．

(1) はねかえり係数の定義より，$-\dfrac{0 - v_B}{v_A - 0} = e$　∴ $v_B = e v_A$ //

(2) 衝突前後の運動エネルギーは $K_{前} = \dfrac{1}{2}M_A v_A^2$，$K_{後} = \dfrac{1}{2}M_B v_B^2$

運動量保存則より $M_A v_A = M_B v_B$　∴ $M_B = M_A \dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{M_A}{e}$

よって $\Delta K = K_{後} - K_{前} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{M_A}{e}\cdot(e v_A)^2 - \dfrac{1}{2}M_A v_A^2 = -\dfrac{1}{2}M_A v_A^2(1-e)$ //

期末試験 4　質点（質量 M）を初速度 0 で落下させる．質点には重力と粘性抵抗（抵抗係数 γ）がはたらく．時刻 t での質点の速度を $v_y(t)$ で表すとき，次の問いに答えなさい．ただし，鉛直下向きを正の方向としなさい．

(1)　この運動の運動方程式から，終端速度 v_∞ を求めなさい．
(2)　$v_y(t)$ を求めなさい．
(3)　$v_y(t)$ の時間変化をグラフに図示しなさい．

(1) 運動方程式は $M\frac{dv_y}{dt} = Mg - \gamma v_y$．$\frac{dv_\infty}{dt}=0$ より $v_\infty = \frac{Mg}{\gamma}$ //

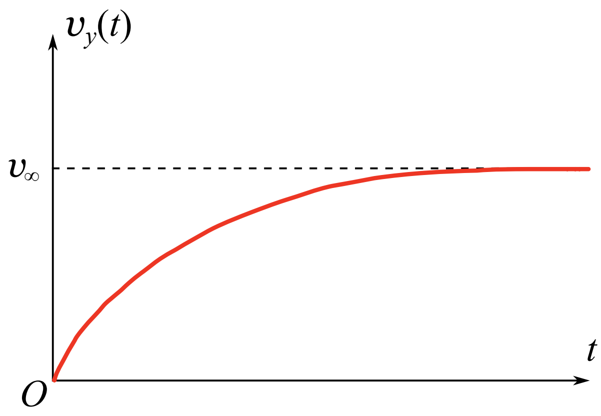
(2) $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\gamma}{M}(v_y - v_\infty)$ を解くと

$v_y = v_\infty + Ae^{-\frac{\gamma}{M}t}$

初期条件より $A = -v_\infty$

よって $v_y(t) = v_\infty(1-e^{-\frac{\gamma}{M}t})$.

(3) 指数関数の単調性を踏まえると右のようになる。



期末試験 5　一定の加速度 α で鉛直方向に運動するエレベータ内で，床から h の高さから，質点（質量 M）を初速度 v_0 で水平に発射した．発射点を原点，発射方向を x 方向，鉛直上向きを y 方向として，次の問いに答えなさい．

(1)　エレベータ内の観測者から見た運動の運動方程式を，x 方向と y 方向のそれぞれについて書きなさい．
(2)　発射してから時間 t 経過したとき，エレベータ内の観測者から見た質点の位置 $(x(t), y(t))$ を求めなさい．

(1) エレベータは一定加速度 α で運動しているので，慣性力をふまえて

$M\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $M\frac{d^2y}{dt^2} = -Mg - M\alpha$ //

(2) 運動方程式を初期条件を考慮して解くと

$v_x = v_0$, $v_y = -(g+\alpha)t$

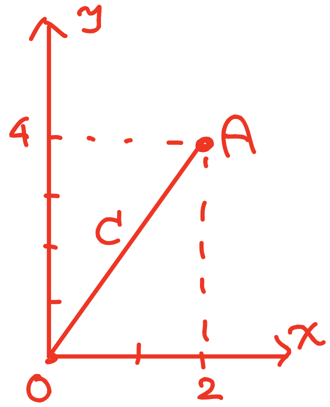
$\Rightarrow x = v_0 t$, $y = -\frac{1}{2}(g+\alpha)t^2 + h$ //

期末試験 6　$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = y^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ はそれぞれ x 方向と y 方向を向く単位ベクトルであるとする．

(1)　$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ を，x，y，dx，dy から必要なものを用いて表しなさい．

(2)　原点 O から経路 C： $y = 2x$ で点 $A(2,4)$ に至る線積分 $W = \displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めなさい．

(1) $\mathbb{F}(\mathbb{r})\cdot d\mathbb{r} = y^2 dx + 2xy\,dy$



(2) 経路C上では $y = 2x$ より，

$$\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \frac{1}{2}y^2 dy + y^2 dy = \frac{3}{2}y^2 dy$$

$$\therefore\ W = \int_0^4 \frac{3}{2}y^2 dy = \frac{1}{2}\left[y^3\right]_0^4 = 32 \,/\!/$$

期末試験 7　なめらかな曲面上で運動する質点（質量 M）を考える．質点は，高さ h_{A} の点 A を速さ v_{A} で通過し，その後，高さ h_{B} の点 B を通過した．このとき，次の問いに答えなさい．

(1)　点 A での質点の運動エネルギーを書きなさい．

(2)　点 B での重力による位置エネルギーを書きなさい．ただし，高さ 0 を位置エネルギーの基準とする．

(3)　点 B での質点の速さを求めなさい

(1) 点Aでの運動エネルギーは $\frac{1}{2}Mv_A^2$ //

(2) 点Bでの位置エネルギーは，高さ0を基準として Mgh_B //

(3) 力学的エネルギー保存則より，点Bでの速さ v_B は

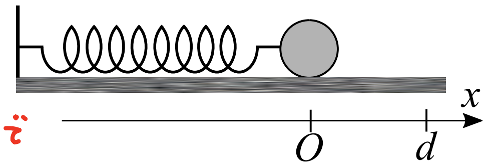
$$\frac{1}{2}Mv_A^2 + Mgh_A = \frac{1}{2}Mv_B^2 + Mgh_B$$

$$\Leftrightarrow\quad v_B^2 = v_A^2 + 2g(h_A - h_B)$$

$v_B > 0$ より　$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g(h_A - h_B)}$ //

期末試験 8　バネ（バネ定数 k）の一端に質点（質量 M）をつけてあらい水平面に置き，バネの他端を壁に固定する．バネが自然長であるときの質点の位置を原点とし，壁と反対の方向を正の方向とする x 軸をとる．質点を原点から $x = d$（ただし $d > 0$）の位置 P まで移動させて静かにはなしたところ，質点は負方向に向かって運動をはじめ，原点を通り過ぎて点 Q で一旦静止した後，もう一度原点を通り過ぎて点 R で一旦静止した．このとき，次の問いに答えなさい．なお，動摩擦力の大きさは垂直抗力の大きさに比例し，以下ではその比例係数（動摩擦係数）を μ としなさい．

(1)　床から質点に加わる垂直抗力を，g と M を用いて表しなさい．
(2)　正方向に運動している場合と負方向に運動している場合のそれぞれについて運動方程式を書きなさい．
(3)　質点が点 P から点 Q まで移動するのにかかる時間を求めなさい．
(4)　点 R の座標を求めなさい．
(5)　質点はその後，もう一度往復運動を行って，最初の位置から 2 往復した位置 S で静止し，そのまま動かなくなった．点 S の座標が $x = d/5$ であるとき，定数 μ を k，M，g，d を用いて表しなさい．



(1) 力のつりあいより　$N = Mg$

(2) 正方向では，摩擦が負方向にはたらくので

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu Mg = -k\left(x + \frac{\mu Mg}{k}\right) //$$

負方向では逆なので　$M\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \mu Mg = -k\left(x - \frac{\mu Mg}{k}\right) //$

(3) 周期の半分に相当するので　$\pi\sqrt{\frac{M}{k}} //$

(4) 点Qの座標を x_Q とすると PとQの中点が振動中心なので

$$\frac{d + x_Q}{2} = \frac{\mu Mg}{k} \iff x_Q = -d + \frac{2\mu Mg}{k}$$

QとRについても同様なので Rの座標を x_R とすると

$$\frac{x_Q + x_R}{2} = -\frac{\mu Mg}{k} \iff x_R = -x_Q - \frac{2\mu Mg}{k} = d - \frac{4\mu Mg}{k}$$

(5) (4)と同様に考えると，Sの座標は $x_S = d - \frac{8\mu Mg}{k}$

これが $\frac{d}{5}$ に等しいことから

$$d - \frac{8\mu Mg}{k} = \frac{d}{5} \iff \mu = \frac{kd}{10Mg} //$$