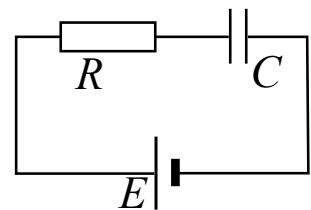


期末試験 1 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 3x^2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ で表される力を考える。ただし、 \mathbf{i} と \mathbf{j} はそれぞれ x 方向と y 方向を向く単位ベクトルであるとする。

- (1) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ を、 x , y , dx , dy から必要なものを用いて表しなさい。
- (2) 原点 O から経路 $C: y = 2x$ で点 $(1, 2)$ に至る仕事 $W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ を求めなさい。

期末試験 2 直流電源 (電圧 E)、電気抵抗 (抵抗 R)、コンデンサ (電気容量 C) が直列に並んだ電気回路を考える。ただし、回路を流れる電流 $I(t)$ はコンデンサの電荷 $Q(t)$ を用いて $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ と表される。

- (1) $Q(t)$ についての微分方程式を書きなさい。
- (2) 定常状態での電荷 Q_∞ を求めなさい。
- (3) $t = 0$ で電荷がたまっていない (つまり $Q(0) = 0$) とき、電荷 $Q(t)$ を求めなさい。

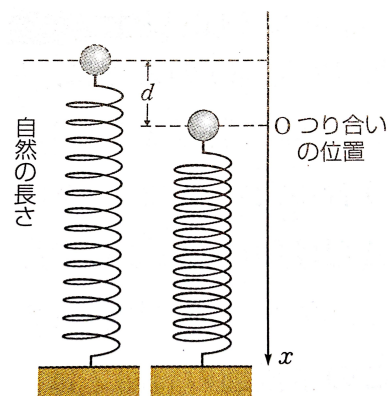


期末試験 3 鉛直方向に一定の加速度 α で運動する箱の中で、質量 M の質点を水平に発射した。発射点を原点、 x 方向を発射方向、 y 方向を鉛直上向きとして、次の問に答えなさい。

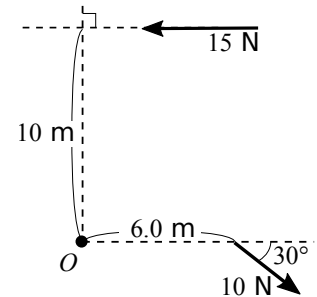
- (1) 地上で静止する人から見た質点の運動方程式を、 x 方向と y 方向のそれぞれについて書きなさい。
- (2) 箱の中で静止する人から見た質点の運動方程式を、 x 方向と y 方向のそれぞれについて書きなさい。
- (3) α が $-g$ と等しいとき、箱の中で静止する人から物体はどのように見えるか説明しなさい。

期末試験 4 軽いばねの一端を床に固定し、他端に質量 M の質点を取り付けると、ばねが自然長から d だけ縮んで静止した。その後、ばねが自然長になるまで質点を鉛直上向きに持ち上げて静かにはなすと、鉛直方向に振動した。つり合いの位置を原点として鉛直下向きを正方向とする x 軸を考え、時刻 t での質点の位置を $x(t)$ とする。また、重力加速度の大きさを g とする。

- (1) ばね定数を、 d , g , M を用いて表しなさい。
- (2) 質点に働く重力とバネの弾性力の合力を、 d , g , $x(t)$, M を用いて表しなさい。
- (3) 時刻 t での質点の速度 $v(t)$ を求めなさい。



期末試験 5 図のような二つの力が加わっているとき、点 O を中心とする力のモーメントの合計を求めなさい。ただし、紙面を x - y 平面とし、紙面手前方向を z 方向としなさい。



期末試験 6 保存力 $F(x) = -kx$ (ただし、 k は正の定数) が加わる質点の運動を考える。

- (1) 位置エネルギー $U(x)$ を求め、横軸を x 、縦軸を $U(x)$ としてグラフに表しなさい。
- (2) 質点が初速度 0 で運動を始める。初期位置が $x_0 = -1.0$ のとき、質点の運動を定性的に説明しなさい。

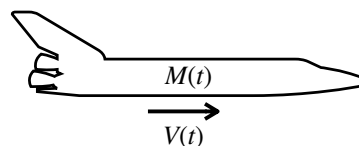
期末試験 7 質点 A (質量 M_A) と質点 B (質量 M_B) がある。はじめ B が静止していて、これに A が速度 v_A で衝突したところ、衝突後に A が静止した。

- (1) 衝突後の B の速度を v_B とするとき、この衝突のはねかえり係数 e を v_A と v_B を用いて表しなさい。
- (2) この衝突のはねかえり係数 e を M_A 、 M_B を用いて表しなさい。
- (3) 問題文の現象が起こるための必要条件を M_A と M_B を用いて表しなさい。

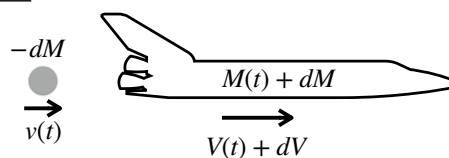
期末試験 8 時刻 t で質量が $M(t)$ であるロケットが速度 $V(t)$ で直線運動している。ロケットは燃料を内包しており、燃料を放出することでロケットの速度を変化できる。放出の際、ロケットに対する燃料の相対速度が一定値 $-u$ の状況を考える。ただし、質量 $-dM$ の燃料を放出する時間を dt 、放出された燃料の速度を $v(t)$ とし、放出によりロケットの速度は dV だけ変化したとする。

- (1) 放出前のロケットと燃料の合計運動量 $P(t)$ を書きなさい。
- (2) 放出後のロケットと燃料の合計運動量 $P(t + dt)$ を書きなさい。
- (3) $v(t)$, $V(t)$, u の間に成り立つ関係式を書きなさい。ただし、 dV は微小量なので無視しなさい。
- (4) 放出前後の系の運動量の変化 $dP = P(t + dt) - P(t)$ について、 $dP = MdV + udM$ を示しなさい。ただし、 dM と dV はともに微小量なのでそれらの積は無視しなさい。
- (5) 系に加わる外力を F_{ext} とするとき、この系の運動方程式を求めなさい。
- (6) 外力が加わらない状況で、単位時間あたり質量 $-dM/dt$ のガスを放出し続けるとき、時刻 t でのロケットの速度 $V(t)$ を求めなさい。ただし、 $t = 0$ でのロケットの速度と質量を、それぞれ V_0 , M_0 とする。

放出前



放出後



解答例

物理学 I (2022 年度: 鳴海)

学籍番号:

名前:

期末試験 1 $F(\mathbf{r}) = 3x^2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ で表される力を考える. ただし, \mathbf{i} と \mathbf{j} はそれぞれ x 方向と y 方向を向く単位ベクトルであるとする.

- (1) $F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ を, x, y, dx, dy から必要なものを用いて表しなさい.
- (2) 原点 O から経路 $C: y = 2x$ で点 $(1, 2)$ に至る仕事 $W = \int_C F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ を求めなさい.

$$(1) F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 3x^2y dx + x^3 dy,$$

$$(2) \text{経路 } C \text{ は } y = 2x \Rightarrow dy = 2dx \text{ より}$$

$$F \cdot d\mathbf{r} = 6x^3 dx + 2x^3 dx = 8x^3 dx$$

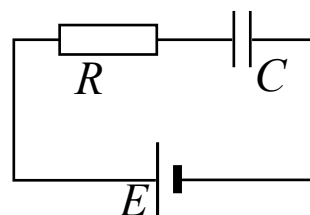
$$\odot W = \int_0^1 8x^3 dx = 2[x^4]_0^1 = 2.$$

期末試験 2 直流電源 (電圧 E), 電気抵抗 (抵抗 R), コンデンサ (電気容量 C) が直列に並んだ電気回路を考える. ただし, 回路を流れる電流 $I(t)$ はコンデンサの電荷 $Q(t)$ を用いて $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ と表される.

- (1) $Q(t)$ についての微分方程式を書きなさい.
- (2) 定常状態での電荷 Q_∞ を求めなさい.
- (3) $t = 0$ で電荷がたまっていない (つまり $Q(0) = 0$) とき, 電荷 $Q(t)$ を求めなさい.

(1) キルヒホッフの第2法則より

$$RI + \frac{Q}{C} = E \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} + \frac{E}{R}$$



(2) 定常状態では $\frac{dQ}{dt} = 0$ より $Q_\infty = CE$.

(3) (1) の微分方程式を解くと

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}(Q - CE) \Rightarrow \int \frac{dQ}{Q - CE} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\Rightarrow \log(Q - CE) = -\frac{1}{RC}t + A \quad (A \text{ は積分定数})$$

$$\Rightarrow Q = CE + Be^{-\frac{t}{RC}}$$

$$t=0 \text{ とき } Q=0 \text{ より } B = -CE \quad \text{以上より } Q = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

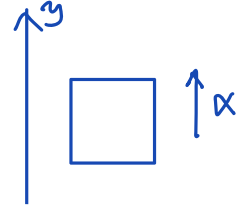
期末試験 3 鉛直方向に一定の加速度 α で運動する箱の中で、質量 M の質点を水平に発射した。発射点を原点、 x 方向を発射方向、 y 方向を鉛直上向きとして、次の問に答えなさい。

- (1) 地上で静止する人から見た質点の運動方程式を、 x 方向と y 方向のそれぞれについて書きなさい。
- (2) 箱の中で静止する人から見た質点の運動方程式を、 x 方向と y 方向のそれぞれについて書きなさい。
- (3) α が $-g$ と等しいとき、箱の中で静止する人から物体はどのように見えるか説明しなさい。

$$(1) M \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad M \frac{d^2y}{dt^2} = -Mg$$

$$(2) M \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad M \frac{d^2y}{dt^2} = -Mg - M\alpha$$

(3) $\alpha = -g$ のとき、 $M \frac{d^2x}{dt^2} = M \frac{d^2y}{dt^2} = 0$ より初速度を保持し水平に運動しているように見える。



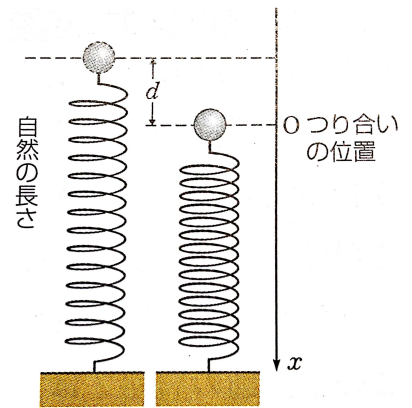
期末試験 4 軽いばねの一端を床に固定し、他端に質量 M の質点を取り付けると、ばねが自然長から d だけ縮んで静止した。その後、ばねが自然長になるまで質点を鉛直上向きに持ち上げて静かにはなすと、鉛直方向に振動した。つり合いの位置を原点として鉛直下向きを正方向とする x 軸を考え、時刻 t での質点の位置を $x(t)$ とする。また、重力加速度の大きさを g とする。

- (1) ばね定数を、 d, g, M を用いて表しなさい。
- (2) 質点に働く重力とバネの弾性力の合力を、 $d, g, x(t), M$ を用いて表しなさい。
- (3) 時刻 t での質点の速度 $v(t)$ を求めなさい。

$$(1) \text{力のつりあいより } k = \frac{Mg}{d}$$

(2) $x(t)$ ではばねの伸びが $x(t) + d$ だけ、

$$F = -k(x(t) + d) + Mg = -kx(t)$$



(3) $x(t)$ の運動方程式は $M \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ より単振動。

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{d}} \text{ より一般解は } \begin{cases} x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{g}{d}} t\right) \\ v(t) = -\sqrt{\frac{g}{d}} A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{d}} t\right) + \sqrt{\frac{g}{d}} B \cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}} t\right) \end{cases}$$

$$x(0) = -d, \quad v(0) = 0 \text{ より } B = 0, \quad A = -d$$

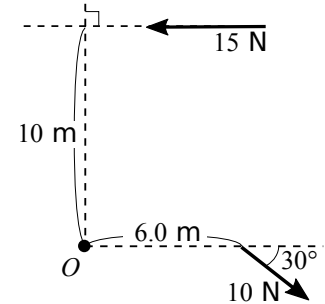
$$\text{よって } v(t) = \sqrt{gd} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{d}} t\right)$$

期末試験 5 図のような二つの力が加わっているとき、点 O を中心とする力のモーメントの合計を求めなさい。
ただし、紙面を x - y 平面とし、紙面手前方向を z 方向としなさい。

$$\text{上の力のモーメント: } 10 \times 15 \times \sin \frac{\pi}{2} = 150 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{下の力のモーメント: } -6.0 \times 10 \times \sin \frac{\pi}{8} = -30 \text{ N}\cdot\text{m}$$

以上より力のモーメントの合計は $120 \text{ N}\cdot\text{m}$

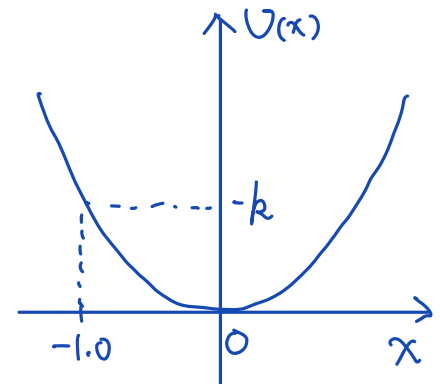


期末試験 6 保存力 $F(x) = -kx$ (ただし、 k は正の定数) が加わる質点の運動を考える。

- (1) 位置エネルギー $U(x)$ を求め、横軸を x 、縦軸を $U(x)$ としてグラフに表しなさい。
- (2) 質点が初速度 0 で運動を始める。初期位置が $x_0 = -1.0$ のとき、質点の運動を定性的に説明しなさい。

$$(1) U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \text{ より 右図のとおり:}$$

(2) 初速度 0 なのだから初期の位置エネルギーが系の力学的エネルギーとなる。力学的エネルギーは一定なので、 -1.0 と 1.0 の間を単振動する。



期末試験 7 質点 A (質量 M_A) と質点 B (質量 M_B) がある。はじめ B が静止していて、これに A が速度 v_A で衝突したところ、衝突後に A が静止した。

- (1) 衝突後の B の速度を v_B とするとき、この衝突のはねかえり係数 e を v_A と v_B を用いて表しなさい。
- (2) この衝突のはねかえり係数 e を M_A 、 M_B を用いて表しなさい。
- (3) 問題文の現象が起こるための必要条件を M_A と M_B を用いて表しなさい。

$$(1) e = -\frac{0 - v_B}{v_A - 0} = \frac{v_B}{v_A} "$$

$$(2) \text{運動量保存の法則より } M_A v_A = M_B v_B \text{ より } e = \frac{M_A}{M_B} "$$

$$(3) 0 \leq e \leq 1 \text{ より } M_A \leq M_B "$$

期末試験 8 時刻 t で質量が $M(t)$ であるロケットが速度 $V(t)$ で直線運動している。ロケットは燃料を内包しており、燃料を放出することでロケットの速度を変化できる。放出の際、ロケットに対する燃料の相対速度が一定値 $-u$ の状況を考える。ただし、質量 $-dM$ の燃料を放出する時間を dt 、放出された燃料の速度を $v(t)$ とし、放出によりロケットの速度は dV だけ変化したとする。

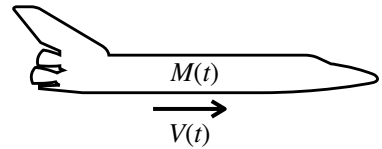
- (1) 放出前のロケットと燃料の合計運動量 $P(t)$ を書きなさい。
- (2) 放出後のロケットと燃料の合計運動量 $P(t+dt)$ を書きなさい。
- (3) $v(t)$, $V(t)$, u の間に成り立つ関係式を書きなさい。ただし、 dV は微小量なので無視しなさい。
- (4) 放出前後の系の運動量の変化 $dP = P(t+dt) - P(t)$ について、 $dP = M dV + u dM$ を示しなさい。ただし、 dM と dV はともに微小量なのでそれらの積は無視しなさい。
- (5) 系に加わる外力を F_{ext} とするとき、この系の運動方程式を求めなさい。
- (6) 外力が加わらない状況で、単位時間あたり質量 $-dM/dt$ のガスを放出し続けるとき、時刻 t でのロケットの速度 $V(t)$ を求めなさい。ただし、 $t=0$ でのロケットの速度と質量を、それぞれ V_0 , M_0 とする。

(1) $P(t) = M(t)V(t)$,,

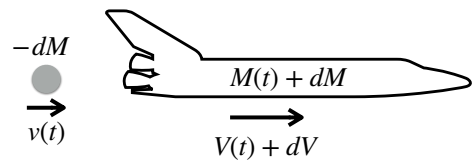
(2) $P(t+dt)$
 $= (M(t)+dM)(V(t)+dV) - dMv(t)$

(3) 相対速度の定義より
 $v(t) - V(t) = -u$,,

放出前



放出後



(4) $dP = (M+dM)(V+dV) - v dM - M V$
 $\approx M dV + V dM - v dM$ ($dM dV$ は無視した)
 $= M dV + u dM$ (⊙ (3))

(5) 時間 dt の運動量の変化が dP なのだから、 $\frac{dP}{dt} = F_{\text{ext}}$
 よって $M \frac{dV}{dt} + u \frac{dM}{dt} = F_{\text{ext}}$,,

(6) $F_{\text{ext}} = 0$ ならば $\frac{dV}{dt} = -\frac{u}{M} \frac{dM}{dt}$

両辺を $t=0$ から t まで積分すると

$$\int_0^t \frac{dV}{dt} dt = -u \int_0^t \frac{1}{M} \frac{dM}{dt} dt \Rightarrow \int_{V_0}^{V(t)} dV = u \int_{M_0}^{M(t)} \frac{dM}{M}$$

⊙ $V(t) = V_0 + u \log(M_0/M(t))$,,