

# 解答例

物理学 I (2021 年度：鳴海)

学籍番号:

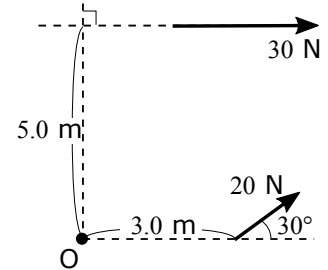
名前:

**期末試験 1** 図のような二つの力が加わっているとき、点 O を中心とする力のモーメントの合計を求めなさい。ただし、紙面を  $x$ - $y$  平面とし、紙面手前方向を  $z$  方向としなさい。

$$\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z) \text{ とする。 } N_x = N_y = 0.$$

$$\begin{aligned} N_z &= 3.0 \times 20 \times \sin 30^\circ - 5.0 \times 30 \times \sin 90^\circ \\ &= 30 - 150 = -120 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\odot \mathbf{N} = (0, 0, -120 \text{ N}\cdot\text{m})$$



**期末試験 2** 速度  $v_A$  で運動する質点 A (質量  $M_A$ ) が、静止している質点 B (質量  $M_B$ ) に衝突したところ、衝突後の A の速度が  $v'_A$  となった。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 衝突後の B の速度を求めなさい。
- (2)  $M_A = M_B$  で、はねかえり係数が 1 のとき、衝突後の B の速度を求めなさい。

$$(1) \text{ 運動量保存の法則より } M_A v_A = M_A v'_A + M_B v'_B \quad \odot v'_B = \frac{M_A}{M_B} (v_A - v'_A)$$

$$(2) e = -\frac{v'_A - v'_B}{v_A - 0} = -\frac{1}{v_A} \left\{ v'_A - \frac{M_A}{M_B} (v_A - v'_A) \right\}$$

$$M_A = M_B \text{ かつ } e = 1 \text{ のとき } v_A = -v'_A + (v_A - v'_A) \text{ より } v'_A = 0$$

$$\text{このとき } v'_B = v_A$$

**期末試験 3** 一定の加速度  $\alpha$  で鉛直方向に運動するエレベータ内で、質量  $M$  の質点を水平に発射した。発射点を原点、発射方向を  $x$  方向、鉛直上向きを  $y$  方向として、次の問いに答えなさい。

- (1) エレベータ内の観測者から見た運動の運動方程式を、 $x$  方向と  $y$  方向のそれぞれについて書きなさい。
- (2)  $\alpha$  が  $-g$  と等しいとき、エレベータ内で物体はどのように見えるか説明しなさい。

$$(1) \text{ 運動方程式は } \begin{cases} M \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ M \frac{d^2y}{dt^2} = -Mg - M\alpha \end{cases}$$

$$(2) \alpha = -g \text{ のとき、(1)より } \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

$$\text{初期条件から } \frac{dx}{dt} = v_0, \frac{dy}{dt} = 0$$

つまり、水平方向に運動しているように見える。

期末試験 4 質点 (質量  $M$ ) を初速度  $v_0$  で落下させる. 質点には重力と粘性抵抗 (抵抗係数  $\gamma$ ) がはたらく. 時刻  $t$  での質点の速度を  $v_y(t)$  で表すとき, 次の問いに答えなさい. ただし, 鉛直下向きを正の方向としなさい.

- (1) この運動の運動方程式から, 終端速度  $v_\infty$  を求めなさい.
- (2)  $v_y(t)$  を求めなさい.
- (3)  $v_0 > v_\infty$  のとき,  $v_y(t)$  が単調減少することを示し,  $v_y(t)$  の時間変化をグラフに図示しなさい.

$$(1) M \frac{dv_y}{dt} = Mg - r v_y \quad . \quad v_y = v_\infty \text{ ならば } \frac{dv_y}{dt} = 0 \text{ より } Mg - r v_\infty = 0 \Leftrightarrow v_\infty = \frac{Mg}{r}$$

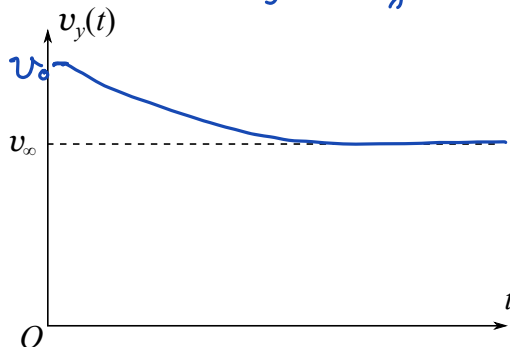
$$(2) \frac{dv_y}{dt} = -r(v_y - v_\infty) \Leftrightarrow \int \frac{dv_y}{v_y - v_\infty} = -\int r dt \Leftrightarrow \log|v_y - v_\infty| = -rt + C$$

$$\Leftrightarrow v_y - v_\infty = A e^{-rt} \quad . \quad \text{初期条件より, } v_0 - v_\infty = A$$

$$\begin{aligned} \text{よって } v_y(t) &= v_\infty + (v_0 - v_\infty) e^{-rt} \\ &= v_\infty e^{-rt} + (1 - e^{-rt}) v_\infty = v_\infty + (v_0 - v_\infty) e^{-rt} \end{aligned}$$

$$(3) \dot{v}_y = -r(v_y - v_\infty) e^{-rt}$$

$v_0 > v_\infty$  ならば  $\dot{v}_y < 0$ . よって単調減少.  
グラフは右図.



期末試験 5  $F(r) = 2xyi + x^2j$  について, 次の問いに答えなさい. ただし,  $i$  と  $j$  はそれぞれ  $x$  方向と  $y$  方向を向く単位ベクトルであるとする.

- (1)  $F(r) \cdot dr$  を,  $x, y, dx, dy$  から必要なものを用いて表しなさい.
- (2) 原点  $O$  から経路  $C: y = \frac{1}{2}x^2$  で点  $(2, 2)$  に至る線積分  $W = \int_C F(r) \cdot dr$  を求めなさい.

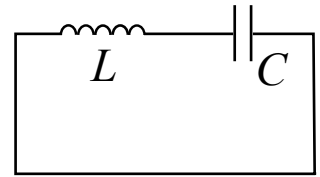
$$(1) (2xy \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}) = 2xy dx + x^2 dy$$

$$\begin{aligned} (2) \int_C F(r) \cdot dr &= \int_C 2xy dx + \int_C x^2 dy = \int_0^2 x^3 dx + \int_0^2 2y dy \\ &= \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 + \left[ y^2 \right]_0^2 = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

**期末試験 6** コイル (インダクタンス  $L$ ) とコンデンサ (電気容量  $C$ ) からなる回路を LC 回路と呼ぶ (図). LC 回路では, 電荷  $Q(t)$ , 電流  $I(t)$ , 定数  $E$  について  $L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = E$  が成り立つ. 次の問いに答えなさい.

- (1)  $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$  を踏まえて,  $Q(t)$  に関する 2 階微分方程式を書きなさい.
- (2) 適切な変形をすることで, 前問の微分方程式を単振動型の微分方程式に変形しなさい.
- (3) 初期条件  $Q(0) = CE$ ,  $I(0) = I_0$  に対して, 電荷の時間変化  $Q(t)$  を求めなさい.

$$(1) L\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q = E \Leftrightarrow \ddot{Q} = -\frac{1}{LC}Q + \frac{E}{L}$$



$$(2) \ddot{Q} = -\frac{1}{LC}(Q - CE) \text{ より } Q - CE = R \text{ とおくと}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(Q - CE) = \ddot{Q} \text{ より } \ddot{R} = -\frac{1}{LC}R \quad \text{これは } \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\text{とおくと } \ddot{R} = -\omega^2 R.$$

$$(3) (2) \text{ の一般解は } R = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$Q(0) = CE \Leftrightarrow R(0) = 0 \text{ より } A = 0.$$

$$\dot{R} = \dot{Q} = I \text{ より } I = B\omega \cos \omega t \quad \text{⊙ } B = \frac{I_0}{\omega} = I_0 \sqrt{LC}$$

$$\text{以上より, } R = I_0 \sqrt{LC} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad \text{⊙ } Q(t) = CE + I_0 \sqrt{LC} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

**期末試験 7** なめらかな曲面上で運動する質点 (質量  $M$ ) を考える. 質点は, 高さ  $h_A$  の点 A から初速度 0 で曲面に沿って運動を始め, その後, 高さ  $h_B$  の点 B を通過した. このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 点 A での質点の運動エネルギーはいくらか.
- (2) 点 B での重力による位置エネルギーを書きなさい. ただし, 高さ 0 を位置エネルギーの基準とする.
- (3) 点 B での質点の速さを求めなさい

$$(1) 0 \quad (2) Mgh_B$$

(3) 力学的エネルギー保存の法則より

$$Mgh_A = Mgh_B + \frac{1}{2}Mv_B^2$$

$$v_B^2 = 2g(h_A - h_B) \quad v_B > 0 \text{ より } v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$$

期末試験 8 図のように、水平に固定された十分長い真っ直ぐな棒に沿って自由に運動できる質点 P (質量  $M$ ) がある。バネ (バネ定数  $k$ , 自然長  $l$ ) の一端を質点 P に、他端を棒から距離  $d$  離れた固定点 A に接続する。点 A から棒に下ろした垂線が棒と交わる点 O を原点とし、棒に沿って  $x$  軸をとる。質点と棒との摩擦は無視できるとき、次の問いに答えなさい。

- (1) バネの弾性力による位置エネルギー  $U(x)$  を求めなさい。
- (2) バネの弾性力  $-\frac{dU}{dx}$  が 0 となる  $x$  の値を  $x_0$  とする。  $x_0$  は  $d$  の関数であることを踏まえ、横軸を  $d$ 、縦軸を位置  $x$  とするグラフに  $x_0$  の  $d$  依存性を図示しなさい。
- (3) 前問で得られたグラフを踏まえて、初速度が 0 の質点はどのような運動をするか、  $d < l$  と  $d > l$  のそれぞれについて定性的に説明しなさい。

(1)  $AP = \sqrt{x^2 + d^2}$  より  $U(x) = \frac{k}{2}(\sqrt{x^2 + d^2} - l)^2$

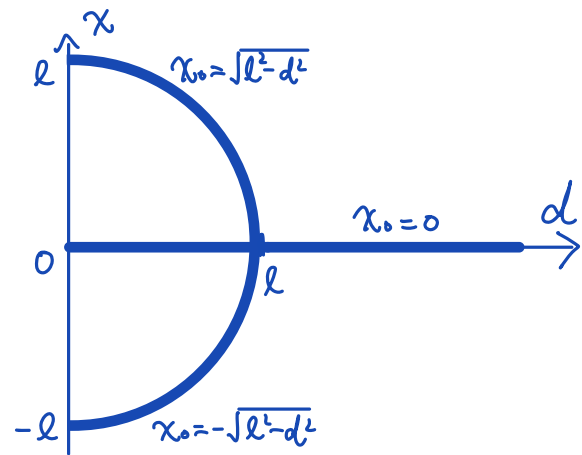
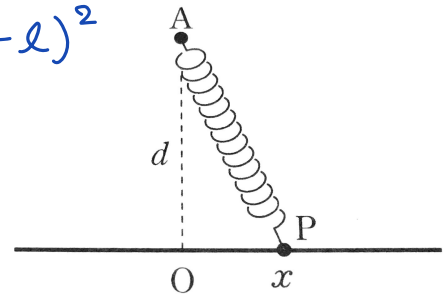
(2)  $\frac{dU}{dx} = k(\sqrt{x^2 + d^2} - l) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$  より

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0(\sqrt{x_0^2 + d^2} - l) = 0$$

$l > d$  のときは  $x_0 = \pm \sqrt{l^2 - d^2}$

$$\text{よって, } x_0 = \begin{cases} 0, & \pm \sqrt{l^2 - d^2} \quad (d < l) \\ 0 & \quad (d > l) \end{cases}$$

これを図示すると右のようになる。

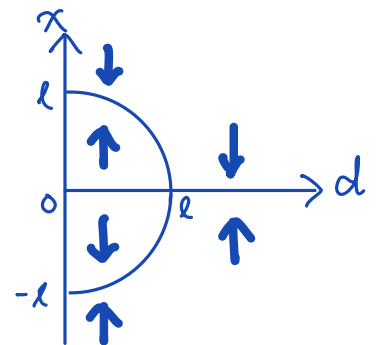


(3)  $\frac{dU}{dx}$  が正のときは  $F < 0$  なので  $x$  を小さくする向きに

力がはたらく。一方、 $\frac{dU}{dx}$  が負のときは  $x$  を大きくする

向きに力がはたらく。このことと (2) の図に書くと右のよう

になる (矢印が力の向きを表す)



よって  $d > l$  のときは初期の  $x$  の値に関わらず  $x=0$  を中心として振動する。

一方、 $d < l$  のときは  $x_0 = \pm \sqrt{l^2 - d^2}$  のどちらかを振動中心とする振動が、

$|x|$  が十分に大きいときは  $x_0 = 0$  を中心とする振動をする。

⊗  $d < l$  のときのより詳しい運動特性はポテンシャルの形状とあわせて議論する必要がある。