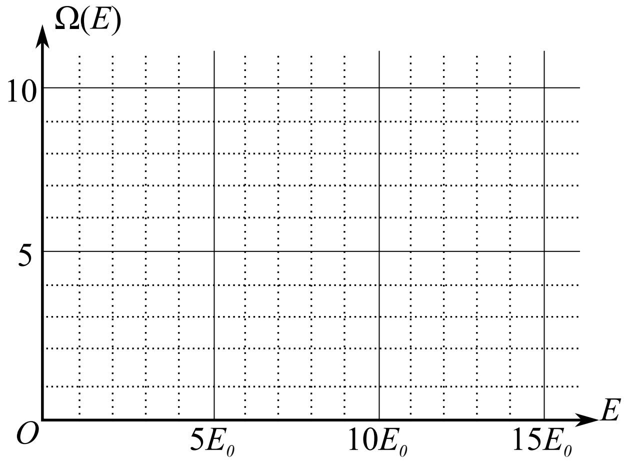
中間試験 1　それぞれの面に「0」,「2」と記されたコインを投げる．出た面に記された数を確率変数 $\hat{f}$ とする．

(1)　$\hat{f}$ の期待値 $\left\langle \hat{f} \right\rangle$ を求めなさい．

(2)　ゆらぎ（標準偏差）$\sigma = \sqrt{\left\langle \hat{f}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{f} \right\rangle^2}$ を求めなさい．

中間試験 2　エネルギー固有値が $E_{(n_x,n_y)} = E_0 \left(n_x^2 + 2n_y^2 \right)$（ただし，$n_x$ と n_y と n_z は自然数，E_0 は正の定数）で表されるとき，状態数 $\Omega(E)$ を $0 \leq E \leq 15E_0$ についてグラフに表しなさい．



中間試験 3　ある孤立系の状態数が $\Omega(E) = 10^{(E/E_0)^4}$（ただし，$E_0$ は正の定数）で表されるとする． 系のエネルギーが $2E_0$ であるとき，エネルギー固有状態 i が実現する確率 p_i を近似的に求めなさい．ここでは，エネルギー固有値 E_i が $E_0 < E_i < 2E_0$ を満たすエネルギー固有状態 i は共通のマクロな性質を持つとする．

中間試験 4　単原子分子理想気体（原子の質量 M，体積 V，粒子数 N，逆温度 β，温度 T）は，低密度では分配関数が $Z = \dfrac{V^N}{N!}\left(\dfrac{M}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3N/2}$（ただし，$\hbar$ はディラック定数）で表される．このとき，理想気体の状態方程式を導出しなさい．なお，圧力が $P = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial}{\partial V}\log Z$ と表されることは既知とし，ボルツマン定数を k_{B} としなさい．

中間試験 5　エネルギー固有値が $E_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\varepsilon_0$（ただし，$n$ は 0 以上の整数，ε_0 は正の定数）と表される等温系（逆温度 β）について，次の問いに答えなさい．

(1)　分配関数が $Z = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_0\beta}}{1 - e^{-\varepsilon_0\beta}}$ と表されることを示しなさい．ただし，$|r| < 1$ を満たす r について，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ であることは断りなく用いて良い．

(2)　内部エネルギーを ε_0 と β を用いて表しなさい．ただし，内部エネルギーが $U = -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\log Z$ と表されることは既知としなさい．

(3)　ボルツマン定数を k_{B} として，比熱 $C = \dfrac{dU}{dT}$ を ε_0，β，k_{B} を用いて表しなさい．

中間試験 6　等温系 (逆温度 β) にある一つの原子を考える．この原子は，エネルギー固有値が $E_1 = \dfrac{1}{2}h\nu$ であるエネルギー固有状態（状態 1）と，$E_2 = \dfrac{3}{2}h\nu$ であるエネルギー固有状態（状態 2）の二つの状態のいずれかのみが実現する（ただし，h はプランク定数，ν は振動数を表す正の定数）．このとき，次の問いに答えなさい．

(1)　分配関数を求めなさい．

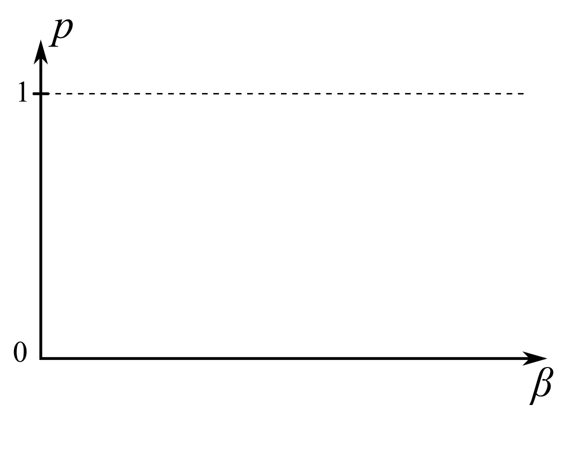
(2)　状態 i（$i = 1, 2$）が出現する確率を p_i と表す．p_1 と p_2 を，β，ν，h を用いて表しなさい．

(3)　$\beta \to 0$ と $\beta \to \infty$ について，p_1 と p_2 の値を求めなさい．

(4)　β に対して，p_1 は単調増加，p_2 は単調減少することを示しなさい．

(5)　p_1 と p_2 をグラフに表しなさい．ただし，$\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial \beta^2} < 0$，$\dfrac{\partial^2 p_2}{\partial \beta^2} > 0$ であることは既知としなさい．

(6)　系の内部エネルギー U を，β，ν，h を用いて表しなさい．



中間試験 7　逆温度 β の環境下で，下端に質量 M の質点がついた細長いゴムが，固定点 A から吊るされている．ゴムは高分子が連なってできていることから，ゴムに対する簡単なモデルとして，質量の無視できる N 本の短い棒（長さ a）が連なった 1 次元鎖を考える．棒は鉛直方向に対して下向きと上向きのいずれかをとることが可能とする．図は $N = 14$ のときの一例で，矢印が棒を表す．N 個の棒に上端から順に $1, \ldots, N$ と番号をつけ，下向きのとき $x_i = a$，上向きのとき $x_i = -a$ となる変数 x_i（$i = 1, \ldots, N$）を考える（図の例では，$x_1 = x_2 = a$，$x_3 = -a$，$x_4 = a$ など）．重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい．

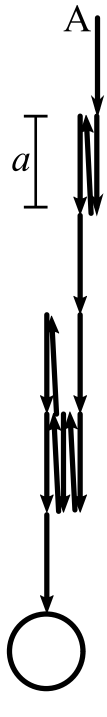
(1) $N = 1$ のとき，質点の位置エネルギーを g，M，x_1 を用いて表しなさい．ただし，点 A の高さの位置エネルギーを 0 とする．

(2) $N = 1$ のとき，棒が上を向く確率 p_{u} と下を向く確率 p_{d} を，それぞれ β，a，g，M を用いて表しなさい．ただし，系のエネルギーは質点の位置エネルギーと等しいとしなさい．

(3) $N = 1$ のとき，x_1 の平均値を β，a，g，M を用いて表しなさい．

(4) 任意の N に対して，ゴムの上端から下端までの距離の平均値を β，a，g，M，N を用いて表しなさい．それぞれの棒は独立に動くことができることを考慮しなさい．

(5) $\beta M g a \ll 1$ という条件下では，ゴムのバネ定数が温度に比例することを説明しなさい．



中間試験 1　それぞれの面に「0」,「2」と記されたコインを投げる．出た面に記された数を確率変数 $\hat{f}$ とする．

(1)　$\hat{f}$ の期待値 $\left\langle \hat{f} \right\rangle$ を求めなさい．

(2)　ゆらぎ（標準偏差）$\sigma = \sqrt{\left\langle \hat{f}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{f} \right\rangle^2}$ を求めなさい．

(1) $\langle \hat{f} \rangle = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ //

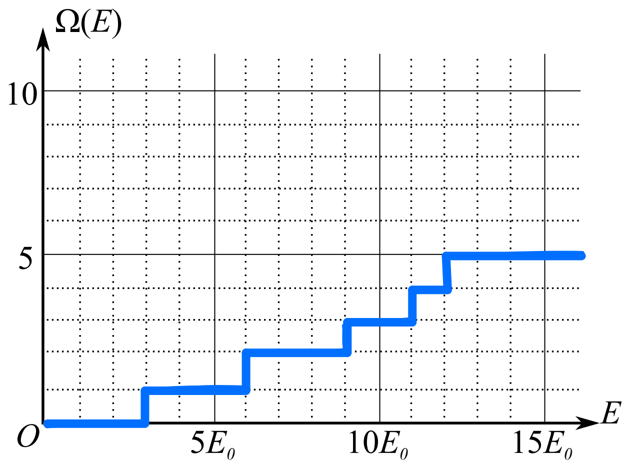
(2) $\langle \hat{f}^2 \rangle = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 2$ より $\sigma = \sqrt{\langle \hat{f}^2 \rangle - \langle \hat{f} \rangle^2} = \sqrt{2 - 1^2} = 1$ //

中間試験 2　エネルギー固有値が $E_{(n_x,n_y)} = E_0 \left(n_x^2 + 2n_y^2\right)$（ただし，$n_x$ と n_y と n_z は自然数，E_0 は正の定数）で表されるとき，状態数 $\Omega(E)$ を $0 \leq E \leq 15E_0$ についてグラフに表しなさい．

$E \leq 15E_0$ となるのは以下の通り：

n_x	n_y	E/E_0
1	1	3
2	1	6
1	2	9
3	1	11
2	2	12
⋮		⋮

よって状態数は右のようになる．



中間試験 3　ある孤立系の状態数が $\Omega(E) = 10^{(E/E_0)^4}$（ただし，$E_0$ は正の定数）で表されるとする．系のエネルギーが $2E_0$ であるとき，エネルギー固有状態 i が実現する確率 p_i を近似的に求めなさい．ここでは，エネルギー固有値 E_i が $E_0 < E_i < 2E_0$ を満たすエネルギー固有状態 i は共通のマクロな性質を持つとする．

$\Omega(E_0) = 10$，$\Omega(2E_0) = 10^{16}$ より

$W = \Omega(2E_0) - \Omega(E_0) = 10^{16} - 10 \fallingdotseq 10^{16}$

よって，等重率の原理より，

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1}{10^{16}} & (E_0 < E_i < 2E_0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

//

中間試験 4　単原子分子理想気体（原子の質量 M，体積 V，粒子数 N，逆温度 β，温度 T）は，低密度では分配関数が $Z = \dfrac{V^N}{N!}\left(\dfrac{M}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3N/2}$（ただし，$\hbar$ はディラック定数）で表される．このとき，理想気体の状態方程式を導出しなさい．なお，圧力が $P = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial}{\partial V}\log Z$ と表されることは既知とし，ボルツマン定数を k_{B} としなさい．

$$P = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\log\left[\frac{V^N}{N!}\left(\frac{M}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{\frac{3N}{2}}\right] = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}(N\log V) = \frac{N}{\beta}\frac{1}{V}$$

$\beta = \dfrac{1}{k_B T}$ より　$P = \dfrac{Nk_BT}{V} \iff PV = Nk_BT$ //

中間試験 5　エネルギー固有値が $E_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\varepsilon_0$（ただし，$n$ は 0 以上の整数，ε_0 は正の定数）と表される等温系（逆温度 β）について，次の問いに答えなさい．

(1) 分配関数が $Z = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_0\beta}}{1 - e^{-\varepsilon_0\beta}}$ と表されることを示しなさい．ただし，$|r| < 1$ を満たす r について，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ であることは断りなく用いて良い．

(2) 内部エネルギーを ε_0 と β を用いて表しなさい．ただし，内部エネルギーが $U = -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\log Z$ と表されることは既知としなさい．

(3) ボルツマン定数を k_{B} として，比熱 $C = \dfrac{dU}{dT}$ を ε_0，β，k_{B} を用いて表しなさい．

(1)
$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_0\beta}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_0\beta n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_0\beta}}{1 - e^{-\varepsilon_0\beta}} \text{ //}$$

$\left(\because\ \varepsilon_0\beta > 0 \text{ なので } e^{-\varepsilon_0\beta} < 1\right)$

(2)
$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_0\beta}}{1 - e^{-\varepsilon_0\beta}}\right) = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon_0\beta - \log(1 - e^{-\varepsilon_0\beta})\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 e^{-\varepsilon_0\beta}}{1 - e^{-\varepsilon_0\beta}} \text{ //} \quad \left(\text{or} \quad \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0\beta} - 1}\right)$$

(3)
$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{\partial\beta}{\partial T}\frac{\partial U}{\partial\beta} = -\frac{1}{k_BT^2}\cdot\frac{-\varepsilon_0^2\, e^{\varepsilon_0\beta}}{(e^{\varepsilon_0\beta} - 1)^2} = \frac{\varepsilon_0^2\beta^2 k_B e^{\varepsilon_0\beta}}{(e^{\varepsilon_0\beta} - 1)^2} \text{ //}$$

中間試験 6　等温系 (逆温度 β) にある一つの原子を考える．この原子は，エネルギー固有値が $E_1 = \frac{1}{2}h\nu$ であるエネルギー固有状態（状態 1）と，$E_2 = \frac{3}{2}h\nu$ であるエネルギー固有状態（状態 2）の二つの状態のいずれかのみが実現する（ただし，h はプランク定数，ν は振動数を表す正の定数）．このとき，次の問いに答えなさい．

(1)　分配関数を求めなさい．

(2)　状態 i（$i = 1, 2$）が出現する確率を p_i と表す．p_1 と p_2 を，β，ν，h を用いて表しなさい．

(3)　$\beta \to 0$ と $\beta \to \infty$ について，p_1 と p_2 の値を求めなさい．

(4)　β に対して，p_1 は単調増加，p_2 は単調減少することを示しなさい．

(5)　p_1 と p_2 をグラフに表しなさい．ただし，$\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial \beta^2} < 0$，$\dfrac{\partial^2 p_2}{\partial \beta^2} > 0$ であることは既知としなさい．

(6)　系の内部エネルギー U を，β，ν，h を用いて表しなさい．

(1) $$Z = e^{-\frac{1}{2}\beta h\nu} + e^{-\frac{3}{2}\beta h\nu} = e^{-\frac{3}{2}\beta h\nu}\left(e^{\beta h\nu} + 1\right) //$$

(2) $$P_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta h\nu}}{Z} = \frac{e^{\beta h\nu}}{e^{\beta h\nu} + 1}, \quad P_2 = \frac{e^{-\frac{3}{2}\beta h\nu}}{Z} = \frac{1}{e^{\beta h\nu} + 1} //$$

(3) $\beta \to 0$ で $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$．$\beta \to \infty$ で $P_1 \to 1$，$P_2 \to 0$ //

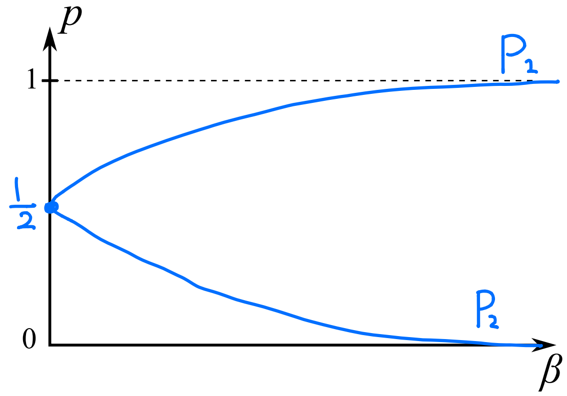
(4) $$\frac{\partial P_1}{\partial \beta} = \frac{h\nu e^{\beta h\nu}(e^{\beta h\nu} + 1) - e^{\beta h\nu} \cdot h\nu e^{\beta h\nu}}{(e^{\beta h\nu} + 1)^2} = \frac{h\nu e^{\beta h\nu}}{(e^{\beta h\nu} + 1)^2} > 0$$ ∴ 単調増加．

$$\frac{\partial P_2}{\partial \beta} = \frac{-h\nu e^{\beta h\nu}}{(e^{\beta h\nu} + 1)^2} < 0$$ ∴ 単調減少 //

(5) $\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial \beta^2} < 0$ なので P_1 は上に凸

$\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial \beta^2} > 0$ なので P_2 は下に凸

よって右のようになる．



(6) $$U = E_1 P_1 + E_2 P_2 = \frac{1}{2}h\nu \cdot \frac{e^{\beta h\nu}}{e^{\beta h\nu} + 1} + \frac{3}{2}h\nu \cdot \frac{1}{e^{\beta h\nu} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}h\nu \cdot \frac{e^{\beta h\nu} + 3}{e^{\beta h\nu} + 1} //$$

中間試験 7　逆温度 β の環境下で，下端に質量 M の質点がついた細長いゴムが，固定点 A から吊るされている．ゴムは高分子が連なってできていることから，ゴムに対する簡単なモデルとして，質量の無視できる N 本の短い棒（長さ a）が連なった 1 次元鎖を考える．棒は鉛直方向に対して下向きと上向きのいずれかをとることが可能とする．図は $N=14$ のときの一例で，矢印が棒を表す．N 個の棒に上端から順に $1,\ldots,N$ と番号をつけ，下向きのとき $x_i=a$，上向きのとき $x_i=-a$ となる変数 x_i（$i=1,\ldots,N$）を考える（図の例では，$x_1=x_2=a$，$x_3=-a$，$x_4=a$ など）．重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい．

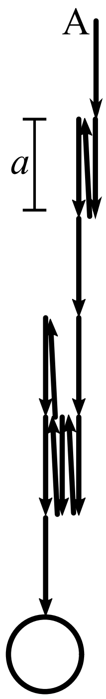
(1) $N=1$ のとき，質点の位置エネルギーを g，M，x_1 を用いて表しなさい．ただし，点 A の高さの位置エネルギーを 0 とする．

(2) $N=1$ のとき，棒が上を向く確率 p_{u} と下を向く確率 p_{d} を，それぞれ β，a，g，M を用いて表しなさい．ただし，系のエネルギーは質点の位置エネルギーと等しいとしなさい．

(3) $N=1$ のとき，x_1 の平均値を β，a，g，M を用いて表しなさい．

(4) 任意の N に対して，ゴムの上端から下端までの距離の平均値を β，a，g，M，N を用いて表しなさい．それぞれの棒は独立に動くことができることを考慮しなさい．

(5) $\beta Mga \ll 1$ という条件下では，ゴムのバネ定数が温度に比例することを説明しなさい．



(1) $-Mgx_1$

(2) 題意より，$Z_1 = \sum_{x_1=\pm a} e^{\beta M g x_1} = e^{\beta Mga} + e^{-\beta Mga}$

$\therefore$ $P_u = \dfrac{e^{-\beta Mga}}{e^{\beta Mga}+e^{-\beta Mga}}$, $P_d = \dfrac{e^{\beta Mga}}{e^{\beta Mga}+e^{-\beta Mga}}$ //

(3) $\bar{x}_1 = -aP_u + aP_d = \dfrac{ae^{\beta Mga} - ae^{-\beta Mga}}{e^{\beta Mga}+e^{-\beta Mga}}$ //

(4) それぞれの棒は互いに独立に動くことができるので，

$$\bar{x} = N\bar{x}_1 = aN\frac{e^{\beta Mga} - e^{-\beta Mga}}{e^{\beta Mga}+e^{-\beta Mga}}$$ //

(5) $\beta Mga \ll 1$ では $e^{\pm\beta Mga} \fallingdotseq 1 \pm \beta Mga + \frac{1}{2}(\beta Mga)^2$ なので

$\bar{x} \fallingdotseq \beta a^2 N \cdot Mg \Leftrightarrow Mg = \frac{1}{\beta a^2 N}\bar{x}$．これは力のつりあいを表す．

右辺はフックの法則を表しており，そのバネ定数は $\frac{1}{\beta a^2 N} \propto T$ である．∎