期末試験 1　エネルギー固有状態 j である確率 p_j は，カノニカル分布では $p_j = e^{\frac{1}{k_\mathrm{B}T}(F-E_j)}$（ただし，$T$ は温度，E_j は状態 j でのエネルギー固有値，F はヘルムホルツの自由エネルギー）と表される．このとき，エントロピー $S = -(F-U)/T$（ただし，U は内部エネルギー）が，$S = -k_\mathrm{B}\sum_j p_j \log p_j$ となることを示しなさい．

期末試験 2　N 個の同種粒子で構成される 3 次元系（温度 T）について，粒子 i（$i = 1, \ldots, N$）の位置を $\boldsymbol{x}_i$ で表す．系の位置エネルギーが $V = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} k |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{c}_i|^2$（ただし，$\boldsymbol{c}_i$ と k は定数）で表される．この系を古典的に考えることで，力学的エネルギーの期待値を N と k_B と T を用いて表しなさい．

期末試験 3　N 個の同種フェルミオンによる気体について, 各粒子が取りうるエネルギー固有状態を $j = 1, 2, \ldots$ とし，対応するエネルギー固有値を ϵ_j（ただし，任意の自然数 m について $\epsilon_m < \epsilon_{m+1}$）で表す．

(1) 基底状態における占有数 n_j（$j = 1, 2, \ldots$）を書きなさい．

(2) 基底状態における系のエネルギーを書きなさい．ただし，粒子間の相互作用は無視できるものとする．

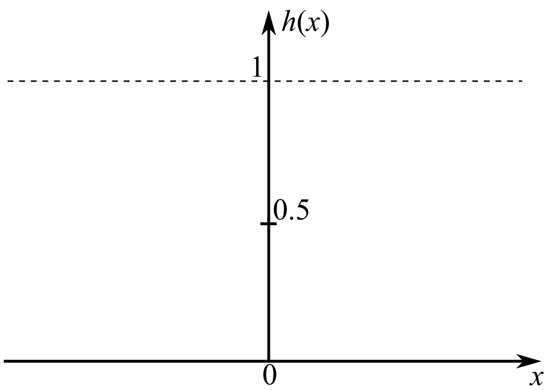
期末試験 4　絶対温度を T，体積を V，化学ポテンシャルを μ とすると，単原子分子理想気体の大分配関数は $\Xi = \exp\left[\alpha e^{\frac{\mu}{k_{\mathsf{B}}T}} V\right]$（ただし，$\alpha$ は T にのみ依存する量）である．系の粒子数は一定で，その値を N とする．

(1)　圧力の表式 $p = k_{\mathsf{B}}T \dfrac{\partial}{\partial V} \log \Xi$ から，圧力 p を求めなさい．

(2)　数密度 N/V を求めなさい．ただし，粒子数の期待値の表式は $\left\langle \hat{N} \right\rangle = k_{\mathsf{B}}T \dfrac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi$ である．

(3)　理想気体の状態方程式を導きなさい．

期末試験 5　フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ に関して，$a = \beta\mu$，$x = \epsilon/\mu - 1$ とした関数 $h(x) = \dfrac{1}{e^{ax} + 1}$ のグラフを描きなさい．ただし，$x \to \pm\infty$ での $h(x)$ の値や $h'(x)$ と $h''(x)$ から得られる情報など，グラフを描くにあたって必要な情報も書きなさい．



期末試験 6　量子理想気体では，分布関数が $f(\epsilon)=\dfrac{\displaystyle\sum_n ne^{-\beta(\epsilon-\mu)n}}{\displaystyle\sum_n e^{-\beta(\epsilon-\mu)n}}$（ただし，$\beta$ は逆温度，μ は化学ポテンシャル）と表せる．ここで，n についての和は取りうる占有数についての和を表す．

(1) フェルミオンでは占有数 n が 0 か 1 に限られる．この物理法則の名称を答えなさい．
(2) エネルギーの移動に関する物理現象に及ぼす影響について，粒子がフェルミオンの場合とボゾンの場合のそれぞれについて説明しなさい．ただし，系の温度は常温程度とする．
(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)n}=\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}$ を示しなさい．ただし，以下では $\mu\le 0$，$\epsilon\ge 0$ とする．
(4) ボゾンの分布関数 (ボーズ分布関数) を $f(\epsilon)=\dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}$ となることを示しなさい．
(5) フェルミ分布関数とボーズ分布関数のそれぞれについて，ϵ が十分に大きいときの近似式を求めなさい．
(6) 前問の結果の正当性を説明しなさい．

このページは空白です（このページに解答を書く場合はどの問題の解答かを明記すること）

解答例

期末試験 1　エネルギー固有状態 j である確率 p_j は，カノニカル分布では $p_j = e^{\frac{1}{k_\mathrm{B}T}(F-E_j)}$（ただし，$T$ は温度，E_j は状態 j でのエネルギー固有値，F はヘルムホルツの自由エネルギー）と表される．このとき，エントロピー $S = -(F-U)/T$（ただし，U は内部エネルギー）が，$S = -k_\mathrm{B}\sum_j p_j \log p_j$ となることを示しなさい．

$P_j = \exp\left[\frac{1}{k_BT}(F-E_j)\right] \Leftrightarrow \log P_j = \frac{1}{k_BT}(F-E_j)$

両辺の期待値をとると　$\sum_j P_j \log P_j = \frac{1}{k_BT}(F-U)$　($\because \langle E_j\rangle = U$)

$S = -\frac{F-U}{T} \Leftrightarrow \frac{F-U}{T} = -S$ より　$\sum_j P_j \log P_j = -\frac{S}{k_B}$

$\therefore\ S = -k_B \sum_j P_j \log P_j$ ■

期末試験 2　N 個の同種粒子で構成される 3 次元系（温度 T）について，粒子 i（$i = 1, \ldots, N$）の位置を $\boldsymbol{x}_i$ で表す．系の位置エネルギーが $V = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} k|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{c}_i|^2$（ただし，$\boldsymbol{c}_i$ と k は定数）で表される．この系を古典的に考えることで，力学的エネルギーの期待値を N と k_B と T を用いて表しなさい．

運動エネルギーは　$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$　(m_i は質量)

よって K も V も 2次形式なので，エネルギー等分配則より

力学的エネルギーの期待値は

$$\langle K\rangle + \langle V\rangle = 3\cdot N\cdot \frac{1}{2}k_BT + 3\cdot N\cdot\frac{1}{2}k_BT = 3Nk_BT$$

期末試験 3　N 個の同種フェルミオンによる気体について，各粒子が取りうるエネルギー固有状態を $j = 1, 2, \ldots$ とし，対応するエネルギー固有値を ϵ_j（ただし，任意の自然数 m について $\epsilon_m < \epsilon_{m+1}$）で表す．

(1)　基底状態における占有数 n_j（$j = 1, 2, \ldots$）を書きなさい．

(2)　基底状態における系のエネルギーを書きなさい．ただし，粒子間の相互作用は無視できるものとする．

(1) $n_1 = n_2 = \cdots = n_N = 1$,　$n_j = 0$　$(j = N+1, N+2, \ldots)$

(2) $E = \sum_{j=1}^{\infty} n_j \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j$

期末試験 4　絶対温度を T，体積を V，化学ポテンシャルを μ とすると，単原子分子理想気体の大分配関数は $\Xi = \exp\left[\alpha e^{\frac{\mu}{k_B T}} V\right]$（ただし，$\alpha$ は T にのみ依存する量）である．系の粒子数は一定で，その値を N とする．

(1)　圧力の表式 $p = k_B T \dfrac{\partial}{\partial V} \log \Xi$ から，圧力 p を求めなさい．

(2)　数密度 N/V を求めなさい．ただし，粒子数の期待値の表式は $\left\langle \hat{N} \right\rangle = k_B T \dfrac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi$ である．

(3)　理想気体の状態方程式を導きなさい．

(1)　$p = k_B T \dfrac{\partial}{\partial V}\left(\alpha e^{\frac{\mu}{k_B T}} V\right) = k_B T \alpha e^{\frac{\mu}{k_B T}}$ //

(2)　この系では粒子数が一定なので

$N = \langle \hat{N} \rangle = k_B T \dfrac{\partial}{\partial \mu}\left(\alpha e^{\frac{\mu}{k_B T}} V\right) = \alpha e^{\frac{\mu}{k_B T}} V$　$\therefore \dfrac{N}{V} = \alpha e^{\frac{\mu}{k_B T}}$ //

(3)　(2) を (1) に代入すると

$p = k_B T \cdot \dfrac{N}{V} \Leftrightarrow pV = N k_B T$ ■

期末試験 5　フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ に関して，$a = \beta\mu$，$x = \epsilon/\mu - 1$ とした関数 $h(x) = \dfrac{1}{e^{ax}+1}$ のグラフを描きなさい．ただし，$x \to \pm\infty$ での $h(x)$ の値や $h'(x)$ と $h''(x)$ から得られる情報など，グラフを描くにあたって必要な情報も書きなさい．

$h(x) \to 1 \ (x \to -\infty)$，$h(x) \to 0 \ (x \to \infty)$，$h(0) = \dfrac{1}{2}$.

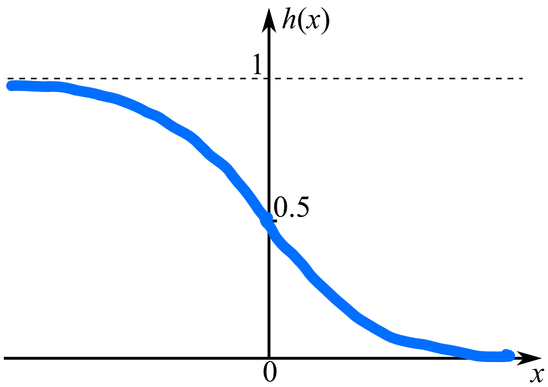
$h'(x) = \dfrac{-ae^{ax}}{(e^{ax}+1)^2}$.　$h'(x) < 0$ より単調減少.

$h''(x) = \dfrac{-a^2e^{ax}(e^{ax}+1)^2 + a^2e^{2ax}(e^{ax}+1)}{(e^{ax}+1)^4} = \dfrac{a^2e^{ax}(e^{ax}-1)}{(e^{ax}+1)^3}$

よって増減表は次の通り：

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
h'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
h''	$-$	$-$	0	$+$	$+$
h'	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0

以上より，$h(x)$ のグラフは右のようになる．



期末試験 6　量子理想気体では，分布関数が $f(\epsilon) = \dfrac{\sum_n n e^{-\beta(\epsilon-\mu)n}}{\sum_n e^{-\beta(\epsilon-\mu)n}}$（ただし，$\beta$ は逆温度，μ は化学ポテンシャル）と表せる．ここで，n についての和は取りうる占有数についての和を表す．

(1) フェルミオンでは占有数 n が 0 か 1 に限られる．この物理法則の名称を答えなさい．

(2) エネルギーの移動に関する物理現象に及ぼす影響について，粒子がフェルミオンの場合とボソンの場合のそれぞれについて説明しなさい．ただし，系の温度は常温程度とする．

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)n} = \frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}$ を示しなさい．ただし，以下では $\mu \leq 0$，$\epsilon \geq 0$ とする．

(4) ボソンの分布関数 (ボーズ分布関数) を $f(\epsilon) = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}$ となることを示しなさい．

(5) フェルミ分布関数とボーズ分布関数のそれぞれについて，ϵ が十分に大きいときの近似式を求めなさい．

(6) 前問の結果の正当性を説明しなさい．

(1) パウリの排他律．

(2) フェルミオンでは，パウリの排他律により，一つの状態は一つの粒子しか占めることができない．これにより，常温程度では多くの場合でフェルミエネルギー近傍の状態を占める粒子しか物理現象に影響しない．一方，ボソンではそのような制約がないので，全ての粒子が物理現象に影響を及ぼす．

(3) 等比級数の公式 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ (ただし $|r|<1$) に $r = e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$ を代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon-\mu)n} = \frac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}} \quad (\because\ \varepsilon \geq 0,\ \mu \leq 0 \text{ より } e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} < 1)$$

(4) (3)の両辺を β で偏微分すると，$\displaystyle -(\varepsilon-\mu)\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta(\varepsilon-\mu)n} = \frac{-(\varepsilon-\mu)e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}{(1-e^{-\beta(\varepsilon-\mu)})^2}$

よって $$f(\varepsilon) = \frac{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\{1-e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\}^{-2}}{\{1-e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\}^{-1}} = \frac{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}{1-e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1} \quad \blacksquare$$

(5) ε が十分に大きいところでは，フェルミ分布もボーズ分布も $e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$ となる．

(6) ε が十分に大きい状態には，ボゾンであっても複数の粒子が一つの状態を占めることはほぼないので，ボゾンとフェルミオンの区別が意味をなさない．