中間試験 1　次の問題に答えなさい．ただし，プランク定数を h，真空中の光速を c としなさい．

(1) ラザフォードの原子モデルの問題点を，「制動放射」という言葉を用いて説明しなさい．

(2) 光電効果において，照射する光の振動数 ν，仕事関数 W，飛び出す電子の運動エネルギー K の間に成り立つ関係式を書きなさい．

(3) あるエネルギー準位からそれよりも高いエネルギー準位に電子が遷移することを何というか．

(4) エネルギーが E_2 のエネルギー準位からエネルギーが E_1（ただし，$E_2 > E_1$）のエネルギー準位に電子が遷移するとき，遷移に伴って放出される光の波長 λ を求めなさい．

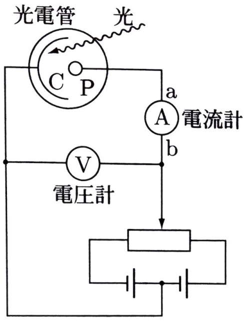
(5) 時刻 t，位置 x での波動関数を $\psi(x,t)$ とするとき，ボルンの規則について説明しなさい．

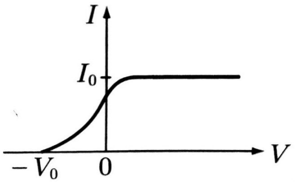
(6) 古典力学で扱える系（例えば，野球ボールの運動）と量子力学で扱うべき系（例えば，電子の運動）とで，測定という概念がどのように異なるか説明しなさい．

中間試験 2　光電管を用いた回路（図）について，光（振動数 ν）を陰極 C を照射したところ，陰極 C に対する陽極 P の電位 V が $V > -V_0$（ただし，$V_0 > 0$）のときに電流が流れた．電流 I を測定したところ，図の I-V グラフに示すような結果を得た．電気素量を e として，次の問いに答えなさい．

(1) 陰極から飛び出す電子の運動エネルギーの最大値を求めなさい．

(2) 照射する光を，同じ振動数だがより強い光に変える．このとき，I-V グラフの形状が照射光を変更する前後でどのように変化するか説明しなさい．





中間試験 3　水素原子中の電子の運動を，原子核を中心とする半径 r の等速円運動として考える．電子の質量を m，電子の電荷を $-e$，プランク定数を h として，次の問いに答えなさい．

(1) 電子の速さを v，自然数を n とするとき，ボーアの量子条件を表す式を書きなさい．

(2) 水素原子中の電子の運動方程式は $m\dfrac{v^2}{r} = k\dfrac{e^2}{r^2}$（$k$ はクーロン力の定数）で表される．このことを踏まえて，n 番目の軌道の半径を，m，e，k，h，n を用いて表しなさい．

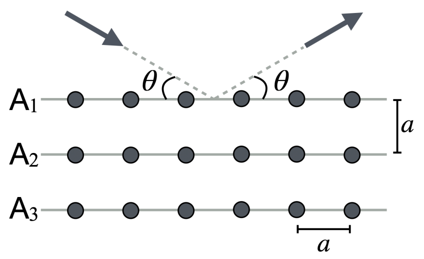
(3) 電子の力学的エネルギーは $E = -\dfrac{ke^2}{2r}$ で表される．このことを踏まえて，3 番目の軌道のエネルギー準位を，m，e，k，h を用いて表しなさい．

中間試験 4　x 軸上を動く 1 個の電子が，$x=-\dfrac{a}{2}$ と $x=\dfrac{a}{2}$ にある壁に閉じ込められている．$-\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{a}{2}$ の領域での電子には何も相互作用が加わらず，$x<-\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{a}{2}<x$ に電子が存在する確率を 0 として，次の問いに答えなさい．ただし，プランク定数を h，電子の質量を m としなさい．

(1)　電子が取りうる運動量 p_n（n は自然数）を求めなさい．
(2)　電子のエネルギー準位 E_n（n は自然数）を求めなさい．
(3)　電子が第 1 励起状態から基底状態に遷移する際に放出される光の振動数を求めなさい．

中間試験 5　図は結晶断面の模式図で，隣あう原子が間隔 a で規則正しく配列している．紙面に垂直な方向についても同様に間隔 a で原子が配列している．A_1，A_2, ... の格子面と角度 θ をなす方向から波長 λ の電子線を入射させるとき，次の問いに答えなさい．

(1)　となりあう面 A_1 と A_2 で反射された電子線の経路差が $2a\sin\theta$ となることを説明しなさい．
(2)　面 A_1 と A_2 で反射された電子線が干渉により弱め合う条件を，a，λ，θ，自然数 n を用いて表しなさい．



中間試験 6　次の問いに答えなさい．ただし，プランク定数を h，真空中の光速を c としなさい．

(1) 自由に動けないように固定された基底状態にある 1 個の原子（質量 m）に，振動数 ν_0 の光を当てると，光の吸収が起こり，この原子は第 1 励起状態になった．原子の第 1 励起状態のエネルギーを E_1，基底状態のエネルギーを E_0 とし，その差 $\Delta E = E_1 - E_0$ を，h と ν_0 を用いて表しなさい．

(2) 前問と同じ第 1 励起状態にある原子を，自由に動けるようにして静止させておく．この原子が振動数 ν の光を放出して基底状態に戻り，原子は放出された光と逆向きに速さ v で動き出した．動き出した原子の運動エネルギーと運動量をそれぞれ求めなさい．

(3) 放出された光子の運動量の大きさを求めなさい．

(4) 放出された光の振動数 ν を，h，c，m，ν_0 を用いて表しなさい．

(5) 前問で求めた ν について，$h\nu_0 \ll \dfrac{1}{2}mc^2$ であることを踏まえると $\nu \simeq \nu_0 - \dfrac{h}{2mc^2}\nu_0^2$ と近似できることを示しなさい．なお，$|x| \ll 1$ のときに $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$ と近似できることは既知として良い．

解答例

中間試験 1　次の問題に答えなさい．ただし，プランク定数を h，真空中の光速を c としなさい．

(1) ラザフォードの原子モデルの問題点を，「制動放射」という言葉を用いて説明しなさい．

加速度をもって運動する荷電子は制動放射によりエネルギーを失う．
そのため，ラザフォードの原子モデルのように半径一定の円運動はできない．

(2) 光電効果において，照射する光の振動数 ν，仕事関数 W，飛び出す電子の運動エネルギー K の間に成り立つ関係式を書きなさい．

$$h\nu = W + K$$

(3) あるエネルギー準位からそれよりも高いエネルギー準位に電子が遷移することを何というか．

励起

(4) エネルギーが E_2 のエネルギー準位からエネルギーが E_1（ただし，$E_2 > E_1$）のエネルギー準位に電子が遷移するとき，遷移に伴って放出される光の波長 λ を求めなさい．

振動数条件から $\nu = \dfrac{E_2 - E_1}{h}$．

$c = \nu\lambda$ より　$\lambda = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{hc}{E_2 - E_1}$ //

(5) 時刻 t，位置 x での波動関数を $\psi(x,t)$ とするとき，ボルンの規則について説明しなさい．

ボルンの規則は，時刻 t，位置 x で粒子が観測される確率が
$|\psi(x,t)|^2$ で表わされるというもの．

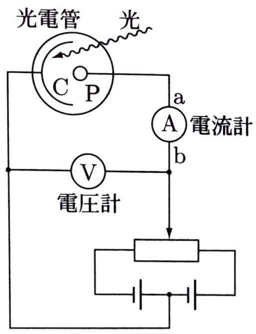
(6) 古典力学で扱える系（例えば，野球ボールの運動）と量子力学で扱うべき系（例えば，電子の運動）とで，測定という概念がどのように異なるか説明しなさい．

古典系では系に影響を及ぼさないように測定することができるが，
量子系では測定が系に影響を及ぼしてしまう．

中間試験 2　光電管を用いた回路（図）について，光（振動数 ν）を陰極 C を照射したところ，陰極 C に対する陽極 P の電位 V が $V > -V_0$（ただし，$V_0 > 0$）のときに電流が流れた．電流 I を測定したところ，図の I-V グラフに示すような結果を得た．電気素量を e として，次の問いに答えなさい．

(1) 陰極から飛び出す電子の運動エネルギーの最大値を求めなさい．

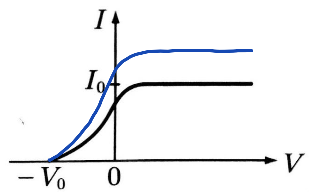
(2) 照射する光を，同じ振動数だがより強い光に変える．このとき，I-V グラフの形状が照射光を変更する前後でどのように変化するか説明しなさい．



(1) 求める運動エネルギーを K_{max} とすると，
$V=-V_0$ では K_{max} を有する電子しか陽極 P に届かず，
また，P では全てのエネルギーを失っている．よって

$K_{max} + (-eV_0) = 0$　∴ $K_{max} = eV_0$ //

(2) 振動数が同じなのでエネルギーは変わらない．そのため，$I>0$ となる電圧は $-V_0$ のまま変わらない．
一方，光の強さを変えたことで光子の数が増えるので
電流の最大値は増加する．よって右図のようになる．



中間試験 3　水素原子中の電子の運動を，原子核を中心とする半径 r の等速円運動として考える．電子の質量を m，電子の電荷を $-e$，プランク定数を h として，次の問いに答えなさい．

(1) 電子の速さを v，自然数を n とするとき，ボーアの量子条件を表す式を書きなさい．

(2) 水素原子中の電子の運動方程式は $m\dfrac{v^2}{r} = k\dfrac{e^2}{r^2}$（$k$ はクーロン力の定数）で表される．このことを踏まえて，n 番目の軌道の半径を，m，e，k，h，n を用いて表しなさい．

(3) 電子の力学的エネルギーは $E = -\dfrac{ke^2}{2r}$ で表される．このことを踏まえて，3 番目の軌道のエネルギー準位を，m，e，k，h を用いて表しなさい．

(1) $mrv = \dfrac{nh}{2\pi}$

(2) (1)の式から $v = \dfrac{nh}{2\pi m r}$．これを運動方程式に代入すると

$$\frac{m}{r}\left(\frac{nh}{2\pi m r}\right)^2 = k\frac{e^2}{r^2} \Leftrightarrow \frac{n^2h^2}{4\pi^2 m r^3} = \frac{ke^2}{r^2} \Leftrightarrow r = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 k m} n^2$$ //

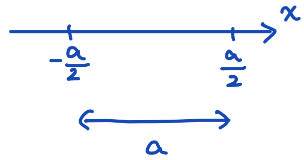
(3) $E = -\dfrac{ke^2}{2}\left(\dfrac{4\pi^2 e k m}{h^2 n^2}\right) = -\dfrac{2\pi^2 e^3 k^2 m}{h^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$ より $n=3$ では $-\dfrac{2\pi^2 e^3 k^2 m}{9h^2}$ //

中間試験 4　x 軸上を動く 1 個の電子が，$x=-\frac{a}{2}$ と $x=\frac{a}{2}$ にある壁に閉じ込められている．$-\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2}$ の領域での電子には何も相互作用が加わらず，$x<-\frac{a}{2}$，$\frac{a}{2}<x$ に電子が存在する確率を 0 として，次の問いに答えなさい．ただし，プランク定数を h，電子の質量を m としなさい．

(1)　電子が取りうる運動量 p_n（n は自然数）を求めなさい．
(2)　電子のエネルギー準位 E_n（n は自然数）を求めなさい．
(3)　電子が第 1 励起状態から基底状態に遷移する際に放出される光の振動数を求めなさい．

(1) 境界外で電子が存在しないことより，電子波のとりうるドブロイ波は

$$\lambda = 2a,\ a,\ \frac{2}{3}a,\ \dots = \frac{2a}{n} \quad (n\text{は自然数})$$



よって

$$p_n = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2a}n$$ 〃

(2)

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{hn}{2a}\right)^2 = \frac{h^2}{8a^2m}n^2$$ 〃

(3)

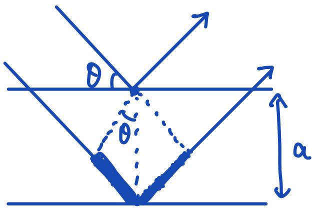
$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{h}{8a^2m}(2^2-1^2) = \frac{3h}{8a^2m}$$ 〃

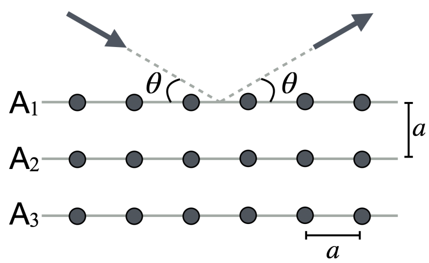
中間試験 5　図は結晶断面の模式図で，隣あう原子が間隔 a で規則正しく配列している．紙面に垂直な方向についても同様に間隔 a で原子が配列している．A_1，A_2, ... の格子面と角度 θ をなす方向から波長 λ の電子線を入射させるとき，次の問いに答えなさい．

(1)　となりあう面 A_1 と A_2 で反射された電子線の経路差が $2a\sin\theta$ となることを説明しなさい．
(2)　面 A_1 と A_2 で反射された電子線が干渉により弱め合う条件を，a，λ，θ，自然数 n を用いて表しなさい．

(1) 右図の太線部分が経路差で，図より

$2a\sin\theta$





(2) 干渉で弱め合うのは経路差が半波長分ずれるときなので条件は

$$2a\sin\theta = n\lambda - \frac{1}{2}\lambda$$

$$\Leftrightarrow 2a\sin\theta = \left(n-\frac{1}{2}\right)\lambda$$ 〃

中間試験 6　次の問いに答えなさい．ただし，プランク定数を h，真空中の光速を c としなさい．

(1) 自由に動けないように固定された基底状態にある 1 個の原子（質量 m）に，振動数 ν_0 の光を当てると，光の吸収が起こり，この原子は第 1 励起状態になった．原子の第 1 励起状態のエネルギーを E_1，基底状態のエネルギーを E_0 とし，その差 $\Delta E = E_1 - E_0$ を，h と ν_0 を用いて表しなさい．

(2) 前問と同じ第 1 励起状態にある原子を，自由に動けるようにして静止させておく．この原子が振動数 ν の光を放出して基底状態に戻り，原子は放出された光と逆向きに速さ v で動き出した．動き出した原子の運動エネルギーと運動量をそれぞれ求めなさい．

(3) 放出された光子の運動量の大きさを求めなさい．

(4) 放出された光の振動数 ν を，h，c，m，ν_0 を用いて表しなさい．

(5) 前問で求めた ν について，$h\nu_0 \ll \frac{1}{2}mc^2$ であることを踏まえると $\nu \simeq \nu_0 - \frac{h}{2mc^2}\nu_0^2$ と近似できることを示しなさい．なお，$|x| \ll 1$ のときに $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ と近似できることは既知として良い．

(1)　$h\nu_0$

(2)　運動エネルギー: $\frac{1}{2}mv^2$, 運動量: mv

(3)　光の波長 λ は $\lambda = \frac{c}{\nu}$. よって光子の運動量は $\frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$ //

(4)　エネルギー保存則より $h\nu_0 + E_0 = E_0 + h\nu + \frac{1}{2}mv^2$

$\Longleftrightarrow \quad h\nu_0 = h\nu + \frac{1}{2}mv^2 \quad \cdots ①$

運動量保存の法則より　$0 = mv - \frac{h\nu}{c} \quad \cdots ②$

(∵ 負符号は逆向きの運動に対応)

② より　$v = \frac{h\nu}{mc}$. これを ① に代入すると

$h\nu_0 = h\nu + \frac{h^2}{2mc^2}\nu^2 \Longleftrightarrow \nu^2 + \frac{2mc^2}{h}\nu - \frac{2mc^2}{h}\nu_0 = 0$

$\nu > 0$ を踏まえると　$\nu = -\frac{mc^2}{h} + \sqrt{\frac{m^2c^4}{h^2} + \frac{2mc^2\nu_0}{h}} = \frac{mc^2}{h}\left(\sqrt{1 + \frac{2h\nu_0}{mc^2}} - 1\right)$ //

(5)　$h\nu_0 \ll \frac{1}{2}mc^2$ のとき，$\left(1 + \frac{2h\nu_0}{mc^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{h\nu_0}{mc^2} - \frac{h^2\nu_0^2}{2m^2c^4}$ なので

$\nu \simeq \frac{mc^2}{h}\left(\frac{h\nu_0}{mc^2} - \frac{h^2\nu_0^2}{2m^2c^4}\right) = \nu_0 - \frac{h\nu_0^2}{2mc^2}$ //