期末試験 1　次の問題に答えなさい．ただし，プランク定数を h，真空中の光速を c としなさい．

(1) 量子系の状態はどういった物理量で表されるか答えなさい．

(2) 量子系の可観測量（オブザーバブル）は何を用いて表されるか答えなさい．

(3) 量子系を測定するとどうなると考えられるか，「固有値」，「固有状態」という言葉を用いて説明しなさい．

(4) 位置 x での波動関数を $\psi(x)$ とするとき，ボルンの規則について説明しなさい．

(5) シュレディンガー表現での（時間依存する）シュレディンガー方程式を書きなさい．ただし，ハミルトニアンを $\hat{H}$，波動関数を $\psi(x,t)$ とする．

期末試験 2　行列 $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えなさい．

(1) 固有値を全て求めなさい．

(2) 前問で求めた固有値から一つを選び，その固有値に属する規格化された固有ベクトルを求めなさい．

期末試験 3　物理量 $\hat{A}$ を測定したところ，三つの測定値 a_1，a_2，a_3 が得られた．測定値 a_i に対応する固有状態を $|a_i\rangle$（$i=1,2,3$）として，状態が $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{3} \psi(a_i)\,|a_i\rangle$ と表現できるとき，次の問に答えなさい．

(1)　$\psi(a_1) = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{10}$ であるとき，測定値として a_1 を得る確率はいくらか．

(2)　測定値の期待値を，$\psi(a_i)$，a_i（$i=1,2,3$）を用いて表しなさい．

期末試験 4　エネルギー固有値を E_n，E_n に対するエネルギー固有状態を $|n\rangle$ とするとき，次の問に答えなさい．ただし，初期状態が $\sum_n \varphi_n\,|n\rangle$ であるとき，時刻 t での状態が $|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n\,|n\rangle$ と表されることは既知として良い．

(1)　$\langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle = \sum_n \varphi_n^*\varphi_n$ を示しなさい．

(2)　任意の t で $\langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle = 1$ となることを示しなさい．.

期末試験 5　領域 $0 \leq x \leq 2L$ で 1 次元運動する質量 m の粒子を考える．領域内での粒子は相互作用を受けないとして，次の問いに答えなさい．

(1) 粒子の位置を $\hat{x}$，運動量を $\hat{p}$ で表すとき，領域内のハミルトニアン $\hat{H}$ を，m と $\hat{p}$ を用いて表しなさい．

(2) シュレディンガー表現を採用するとき，エネルギー固有値を E，エネルギー固有状態の波動関数を $\varphi(x)$ として，定常状態でのシュレディンガー方程式を書きなさい．なお，シュレディンガー表現では運動量演算子は，ディラック定数 $\hbar$ を用いて $\hat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ で表される．

$k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ とするとき，$\varphi(x)$ の一般解は $\varphi(x) = A\cos kx + B\sin kx$（ただし，$A$ と B は定数）と表される．境界条件から，k と E の値は離散的の値をとる．以下では，そのことを明示的に示すために，k を k_n，E を E_n（ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$）と書く．

(3) k_n を n と L を用いて表しなさい．

(4) E_n を $\hbar$，L，m，n を用いて表しなさい．

(5) 領域内に必ず粒子が存在することから，領域内の $\varphi(x)$ を求めなさい．

期末試験 6　状態が時間変化して可観測量は時間変化しないとする考え方とは別に，状態が時間変化せず可観測量が時間変化する考え方もある[a]．これらの関係について，次の問いに答えなさい．なお，任意の可観測量 $\hat{X}$ について，可観測量の指数関数はを $\exp\left[\hat{X}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{X}^n}{n!}$ として定義され，$\frac{d}{dt}\exp\left[t\hat{X}\right] = \hat{X}\exp\left[t\hat{X}\right] = \exp\left[t\hat{X}\right]\hat{X}$ を満たすことは既知として良い．

(1) 時間変化する状態を $|\psi(t)\rangle$ で表すとき，ハミルトニアン $\hat{H}$ を用いて $|\psi(t)\rangle = \exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]|\psi_0\rangle$ と表せることをシュレディンガー方程式から説明しなさい．

(2) ある可観測量 $\hat{A}$ について，時刻 t での期待値は $\left\langle \psi(t)|\hat{A}|\psi(t) \right\rangle$ で表される．期待値が，時間変化する可観測量 $\hat{A}(t)$ を用いて $\left\langle \psi_0|\hat{A}(t)|\psi_0 \right\rangle$ と表されるとき，$\hat{A}(t)$ を $\hat{A}$，$\hbar$，$\hat{H}$，t を用いて表しなさい．ただし，$\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]$ の共役が $\exp\left[i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]$ であることは既知として良い．

(3) ハイゼンベルグ方程式 $\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}(t), \hat{H}\right]$ を示しなさい．

[a] 前者をシュレディンガー描像，後者をハイゼンベルグ描像という．

解答例

量子力学Ⅰ (鳴海担当分)　　番号:　　名前:

期末試験 1　次の問題に答えなさい．ただし，プランク定数を h，真空中の光速を c としなさい．

(1)　量子系の状態はどういった物理量で表されるか答えなさい．

(2)　量子系の可観測量（オブザーバブル）は何を用いて表されるか答えなさい．

(3)　量子系を測定するとどうなると考えられるか，「固有値」，「固有状態」という言葉を用いて説明しなさい．

(4)　位置 x での波動関数を $\psi(x)$ とするとき，ボルンの規則について説明しなさい．

(5)　シュレディンガー表現での（時間依存する）シュレディンガー方程式を書きなさい．ただし，ハミルトニアンを $\hat{H}$，波動関数を $\psi(x,t)$ とする．

(1) 複素数を要素にもつ(規格化された)状態ベクトル

(2) 演算子

(3) 可観測量に対応する固有値のいずれかが測定され，その固有値に属する固有状態に変化する

(4) $|\psi(x)|^2$ が 位置 x での存在確率に比例する.

(5) $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \hat{H}\psi(x,t)$$

期末試験 2　行列 $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えなさい．

(1)　固有値を全て求めなさい．

(2)　前問で求めた固有値から一つを選び，その固有値に属する規格化された固有ベクトルを求めなさい．

(1) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \iff \lambda^2 = 1 \quad \therefore \lambda = \pm 1$ //

(2) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，$\lambda=1$ のとき　$-2y=0$　$\therefore$ $x=c$, $y=0$ $(c \neq 0)$

よって規格化された固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ //

※ $\lambda=-1$ のとき，$2x=0$ $\therefore$ $x=0$, $y=c$ $(c \neq 0)$ より $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ //

期末試験 3　物理量 $\hat{A}$ を測定したところ，三つの測定値 a_1，a_2，a_3 が得られた．測定値 a_i に対応する固有状態を $|a_i\rangle$（$i=1,2,3$）として，状態が $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{3} \psi(a_i)\,|a_i\rangle$ と表現できるとき，次の問に答えなさい．

(1)　$\psi(a_1) = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{10}$ であるとき，測定値として a_1 を得る確率はいくらか．
(2)　測定値の期待値を，$\psi(a_i)$，a_i（$i=1,2,3$）を用いて表しなさい．

(1) $|\psi(a_1)|^2 = \dfrac{(1-\sqrt{5}i)(1+\sqrt{5}i)}{10^2} = \dfrac{1+5}{100} = \dfrac{3}{50}$ //

(2) a_iを測定する確率が$|\psi(a_i)|^2$なので期待値は

$$\sum_{i=1}^{3} a_i|\psi(a_i)|^2 = a_1|\psi(a_1)|^2 + a_2|\psi(a_2)|^2 + a_3|\psi(a_3)|^2 \ //$$

(別) $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_j\langle a_i|a_j\rangle\,\psi^*(a_j)\psi(a_i) = \sum_{i=1}^{3} a_i|\psi(a_i)|^2$ //

期末試験 4　エネルギー固有値を E_n，E_n に対するエネルギー固有状態を $|n\rangle$ とするとき，次の問に答えなさい．ただし，初期状態が $\sum_n \varphi_n\,|n\rangle$ であるとき，時刻 t での状態が $|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n\,|n\rangle$ と表されることは既知として良い．

(1)　$\langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle = \sum_n \varphi_n^*\varphi_n$ を示しなさい．
(2)　任意の t で $\langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle = 1$ となることを示しなさい..

(1) $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \sum_n\sum_m e^{i\frac{E_n-E_m}{\hbar}t}\varphi_n^*\varphi_m\langle n|m\rangle = \sum_n \varphi_n^*\varphi_n$

∵ $\langle n|m\rangle = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n\neq m)\end{cases}$ ■

(2) $\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = \sum_n\sum_n \varphi_n^*\varphi_n\langle n|m\rangle = \sum_n \varphi_n^*\varphi_n$

∵ $\langle n|m\rangle = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n\neq m)\end{cases}$

よって $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$ は t によらず一定で $\sum_n \varphi_n^*\varphi_n$

ボルンの規則より $\varphi_n^*\varphi_n$ は確率を表しているのでその総和は必ず1となるので $\sum_n \varphi_n^*\varphi_n = 1$.

よって $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$ は時間 t に依らず 1 ■

期末試験 5　領域 $0 \le x \le 2L$ で 1 次元運動する質量 m の粒子を考える．領域内での粒子は相互作用を受けないとして，次の問いに答えなさい．

(1) 粒子の位置を $\hat{x}$，運動量を $\hat{p}$ で表すとき，領域内のハミルトニアン $\hat{H}$ を，m と $\hat{p}$ を用いて表しなさい．

(2) シュレディンガー表現を採用するとき，エネルギー固有値を E，エネルギー固有状態の波動関数を $\varphi(x)$ として，定常状態でのシュレディンガー方程式を書きなさい．なお，シュレディンガー表現では運動量演算子は，ディラック定数 $\hbar$ を用いて $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ で表される．

$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ とするとき，$\varphi(x)$ の一般解は $\varphi(x) = A\cos kx + B\sin kx$（ただし，$A$ と B は定数）と表される．境界条件から，k と E の値は離散的の値をとる．以下では，そのことを明示的に示すために，k を k_n，E を E_n（ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$）と書く．

(3) k_n を n と L を用いて表しなさい．

(4) E_n を $\hbar$，L，m，n を用いて表しなさい．

(5) 領域内に必ず粒子が存在することから，領域内の $\varphi(x)$ を求めなさい．

(1) $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

(2) $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = E\varphi(x)$

(3) $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ とおくと (2)の式は $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -k^2\varphi(x)$

よって一般解は $\varphi(x) = A\cos kx + B\sin kx$.

領域外に粒子は存在しないので $\varphi(0) = \varphi(2L) = 0$.

$\varphi(0) = A$ より $A = 0$. また，$\varphi(2L) = B\sin(2kL)$

$B=0$ は物理的に意味をもたないので $2kL = n\pi$ $\therefore k_n = \frac{n\pi}{2L}$ //

(4) $E_n = \frac{(\hbar k_n)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}n^2$

(5) 確率の和が1なので $\int_0^{2L}|\varphi(x)|^2dx = 1$. いま

$|B|^2\int_0^{2L}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2L}x\right)dx = |B|^2\int_0^{2L}\frac{1-\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{2}dx = L|B|^2$

よって $|B|^2 = \frac{1}{L}$ 以上より $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{2L}x\right)$ //

期末試験 6　状態が時間変化して可観測量は時間変化しないとする考え方とは別に，状態が時間変化せず可観測量が時間変化する考え方もある[a]．これらの関係について，次の問いに答えなさい．なお，任意の可観測量 $\hat{X}$ について，可観測量の指数関数はを $\exp\left[\hat{X}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{X}^n}{n!}$ として定義され，$\frac{d}{dt}\exp\left[t\hat{X}\right] = \hat{X}\exp\left[t\hat{X}\right] = \exp\left[t\hat{X}\right]\hat{X}$ を満たすことは既知として良い．

(1) 時間変化する状態を $|\psi(t)\rangle$ で表すとき，ハミルトニアン $\hat{H}$ を用いて $|\psi(t)\rangle = \exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]|\psi_0\rangle$ と表せることをシュレディンガー方程式から説明しなさい．

(2) ある可観測量 $\hat{A}$ について，時刻 t での期待値は $\left\langle \psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\right\rangle$ で表される．期待値が，時間変化する可観測量 $\hat{A}(t)$ を用いて $\left\langle \psi_0|\hat{A}(t)|\psi_0\right\rangle$ と表されるとき，$\hat{A}(t)$ を $\hat{A}$，$\hbar$，$\hat{H}$，t を用いて表しなさい．ただし，$\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]$ の共役が $\exp\left[i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]$ であることは既知として良い．

(3) ハイゼンベルグ方程式 $\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}(t), \hat{H}\right]$ を示しなさい．

[a] 前者をシュレディンガー描像，後者をハイゼンベルグ描像という．

(1) $$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

$$(\text{左辺}) = i\hbar\frac{d}{dt}\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]|\psi_0\rangle = \hat{H}\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]|\psi_0\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle = (\text{右辺})$$

$\blacksquare$

(2) $$\langle\psi(t)| = \left\langle\psi_0\right|\exp\left[i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]$$ より

$$\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \left\langle\psi_0\left|\exp\left[i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]\hat{A}\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]\right|\psi_0\right\rangle$$

よって $$\hat{A}(t) = \exp\left[i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]\hat{A}\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]$$

(3) $$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \left\{\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}\right)\exp\left[i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]\right\}\hat{A}\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right] + \exp\left[i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]\hat{A}\left\{\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right]\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\right)\right\}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}\hat{A}(t) - \hat{A}(t)\hat{H}\right) = \frac{1}{i\hbar}\left(\hat{A}(t)\hat{H} - \hat{H}\hat{A}(t)\right)$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}(t), \hat{H}\right]$$

$\blacksquare$