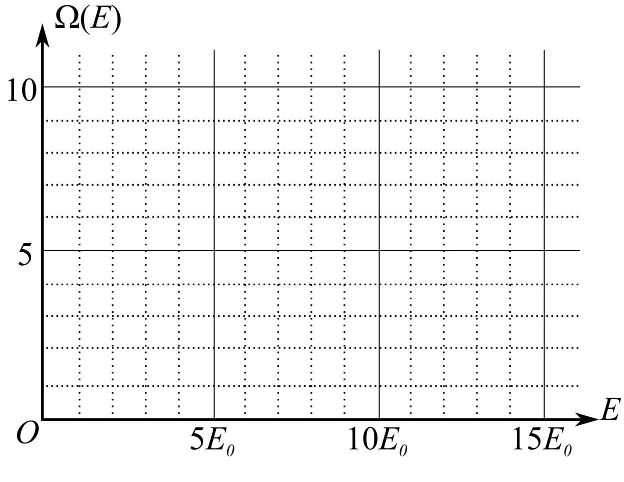
中間試験 1　それぞれの面に「-2」,「4」と記されたコインを投げる．出た面に記された数を確率変数 $\hat{f}$ とする．

(1)　$\hat{f}$ の期待値 $\left\langle \hat{f} \right\rangle$ を求めなさい．

(2)　ゆらぎ（標準偏差）$\sigma = \sqrt{\left\langle \hat{f}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{f} \right\rangle^2}$ を求めなさい．

中間試験 2　エネルギー固有値が $E_{(m,n)} = E_0 \left(m^2 + n^2\right)$（ただし，$m$ と n は自然数，E_0 は正の定数）で表される状態について，この系の状態数 $\Omega(E)$ を $0 \leq E \leq 15E_0$ についてグラフに表しなさい．



中間試験 3　ある孤立系の状態数が $\Omega(E) = 10^{(E/E_0)^3}$（ただし，$E_0$ は正の定数）で表されるとする． 系のエネルギーが $2E_0$ であるとき，エネルギー固有状態 i が実現する確率 p_i を近似的に求めなさい．ここでは，エネルギー固有値 E_i が $E_0 < E_i < 2E_0$ を満たすエネルギー固有状態 i は共通のマクロな性質を持つとする．

中間試験 4　単原子分子理想気体（原子の質量 m，体積 V，粒子数 N，温度 T，ボルツマン定数 k_{B}）は，低密度では分配関数が $Z = \dfrac{V^N}{N!}\left(\dfrac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2}$（ただし，$\hbar$ はディラック定数）で表される．このとき，理想気体の状態方程式を導出しなさい．なお，圧力が $P = k_{\mathrm{B}}T\dfrac{\partial}{\partial V}\log Z$ と表されることは既知としなさい．

中間試験 5　2 原子分子理想気体について考える．2 原子分子の重心から見た相対運動は振動の影響と回転の影響に分けられ，振動に関する分配関数は $Z_{\mathrm{vib}} = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_0\beta}}{1-e^{-\varepsilon_0\beta}}$ と表される（ただし，ε_0 は正の定数，β は逆温度）．ボルツマン定数を k_{B} として，次の問いに答えなさい．ただし，内部エネルギーが分配関数 Z を用いて $U = -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\log Z$ と表されることは既知としなさい．

(1)　振動に関する内部エネルギー U_{vib} を ε_0 と β を用いて表しなさい．

(2)　振動に関する比熱 $C_{\mathrm{vib}} = \dfrac{dU_{\mathrm{vib}}}{dT}$ を ε_0，β，k_{B} を用いて表しなさい．

(3)　温度が十分高ければ，回転に関する分配関数は $Z_{\mathrm{rot}} \simeq \dfrac{2}{a\beta}$（ただし，$a$ は正の定数）と近似できる．このとき，回転に関する比熱 C_{rot} を求めなさい．

中間試験 6　一つの原子からなる等温系 (逆温度 β) を考える．この原子は，エネルギー固有値が $E_0 = 0$ であるエネルギー固有状態（状態 0），$E_1 = \varepsilon_1$ であるエネルギー固有状態（状態 1），エネルギー固有値が $E_2 = \varepsilon_2$ であるエネルギー固有状態（状態 2）の三つの状態のいずれかのみが実現する（ただし，ε_1 と ε_2 は正の定数で，$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ とする）．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 分配関数 Z を求めなさい.

(2) 状態 n（$n = 0, 1, 2$）が出現する確率を p_n と表す．p_0，p_1，p_2 を，β，ε_1，ε_2 を用いて表しなさい．

(3) $\beta \to 0$ と $\beta \to \infty$ のそれぞれについて，p_0，p_1，p_2 の値を求めなさい．

(4) 前問の結果から，どのような状態が実現しやすいかを，高温極限と低温極限のそれぞれについて説明しなさい．

(5) $\dfrac{\partial p_0}{\partial \beta}$，$\dfrac{\partial p_1}{\partial \beta}$，$\dfrac{\partial p_2}{\partial \beta}$ をそれぞれ求めなさい．また，それらの結果から，p_0，p_1，p_2 が β に対してどのように変化するか説明しなさい．

中間試験 7　ある系がエネルギー固有値 E_n のエネルギー固有状態 n（ただし，$n = 1, 2, \ldots, N$）にある確率を p_n とする．次の問いに答えなさい．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} p_n$ はいくらか．

(2) 系のエネルギーの期待値が一定値 E に保たれるとき，E，E_n，p_n（ただし，$n = 1, 2, \ldots, N$）の間に成り立つ関係式を書きなさい．

(3) $S = -k_{\mathrm{B}} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} p_n \log p_n$ で定義された量が，系のエネルギーの期待値が一定に保たれるという条件下で極値をとる p_n の表式を求めなさい．なお，数列 $x_1, \ldots, x_N$ に関して二つの束縛条件 $g(x_1, \ldots, x_N) = 0$ と $h(x_1, \ldots, x_N) = 0$ の下で関数 $f(x_1, \ldots, x_N)$ の極値問題を考える際，極値をとる $x_1, \ldots, x_N$ では関数

$$F(x_1, \ldots, x_N, \kappa, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_N) - \kappa g(x_1, \ldots, x_N) - \lambda h(x_1, \ldots, x_N)$$

が $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \cdots = \dfrac{\partial F}{\partial x_N} = \dfrac{\partial F}{\partial \kappa} = \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ を満足する[a]ことは既知としなさい．

[a] 束縛条件下での極値問題をこのように取り扱う方法をラグランジュの未定乗数法という．