

解答例

量子力学 I (2021 年度：鳴海)

番号:

名前:

中間試験 1 次の文章の下線部に関して、量子力学の知見に照らして誤りがあれば修正しなさい。ただし、プランク定数を h とする。

(1) 振動数が ν の光は、 $\frac{1}{2}h\nu$ というエネルギーの値も取りうる。

振動数が ν の光は $n h \nu$ ($n=1, 2, \dots$) しか取り得ない

(2) 振動数が ν の光は、フォノンと呼ばれる粒子の集まりと考えられる。

光はフォトンの集まり。

(3) 高いエネルギー準位から低いエネルギー準位に状態が遷移することを励起という。

励起は低いエネルギーから高いエネルギーへの状態遷移。

(4) 箱の中に閉じ込められた電子を考える。物質波（ドブロイ波）は箱の中に広がっているので、箱を二つに分割すると、電子も二つに分割される。

電子が分割されることはない。

(5) ある粒子の波動関数の絶対値 $|\psi(x, t)|$ は、時刻 t に位置 x で粒子として観測される確率に比例する。

存在確率に比例するのは $|\psi(x, t)|^2$ 。

(6) 量子力学的な効果が無視できない系では、観測（測定値を得る行為）が系に影響を与えることはない。

量子力学的な効果が無視できない場合、多くの場合、観測が系の状態を乱す。

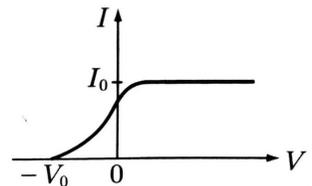
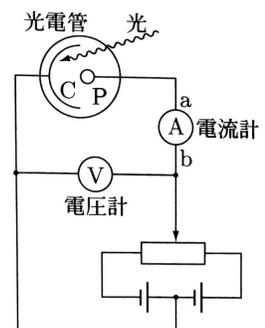
中間試験 2 光電管を用いた回路 (図) について, 光 (振動数 ν) を陰極 C を照射したところ, 陰極 C に対する陽極の電位 V が $V > -V_0$ (ただし, $V_0 > 0$) のときに電流が流れた. 電流 I を測定したところ, 図の I - V グラフに示すような結果を得た. 電気素量を e として, 次の問いに答えなさい.

- (1) 陰極から飛び出す電子の運動エネルギーの最大値を求めなさい.
- (2) 照射する光を, 同じ強さだが振動数 ν' (ただし, $\nu' > \nu$) のものに変える. このとき, I - V グラフの形状が光を変更する前後でどのように変化するか説明しなさい.

(1) $V = -V_0$ のとき, 最大の運動エネルギーをもった電子のみが陽極に到達する. 陽極到達時にすべてのエネルギーを使ったと考えるので

$$K_{\max} = eV_0$$

(2) $\nu' > \nu$ なので光子 1 つあたりのエネルギーは増大する. よって $I > 0$ となる電位は $-V_0$ より小さくなる. 一方, 光の強さは同じなので, 光子の数は同一. よって I_0 は変化しない.



中間試験 3 水素原子が発する光のスペクトルの波長 λ は, リュードベリ定数 R , 自然数 n, n' (ただし, $n' < n$) を用いて $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ と表される. プランク定数を h , 電子の質量を m_e , 真空中の光速を c として次の問いに答えなさい.

- (1) ボーアの振動数条件について説明しなさい. この問では, 必要に応じて各自で物理量を定義して良い.
- (2) 電子の力学的エネルギーは, 正の定数 α を用いて $E_n = -\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2} \frac{1}{n^2}$ と書ける. 定数 α を求めなさい.

(1) 電子がエネルギー準位を移動する際, 振動数が $\nu = \frac{E' - E}{h}$ (ただし $E' > E$) の光 (光子) を放出または吸収するという原理の=2.

(2) 振動数条件に $\nu = \frac{c}{\lambda}$ を代入すると,

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{h} \left\{ \left(-\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2} \frac{1}{n'^2} \right) - \left(-\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2} \frac{1}{n^2} \right) \right\} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha^2 m_e c}{2h} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\therefore R = \frac{\alpha^2 m_e c}{2h} \quad \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2hR}{m_e c}}$$

中間試験 4 x 軸上を動く 1 個の電子が, $x = -a$ と $x = a$ にある壁に閉じ込められている. $x < -a$, $a < x$ に電子が存在する確率を 0 とし, 次の問いに答えなさい. ただし, プランク定数を h , 真空中の光速を c , 電子の質量を m_e とし, $-a < x < a$ の領域での電子には何も相互作用が加わらないものとする.

- (1) 電子が取りうる運動量 p_n (n は自然数) を求めなさい.
- (2) 電子のエネルギー準位 E_n (n は自然数) を求めなさい.
- (3) 電子が第 1 励起状態から基底状態に遷移する際に放出される光の波長を求めなさい.

題意より, $x = \pm a$ での粒子の存在確率が 0 という条件を満たすような波長は $4a, 2a, \frac{4a}{3}, a, \dots$. つまり $\lambda_n = \frac{4a}{n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) である.

$$(1) \quad p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{h}{4a} n$$

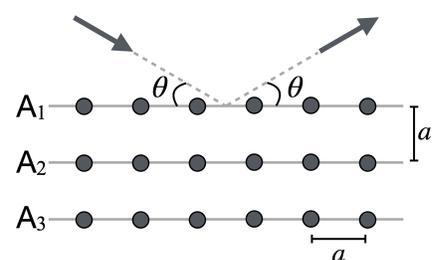
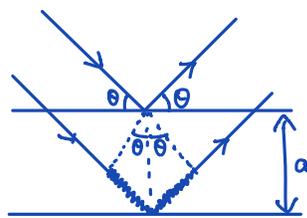
$$(2) \quad E_n = \frac{p_n^2}{2m_e} = \frac{1}{2m_e} \left(\frac{hn}{4a} \right)^2 = \frac{h^2}{32a^2 m_e} n^2$$

$$(3) \quad \lambda_{2 \rightarrow 1} = \frac{c}{\nu_{2 \rightarrow 1}} = \frac{c}{(E_2 - E_1)/h} = \frac{ch}{3h^2/32a^2 m_e} = \frac{32a^2 c m_e}{3h}$$

中間試験 5 図は結晶断面の模式図で, 隣あう原子が間隔 a で規則正しく配列している. 紙面に垂直な方向についても同様に間隔 a で原子が配列している. A_1, A_2, \dots の格子面と角度 θ をなす方向から電子線を入射させるとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) となりあう面 A_1 と A_2 で反射された電子線の経路差が $2a \sin \theta$ となることを説明しなさい.
- (2) 強い回折が生じる条件を書きなさい. なお, 回答に必要な変数等は各自で定義すること.

- (1) 右図の太線部分が経路差に対応する.
よって経路差は $2a \sin \theta$



- (2) 強い回折が生じるのは経路差が波長の自然数倍となるとき.
よって自然数を n , 電子の物質波の波長を λ とおくと

$$2a \sin \theta = n\lambda$$

が強い回折が生じる条件.

中間試験 6 図 6.1 は X 線発生管の概略図である。陰極フィラメントから出た熱電子は電圧 V によって加速され、真空中を陽極に向かって運動し、陽極に衝突する。衝突の際に X 線が放出される。図 6.2 は X 線のスペクトルであり、 λ_0 を最短波長とする「連続 X 線」と、 λ_1 、 λ_2 など一定の波長をもつ「特性 X 線」の 2 種類の X 線が発生していることがわかる。電気素量を e 、プランク定数を h 、真空中の光速を c として次の問に答えなさい。

- (1) 電子の初速度は 0 であるとして、電子が陽極表面に達したときの運動エネルギーを求めなさい。
- (2) 連続 X 線のエネルギーは、陽極に入射した電子がもっていた運動エネルギーの一部が光子のエネルギーに変化したものである。スペクトルが連続になる理由を簡潔に説明しなさい。
- (3) 連続 X 線の最短波長 λ_0 を求めなさい。

図 6.3 は陽極の金属原子のエネルギー準位を表したものである。エネルギーを低い方から順に E_K 、 E_L 、 E_M とする。このとき、波長 λ_1 の特性 X 線は、エネルギー E_L の定常状態の電子がエネルギー E_K の定常状態に移るときに放出される。また、波長 λ_2 の特性 X 線は、エネルギー E_M の定常状態の電子がエネルギー E_K の定常状態に移るときに放出される。

- (4) $E_M - E_L$ を求めなさい。
- (5) 加速電圧を V から $2V$ に増加するとき、発生する連続 X 線の最短波長 λ_0 と、特性 X 線のピークをとる波長 λ_1 、 λ_2 がそれぞれどのように変化するか説明しなさい。

(1) eV

(2) 陽極に衝突する仕方は様々なので、その際に受け渡すエネルギーは異なる

(3) 最短波長は、運動エネルギーが全て光子のエネルギーに変化した状態
光子のエネルギーは $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ なので

$$eV = \frac{hc}{\lambda_0} \quad \odot \quad \lambda_0 = \frac{hc}{eV}$$

(4) 問題文より

$$E_L - E_K = \frac{hc}{\lambda_1}, \quad E_M - E_K = \frac{hc}{\lambda_2}$$

$$\odot \quad E_M - E_L = hc \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

(5) (3)より、 $2V$ のときは最短波長は $\frac{\lambda_0}{2}$ 。

一方、 λ_1 と λ_2 は E_K, E_L, E_M 、つまり陽極の種類に応じて決まるので、 $2V$ に変えても λ_1 と λ_2 は不変。

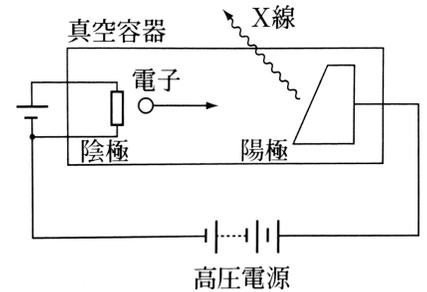


図 6.1

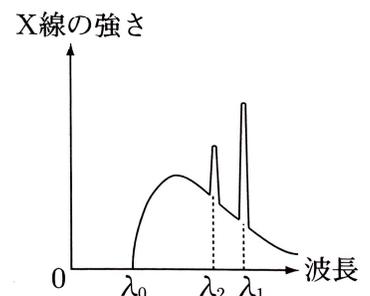


図 6.2

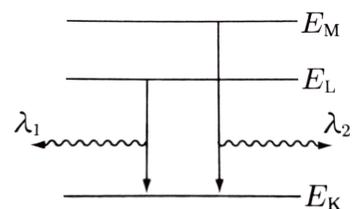


図 6.3