期末試験 1　t，$q=q(t)$，$\dot{q}=\dfrac{dq}{dt}$ に依存する関数 $f(t,q,\dot{q})$ について，汎関数 $I[q]=\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t,q,\dot{q})dt$ を考える．$f=\dfrac{1}{2}\dot{q}^2$ のとき，$\delta I=0$ となる q を求めなさい．

期末試験 2　バネ（バネ定数 k）の一端を平らな鉛直壁に固定し，もう一端に質点（質量 m）を取り付けてなめらかな水平面上に置く．質点は壁と垂直な方向にのみ動く．質点の自然長からの変位を x で表すとき，この運動のラグランジアン $\mathcal{L}(x,\dot{x})$ を書きなさい．

期末試験 3　ラグランジアンが $\mathcal{L}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz$ と表される運動について，x，y，z について，それぞれのラグランジュ方程式を求めなさい．

期末試験 4　2 次元極座標系 (r,θ) で，万有引力を受ける質点（質量 m）の運動について，次の問いに答えよ．なお，デカルト座標 (x,y) と極座標 (r,θ) の間には $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ の関係がある．また，万有引力の位置エネルギーは $U(r)=-G\dfrac{Mm}{r}$（ここで，G と M は定数）で表される．

(1)　$\dot{x}$ を r，$\dot{r}$，θ，$\dot{\theta}$ を用いて表しなさい．

(2)　運動エネルギーが $K(r,\dot{r},\dot{\theta})=\dfrac{1}{2}m\left[\dot{r}^2+\left(r\dot{\theta}\right)^2\right]$ と表されることを示しなさい．

(3)　r についてのラグランジュ方程式を求め，それぞれの項の意味を書きなさい．

(4)　θ についてのラグランジュ方程式を求め，関係する物理法則の名称を記しなさい．

期末試験 5　z と ϕ を一般化座標として，運動エネルギーが $K = \dfrac{1}{2}m\left[(c^2+1)\dot{z}^2 + \left(cz\dot{\phi}\right)^2\right]$，位置エネルギーが $U = mgz$（ここで，c，g，m は正の定数）で表される運動について，次の問いに答えなさい．

(1)　z と ϕ に対応する一般化運動量 p_z，p_ϕ を求めなさい．

(2)　この運動のハミルトニアン $\mathcal{H}$ を求めなさい．

(3)　$\dfrac{dp_\phi}{dt}$ を求めなさい．

(4)　z が変化しないための必要条件を，c，g，m，z，p_ϕ を用いて表しなさい．

期末試験 6　2 つの質点を伸縮しない軽い糸でつなぎ，その糸を滑車（半径 a，慣性モーメント I）にかけたものを Atwood の装置という．以下では，質点の運動は鉛直上向きを正の方向，滑車の回転運動は反時計回りを正の方向として，右の質点の位置を y，右の質点の質量を m_R，左の質点の質量を m_L とする．糸がすべらずに滑車とともに動くとき，次の問いに答えなさい．ただし，重力加速度の大きさは g としなさい．

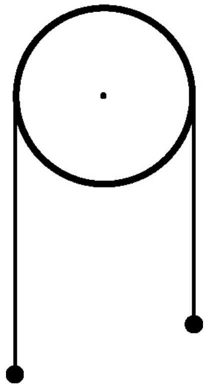
(1)　両質点の運動エネルギーの合計を m_L，m_R，$\dot{y}$ を用いて表しなさい．

(2)　両質点の位置エネルギーの合計を g，m_L，m_R，y を用いて表しなさい．ただし，$y = 0$ のときに位置エネルギーが 0 であるものとする．

(3)　回転運動の角速度 $\dot{\theta}$ を a と $\dot{y}$ を用いて表しなさい．

(4)　y を一般化座標とするラグランジアン $\mathcal{L}(y, \dot{y})$ を求めなさい．ただし，回転に関する運動エネルギーが，慣性モーメント I と角速度 $\dot{\theta}$ を用いて $\dfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ で表されることは既知としなさい．

(5)　右の質点の加速度を求めなさい．



解答例

期末試験 1　t，$q=q(t)$，$\dot q = \dfrac{dq}{dt}$ に依存する関数 $f(t,q,\dot q)$ について，汎関数 $I[q]=\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t,q,\dot q)dt$ を考える．$f=\dfrac{1}{2}\dot q^2$ のとき，$\delta I = 0$ となる q を求めなさい．

$$\delta I = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot q}\right) = 0 \quad \cdots (*)$$

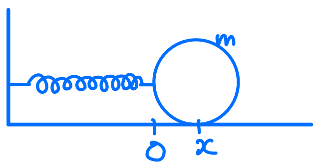
$\dfrac{\partial f}{\partial q}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial \dot q} = \dot q$ より　$(*) \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(\dot q) = 0$　∴ $\dot q = A$　(Aは定数)

積分することにより　$q = At + B$　(Bは定数)

期末試験 2　バネ（バネ定数 k）の一端を平らな鉛直壁に固定し，もう一端に質点（質量 m）を取り付けてなめらかな水平面上に置く．質点は壁と垂直な方向にのみ動く．質点の自然長からの変位を x で表すとき，この運動のラグランジアン $\mathcal{L}(x,\dot x)$ を書きなさい．

$K = \dfrac{1}{2}m\dot x^2$, $U = \dfrac{1}{2}kx^2$ より

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot x^2 - \frac{1}{2}kx^2$$



期末試験 3　ラグランジアンが $\mathcal{L}(x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z) = \dfrac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) - mgz$ と表される運動について，x，y，z について，それぞれのラグランジュ方程式を求めなさい．

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x} = m\dot x$ よりラグランジュ方程式は　$0 - \dfrac{d}{dt}(m\dot x) = 0$

∴ $m\dot x$ が一定

同様に，$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y} = m\dot y$ より　$0 - \dfrac{d}{dt}(m\dot y) = 0$　∴ $m\dot y$ が一定

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -mg$, $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot z} = m\dot z$ より　$-mg - \dfrac{d}{dt}(m\dot z) = 0$　∴ $m\dfrac{d^2 z}{dt^2} = -mg$

期末試験 4　2 次元極座標系 (r, θ) で，万有引力を受ける質点（質量 m）の運動について，次の問いに答えよ．なお，デカルト座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の間には $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ の関係がある．また，万有引力の位置エネルギーは $U(r) = -G\dfrac{Mm}{r}$（ここで，G と M は定数）で表される．

(1)　$\dot{x}$ を r，$\dot{r}$，θ，$\dot{\theta}$ を用いて表しなさい．

(2)　運動エネルギーが $K(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \dfrac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right]$ と表されることを示しなさい．

(3)　r についてのラグランジュ方程式を求め，それぞれの項の意味を書きなさい．

(4)　θ についてのラグランジュ方程式を求め，関係する物理法則の名称を記しなさい．

(1)　$x = r\cos\theta$ より　$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta}$

(2)　$y = r\sin\theta$ より　$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta}$ なので

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$
$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\cos^2\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}r\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\sin^2\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}r\cos\theta\sin\theta + r^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\right)$$
$$= \frac{m}{2}\left\{\dot{r}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + r^2\dot{\theta}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\right\} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \blacksquare$$

(3)　$\mathcal{L} = \dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + G\dfrac{Mm}{r}$ について

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - G\dfrac{Mm}{r^2}$，$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ より ラグランジュ方程式は

$$\left(mr\dot{\theta}^2 - G\frac{Mm}{r^2}\right) - \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = 0$$

第1項は遠心力，第2項は万有引力，第3項は動径方向の運動量の時間変化を表す.

(4)　$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$.　$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ より ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad \therefore\ mr^2\dot{\theta} \text{ が一定.}$$

これは角運動量保存則を表す.

期末試験 5　z と ϕ を一般化座標として，運動エネルギーが $K = \frac{1}{2}m\left[(c^2+1)\dot{z}^2 + \left(cz\dot{\phi}\right)^2\right]$，位置エネルギーが $U = mgz$（ここで，c，g，m は正の定数）で表される運動について，次の問いに答えなさい．

(1)　z と ϕ に対応する一般化運動量 p_z，p_ϕ を求めなさい．
(2)　この運動のハミルトニアン $\mathcal{H}$ を求めなさい．
(3)　$\frac{dp_\phi}{dt}$ を求めなさい．
(4)　z が変化しないための必要条件を，c，g，m，z，p_ϕ を用いて表しなさい．

(1)　$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[(c^2+1)\dot{z}^2 + (cz\dot{\phi})^2\right] - mgz$ について

$$P_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m(c^2+1)\dot{z} \ , \quad P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mc^2z^2\dot{\phi} \ //$$

(2)

$$\mathcal{H} = \dot{z}P_z + \dot{\phi}P_\phi - \mathcal{L}$$

$$= \frac{P_z^2}{m(c^2+1)} + \frac{P_\phi^2}{mcz} - \left[\frac{m(c^2+1)}{2}\left\{\frac{P_z}{m(c^2+1)}\right\}^2 + \frac{mc^2z^2}{2}\left\{\frac{P_\phi}{mc^2z^2}\right\}^2\right] + mgz$$

$\because\ \dot{z} = \frac{P_z}{m(c^2+1)}, \ \dot{\phi} = \frac{P_\phi}{mc^2z^2}$

$$= \frac{P_z^2}{2m(c^2+1)} + \frac{P_\phi^2}{2mc^2z^2} + mgz \ //$$

(3)　正準方程式より $\frac{dP_\phi}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0$ //　（← P_ϕ は一定）

(4)　正準方程式より $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m(c^2+1)}$

よって $\frac{dz}{dt} = 0$ であるには常に $P_z = 0$ である必要がある．

このとき $\frac{dP_z}{dt} = 0$．一方で正準方程式より

$$\frac{dP_z}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \frac{P_\phi^2}{mc^2}\cdot\frac{1}{z^3} - mg$$

よって $\frac{dP_z}{dt} = 0 \iff \frac{P_\phi^2}{mc^2z^3} = mg \iff P_\phi^2 = m^2c^2gz^3$

$\therefore\ P_\phi = \pm\sqrt{m^2c^2gz^3}$ が必要．

期末試験 6　2 つの質点を伸縮しない軽い糸でつなぎ，その糸を滑車（半径 a，慣性モーメント I）にかけたものを Atwood の装置という．以下では，質点の運動は鉛直上向きを正の方向，滑車の回転運動は反時計回りを正の方向として，右の質点の位置を y，右の質点の質量を m_R，左の質点の質量を m_L とする．糸がすべらずに滑車とともに動くとき，次の問いに答えなさい．ただし，重力加速度の大きさは g としなさい．

(1)　両質点の運動エネルギーの合計を m_L，m_R，$\dot{y}$ を用いて表しなさい．

(2)　両質点の位置エネルギーの合計を g，m_L，m_R，y を用いて表しなさい．ただし，$y=0$ のときに位置エネルギーが 0 であるものとする．

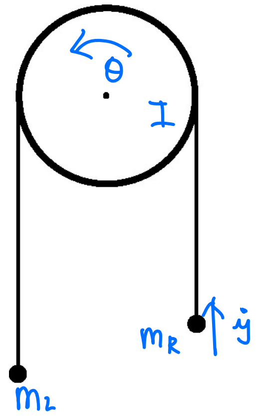
(3)　回転運動の角速度 $\dot{\theta}$ を a と $\dot{y}$ を用いて表しなさい．

(4)　y を一般化座標とするラグランジアン $\mathcal{L}(y,\dot{y})$ を求めなさい．ただし，回転に関する運動エネルギーが，慣性モーメント I と角速度 $\dot{\theta}$ を用いて $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ で表されることは既知としなさい．

(5)　右の質点の加速度を求めなさい．

(1) 両質点の速さは等しいので運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}(m_L+m_R)\dot{y}^2 \;〃$$



(2) 右の質点が y 上昇すると，左の質点は y 下降するので，位置エネルギーは

$$(m_R-m_L)gy$$

(3) $\dot{y}=a\dot{\theta}$ より　$\dot{\theta}=\dfrac{\dot{y}}{a}$ 〃

(4)
$$\mathcal{L}(y,\dot{y}) = \frac{1}{2}(m_L+m_R)\dot{y}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-(m_R-m_L)gy$$
$$= \frac{1}{2}\left(m_L+m_R+\frac{I}{a^2}\right)\dot{y}^2-(m_R-m_L)gy \;〃$$

(5) ラグランジュ方程式より

$$-(m_R-m_L)g-\frac{d}{dt}\left\{\left(m_L+m_R+\frac{I}{a^2}\right)\dot{y}\right\}=0$$

$$\therefore\quad \ddot{y}=\frac{m_L-m_R}{m_L+m_R+\frac{I}{a^2}}g$$