解答例

量子力学 I (2021 年度：鳴海)　　番号:　　名前:

期末試験 1　次の文章の下線部は誤りがある．下線部を修正し，正しい文章にしなさい．

(1) 量子系では，全ての物理量の<u>測定値が同一</u>となる二つの系を同一の状態と考える．

測定値の確率分布が同一

(2) 量子系の状態は，<u>成分が実数の規格化されたベクトル</u>である状態ベクトルで表される．

成分が複素数の規格化されたベクトル

(3) 量子系の可観測量は，<u>実数を取る変数</u>で表される．

演算子

(4) 可観測量 $\hat{A}$ の固有状態 $|a_i\rangle$ に対して $\hat{A}$ を測定するとき，$|a_i\rangle$ の固有値 a_i が得られる可能性は <u>50% である</u>．

100% である．

(5) 状態 $|\psi(t)\rangle$ に対して可観測量 $\hat{A}$ を測定するとき，$|\psi(t)\rangle = \sum_i \psi(a_i, t)\,|a_i\rangle$ と固有状態 $|a_i\rangle$ で展開できるのであれば，測定値として固有値 a_i が得られる確率は<u>$|\psi(a_i, t)|$ である</u>．

$|\psi(a_i, t)|^2$

(6) ハミルトニアンを $\hat{H}$，エネルギー固有値を E_n，E_n に対するエネルギー固有状態を $|n\rangle$ とする：$\hat{H}\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle$．このとき，状態 $|\psi(t)\rangle$ は<u>$\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle = E_n\,|\psi(t)\rangle$</u>に従って時間発展する．

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

期末試験 2　行列 $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えなさい．

(1)　固有値が ± 1 であることを示しなさい．

(2)　固有値 1 についての規格化された固有ベクトルを求めなさい．

(1) 特性方程式は $\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 1 = 0$　$\therefore\ \lambda = \pm 1$

(2) 固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$ix - y = 0$ より $x = c$ とおくと $y = ic$　よって固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$

規格化するとき $c' = \sqrt{(1\ \ i^*)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$　$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

期末試験 3　物理量 $\hat{A}$ を測定したところ，二つの測定値 a_1, a_2 が得られた．測定値 a_i に対応する固有状態を $|a_i\rangle$ として状態が $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|a_1\rangle - \frac{1-\sqrt{3}i}{4}|a_2\rangle$ と表現できるとき，次の問に答えなさい．

(1)　固有値 a_1，a_2 が得られる確率はそれぞれいくらか．

(2)　$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ のとき，測定値の期待値はいくらか．

(1) $a_1 : \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$,　$a_2 : \left|-\frac{1-\sqrt{3}i}{4}\right|^2 = \frac{1}{4}$.

(2) 期待値は $1\times\frac{3}{4} + 2\times\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

別 $\hat{A}|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{A}|a_1\rangle - \frac{1-\sqrt{3}i}{4}\hat{A}|a_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|a_1\rangle - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}|a_2\rangle$

$\Rightarrow \langle\psi|A|\psi\rangle = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle a_1| - \frac{1+\sqrt{3}i}{4}\langle a_2|\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|a_1\rangle - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}|a_2\rangle\right) = \frac{5}{4}$.

期末試験 4　エネルギー固有値を E_n，E_n に対するエネルギー固有状態を $|n\rangle$ とするとき，次の問に答えなさい．

(1)　初期状態が $|n\rangle$ であるとき，時刻 t での状態が $|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|n\rangle$ と表されることを，シュレディンガー方程式に代入することで確かめなさい．

(2)　初期状態が $\sum_n \varphi_n|n\rangle$ であるとき，時刻 t での状態は $|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n|n\rangle$ と書ける．このことから，$\langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle = \sum_n \varphi_n^*\varphi_n$ であることを示しなさい．

(3)　$\langle\psi(0)\,|\,\psi(0)\rangle = \langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle$ を示し，この関係式の物理的意味を説明しなさい．

(1) (左辺) $= i\hbar\frac{d}{dt}\left(e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|n\rangle\right) = i\hbar\left(-i\frac{E_n}{\hbar}\,e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|n\rangle\right) = E_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|n\rangle$

(右辺) $= \hat{\mathcal{H}}\left(e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|n\rangle\right) = e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\hat{\mathcal{H}}|n\rangle = e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}E_n|n\rangle$

(2) $\langle\psi(t)| = \sum_m e^{i\frac{E_m}{\hbar}t}\varphi_m^*\langle m|$ なので

$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \sum_n\sum_m e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)t}\varphi_m^*\varphi_n\langle m|n\rangle$

$= \sum_n \varphi_n^*\varphi_n$　$(\because \langle m|n\rangle = \delta_{m,n})$

(3) $\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = \sum_n\sum_m \varphi_m^*\varphi_n\langle m|n\rangle = \sum_n \varphi_n^*\varphi_n$

これは確率の総和が1に保たれていることを示す.

期末試験 5　束縛状態の例として，領域 $0 \leq x \leq L$ で 1 次元運動する質量 m の粒子を考える．領域内での粒子は相互作用を受けない（つまり，位置エネルギーが 0）として，次の問いに答えなさい．

(1)　領域内の粒子の位置を $\hat{x}$，運動量を $\hat{p}$ で表すとき，領域内のハミルトニアン $\hat{H}(\hat{x}, \hat{p})$ を書きなさい．

(2)　この系について，エネルギー固有値を E，E に属するエネルギー固有関数を $\varphi(x)$ とするとき，シュレディンガー表現による定常状態でのシュレディンガー方程式を書きなさい．なお，シュレディンガー表現では運動量演算子が $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ で表されることは既知としなさい．

$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ とするとき，$\varphi(x)$ の一般解は $\varphi(x) = A\cos kx + B\sin kx$（ただし，$A$ と B は定数）と表される．境界条件 $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ から，k と E の値は離散的の値をとる．以下では，そのことを明示的に示すために，k を k_n，E を E_n（ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$）と書く．

(3)　k_n を n と L を用いて表しなさい．

(4)　E_n を $\hbar$，L，m，n を用いて表しなさい．

(1) 古典的ハミルトニアンは $H = \frac{p^2}{2m}$. よって $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

(2) シュレディンガー表現では $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ なので

$\hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi = E\varphi \cdots ※$

(3) $\varphi(0) = A$ より $A = 0$. また，$\varphi(L) = B\sin kL$ より $B\sin kL = 0$.

$B=0$ だと $\varphi = 0$ となって不適.

よって $\sin kL = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi$　$(n = 1, 2, 3 \ldots)$　$\therefore$ $k_n = \frac{n\pi}{L}$ //

(4) $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$ //

期末試験 6　行列 $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$，$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　$\hat{\sigma}_z$ の固有値は ± 1 である．それぞれの固有値に対する規格化された固有ベクトルを求めなさい．

(2)　状態 $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}$ について，$\hat{\sigma}_z$ を測定したときに測定値として 1 が得られる確率を，α_+ と α_- のうち適当なものを用いて表しなさい．

(3)　$\hat{\sigma}_z$ の期待値 $\langle \psi \,|\, \hat{\sigma}_z \,|\, \psi \rangle$ を α_+ と α_- を用いて表しなさい．

可観測量 $\hat{A}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$ が $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = i\hat{C}$ という交換関係を満たすとき，可観測量 $\hat{X}$ を測定したときの平均値からのずれ（ゆらぎ）を f_X とすると，ロバートソンの不等式 $f_A f_B \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle \psi \middle| \hat{C} \middle| \psi \right\rangle\right|$ が成り立つ．

(4)　$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y]$ を $\hat{\sigma}_z$ を用いて表しなさい．

(5)　$\hat{\sigma}_x$ が確定値をもつとき，$\hat{\sigma}_z$ の測定値についてロバートソンの不等式を踏まえて説明しなさい．

(1) 1に対して $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 規格化されたものは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

-1に対して $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 規格化されたものは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書く; $\hat{\sigma}_z|+\rangle = |+\rangle$, $\hat{\sigma}_z|-\rangle = -|-\rangle$.

$\begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = \alpha_+|+\rangle + \alpha_-|-\rangle$ より, α_+ と α_- は $\hat{\sigma}_z$ の波動関数

よってボルンの規則より 1が得られる確率は $|\alpha_+|^2$ 〃

(3) $(\alpha_+^* \ \alpha_-^*)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = (\alpha_+^* \ \alpha_-^*)\begin{pmatrix} \alpha_+ \\ -\alpha_- \end{pmatrix} = |\alpha_+|^2 - |\alpha_-|^2$ 〃

(4) $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2i\hat{\sigma}_z$ 〃

(5) $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ のゆらぎを f_{σ_x}, f_{σ_y} とかく, ロバートソンの不等式より $f_{\sigma_x} f_{\sigma_y} \geq |\langle \psi|\hat{\sigma}_z|\psi\rangle|$

$\hat{\sigma}_x$ が確定値をもつとき, $f_{\sigma_x} = 0$. よって $\langle \psi|\hat{\sigma}_z|\psi\rangle = 0$.

(3)をふまえると これは $|\alpha_+|^2 = |\alpha_-|^2$. これは ±1 の固有値がそれぞれ 50%の確率で表れる ことに対応.