**期末試験 1**　体積 $V$，温度 $T$ の系について，ヘルムホルツの自由エネルギー $F = F(V, T)$ は，分配関数 $Z = Z(V, T)$ を用いて $F = -k_{\mathrm{B}} T \log Z$ と表される．エントロピー $S = -\dfrac{\partial F(V, T)}{\partial T}$ を計算することで，$F$ を内部エネルギー $U$，$S$，$T$ を用いて表しなさい．ただし，$U = \dfrac{T}{\beta}\dfrac{\partial}{\partial T}\log Z$ であることは既知としなさい．

**期末試験 2**　$N$ 個の粒子で構成される $d$ 次元系について考える．系の位置エネルギーは，粒子 $i$（$i = 1, \ldots, N$）の位置を $\boldsymbol{x}_i$ として $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}k|\boldsymbol{x}_i|^2$ で表される．系の温度 $T$ が十分に高く古典近似が有効なとき，力学的エネルギーの期待値を $d$，$k_{\mathrm{B}}$，$N$，$T$ を用いて表しなさい．導出にあたって根拠とした物理法則の名称も記載すること．

**期末試験 3**　$N$ 個の同種フェルミオンによる気体について，各粒子が取りうるエネルギー固有状態を $j = 1, 2, \ldots$ とし，対応するエネルギー固有値を $\epsilon_j$（ただし，任意の自然数 $m$ について $\epsilon_m < \epsilon_{m+1}$）で表す．粒子間の相互作用は無視できるものとして，次の問に答えなさい．

(1)　基底状態における占有数 $n_j$（$j = 1, 2, \ldots$）を書きなさい．
(2)　基底状態における系のエネルギーを書きなさい．
(3)　基底状態の次にエネルギーが小さい状態（第 1 励起状態）における系のエネルギーを求めなさい．

**期末試験 4**　温度を $T$，体積を $V$，化学ポテンシャルを $\mu$ とすると，単原子分子理想気体の大分配関数は $\Xi = \exp\left[\alpha e^{\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T}} V\right]$（ただし，$\alpha$ は $T$ にのみ依存する量）である．系の粒子数は一定で，その値を $N$ とするとき，次の問いに答えなさい．

(1)　圧力 $p$ を求めなさい．ただし，圧力の表式は $p = k_{\mathrm{B}}T \dfrac{\partial}{\partial V} \log \Xi$ である．

(2)　数密度 $\rho = N/V$ を求めなさい．ただし，粒子数の期待値の表式は $\left\langle \hat{N} \right\rangle = k_{\mathrm{B}}T \dfrac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi$ である．

(3)　$p$ を $\rho$ と $\beta$ を用いて表しなさい．

---

[以下の空欄は自由に使って良い（解答を書く場合はどの問題のものか明記すること）]

**期末試験 5**　フェルミ分布関数 $f_{\beta,\mu}(\epsilon)$ において，$a=\beta\mu$，$x=\epsilon/\mu-1$ とした関数 $h(x)=\dfrac{1}{e^{ax}+1}$ を考える．$a>0$ として，次の問いに答えなさい．

(1)　$x\to\pm\infty$ における $h(x)$ の値を求めなさい．

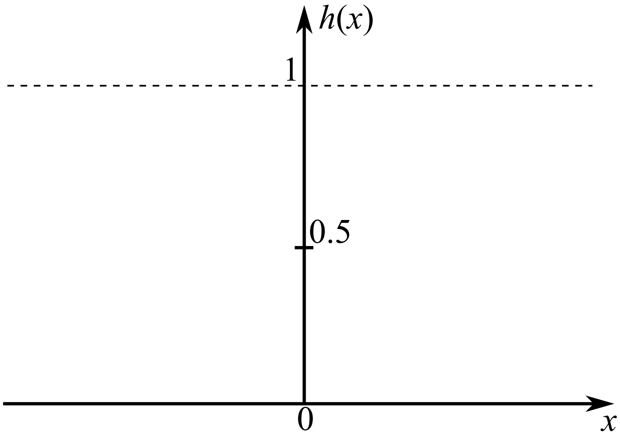
(2)　$h(x)$ が $x$ について単調減少することを示しなさい．

(3)　$h(x)$ の変曲点を求めなさい．

(4)　$h(x)$ の 2 回微分を計算し，$h(x)$ の凸性について説明しなさい．

(5)　$h(x)$ のグラフを描きなさい．

(6)　常温の金属中の自由電子は，十分に低温のフェルミ分布に従う．このことを踏まえて，常温の金属では物理現象に関与する電子の数が少ないことを，$h(x)$ のグラフ形状と対応させて定性的に説明しなさい．



**期末試験 6**　開放系での自由エネルギー $J$ は，大分配関数 $\Xi$ を用いて $J = -\frac{1}{\beta}\log\Xi$ として表され，また $dJ = -SdT - pdV - Nd\mu$（ただし，$S$ はエントロピー，$T$ は温度，$p$ は圧力，$V$ は体積，$N$ は粒子数，$\mu$ は化学ポテンシャル）であることが知られている．フェルミオンに関して，次の問に答えなさい．

(1)　$J = -\frac{1}{\beta}\sum_{l=1}^{\infty}\log\left[1 + e^{-\beta(\epsilon_l - \mu)}\right]$ を示しなさい．なお，$\Xi = \prod_{l=1}^{\infty}\left[1 + e^{-\beta(\epsilon_l - \mu)}\right]$ は既知としなさい．

(2)　$-\frac{\partial J}{\partial \mu}$ が，フェルミ分布関数 $f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$ を用いて，$\sum_{l=1}^{\infty} f(\epsilon_l)$ と表されることを示しなさい．

(3)　エントロピー $S$ をフェルミ分布関数を用いて表しなさい．