中間試験 1　次の問に答えなさい.

(1) ラザフォードの原子モデルの問題点を説明しなさい.

(2) エネルギー量子仮説を，整数 n，プランク定数 h，振動数 ν を用いて説明しなさい.

(3) 仕事関数が何を表す物理量か説明しなさい.

(4) 励起について説明しなさい.

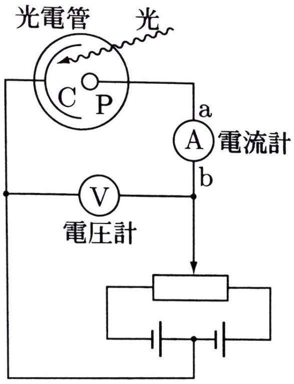
(5) ボーアの量子条件を物質波の考え方で捉えるとき，電子軌道の半径を r，ドブロイ波長を λ，自然数を n の間に成り立つ関係式を書きなさい.

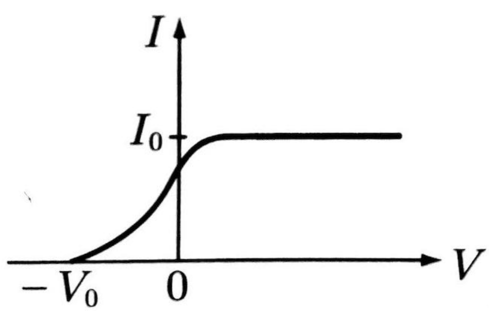
(6) 時刻 t，位置 x での波動関数 $\psi(x,t)$ を用いて，ボルンの規則を説明しなさい.

中間試験 2　図で示す回路について，振動数 ν の光を陰極 C に照射したところ，陰極 C に対する陽極 P の電位差 V と電流の関係は図のようになった．電気素量を e として，次の問いに答えなさい．

(1)　陰極から飛び出す電子の運動エネルギーの最大値を求めなさい．

(2)　照射する光を，同じ振動数だがより弱い光に変える．このときの電流電圧特性の概形を I-V グラフに書き込みなさい．必要に応じて，文章で照射前後で変化した点について説明すること．





中間試験 3　水素原子が発する光のスペクトルの波長 λ は，定数 R，自然数 n，m（ただし，$n > m$）を用いて $\dfrac{1}{\lambda} = R\left(\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ と表される．プランク定数を h，電子の質量を M，光速を c として次の問いに答えなさい．

(1)　光を当てて電子のエネルギー準位を E_1 から E_2（ただし，$E_1 < E_2$）に遷移させる．このとき，照射する光の波長 λ を求めなさい．

(2)　微細構造定数と呼ばれる正の定数 α を用いると，n 番目のエネルギー準位にある電子の力学的エネルギーは $E_n = -\dfrac{\alpha^2 M c^2}{2n^2}$ と書ける．このとき，α を c，M，h，R を用いて表しなさい．

中間試験 4　x 軸上を動く 1 個の電子を考える．電子は，$x=0$ と $x=a$ にある壁に閉じ込められており，壁の外に出ることは絶対にできない．$0<x<a$ の領域での電子には何も相互作用が加わらないとき，次の問いに答えなさい．ただし，プランク定数を h，電子の質量を M としなさい．

(1) 時刻 t，位置 x での波動関数を $\psi(x,t)$ とする．$x\le 0$，$a\le x$ での $\psi(x,t)$ の値はいくらか．

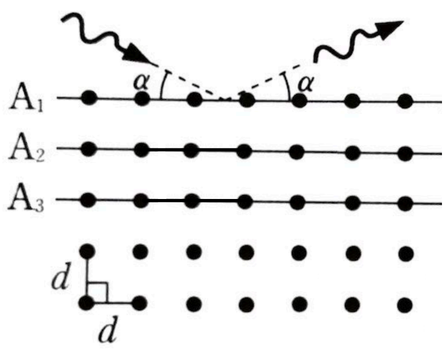
(2) 電子が取りうる運動量 p_n（n は自然数）を求めなさい．

(3) 電子のエネルギー準位 E_n（n は自然数）を求めなさい．

中間試験 5　図は結晶断面の模式図で，原子が間隔 d で並んでいる．紙面に垂直な方向についても同様に原子が配列している．プランク定数を h，電子の質量を M，電荷素量を e として，次の問いに答えなさい．

(1) 静止している電子を電圧 V で加速したとき，電子のドブロイ波長を求めなさい．

(2) 図のように，波長 λ の電子線を A_1，A_2, ... の格子面と角度 α をなす方向から入射させると強い回析が生じた．回析の条件を書きなさい．ただし，A_1 と A_2 で反射した光のみを考慮しなさい．



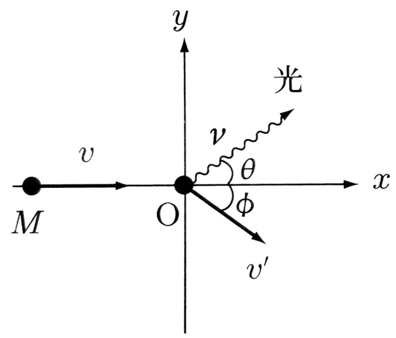
中間試験 6　運動している水素原子からの光の放出を考える．光を放出した地点を原点とし，放出前の水素原子の運動に沿って x 軸をとる．図のように，光は x 軸と角 θ をなす方向に放出され，光を放出した後の水素原子は x 軸と角 ϕ をなす方向に運動した．水素原子中の電子が，放出前は第 2 励起状態であったのに対して，放出後は基底状態となっていたとき，次の問いに答えなさい．ただし，プランク定数を h，光速を c，水素原子の質量を M，放出前の水素原子の速さを v，放出後の水素原子の速さを v'，放出された光の振動数を ν としなさい．

(1)　放出された光（光子）の運動量の大きさを書きなさい．

(2)　運動量保存の法則を表す式を，x 方向と y 方向のそれぞれについて書きなさい．

(3)　放出後の水素原子の運動エネルギーを，ν，θ，c，h，M，v を用いて表しなさい．

(4)　水素原子が静止しているとき，第 2 励起状態から基底状態に電子が遷移する際に振動数 ν_0 の光を放出する．$h\nu \ll Mc^2$ のとき，ν_0/ν を θ，c，v で表しなさい．



解答例

2023 年度 量子力学 I (鳴海担当分)　　　　番号:　　　　名前:

中間試験 1　次の問に答えなさい．

(1) ラザフォードの原子モデルの問題点を説明しなさい．

(2) エネルギー量子仮説を，整数 n，プランク定数 h，振動数 ν を用いて説明しなさい．

(3) 仕事関数が何を表す物理量か説明しなさい．

(4) 励起について説明しなさい．

(5) ボーアの量子条件を物質波の考え方で捉えるとき，電子軌道の半径を r，ドブロイ波長を λ，自然数を n の間に成り立つ関係式を書きなさい．

(6) 時刻 t，位置 x での波動関数 $\psi(x,t)$ を用いて，ボルンの規則を説明しなさい．

(1) 制動放射によりエネルギーを失って電子が原子核に近付いてしまう

(2) (光の)エネルギーは $nh\nu$ という離散的な値をとるという考え.

(3) 電子が金属から離脱するのに必要なエネルギー

(4) 高いエネルギー準位に遷移すること

(5) $2\pi r = n\lambda$

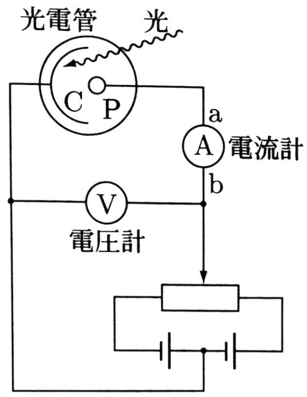
(6) 時刻 t, 位置 x で粒子が観測される確率が $|\psi(x,t)|^2$ で表わされるという法則.

中間試験 2　図で示す回路について，振動数 ν の光を陰極 C に照射したところ，陰極 C に対する陽極 P の電位差 V と電流の関係は図のようになった．電気素量を e として，次の問いに答えなさい．

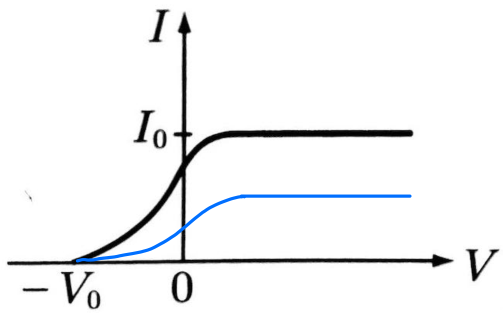
(1)　陰極から飛び出す電子の運動エネルギーの最大値を求めなさい．

(2)　照射する光を，同じ振動数だがより弱い光に変える．このときの電流電圧特性の概形を I-V グラフに書き込みなさい．必要に応じて，文章で照射前後で変化した点について説明すること．

(1) 求める値を K_{max} とすると，
$V=-V_0$ では K_{max} を有する電子しか
P に届かず，P で全てのエネルギーを失う．
よって $K_{max}+(-eV_0)=0$　∴ $K_{max}=eV_0$



(2) 振動数は変えていないので
$I>0$ となる電圧は $-V_0$．
光を弱くすることで光子の数が減るので
電流の最大値は減少する．
よって右図のようになる．



中間試験 3　水素原子が発する光のスペクトルの波長 λ は，定数 R，自然数 n，m（ただし，$n>m$）を用いて $\dfrac{1}{\lambda}=R\left(\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)$ と表される．プランク定数を h，電子の質量を M，光速を c として次の問いに答えなさい．

(1)　光を当てて電子のエネルギー準位を E_1 から E_2（ただし，$E_1<E_2$）に遷移させる．このとき，照射する光の波長 λ を求めなさい．

(2)　微細構造定数と呼ばれる正の定数 α を用いると，n 番目のエネルギー準位にある電子の力学的エネルギーは $E_n=-\dfrac{\alpha^2Mc^2}{2n^2}$ と書ける．このとき，α を c，M，h，R を用いて表しなさい．

(1) 振動数条件より $\nu=\dfrac{E_2-E_1}{h}$．∴ $\lambda=\dfrac{c}{\nu}=\dfrac{hc}{E_2-E_1}$ //

別解) $\dfrac{1}{\lambda}=R\left(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}\right)$　∴ $\lambda=\dfrac{4}{3R}$

(2) (1) より $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{E_2-E_1}{hc}=\dfrac{1}{hc}\left\{-\dfrac{\alpha^2Mc^2}{2\cdot2^2}-\left(-\dfrac{\alpha^2Mc^2}{2\cdot1^2}\right)\right\}$

∴ $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{\alpha^2Mc}{2h}\left(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}\right)$ よって $R=\dfrac{\alpha^2Mc}{2h}$　$\alpha>0$ より，$\alpha=\sqrt{\dfrac{2hR}{Mc}}$ //

中間試験 4　x 軸上を動く 1 個の電子を考える．電子は，$x = 0$ と $x = a$ にある壁に閉じ込められており，壁の外に出ることは絶対にできない．$0 < x < a$ の領域での電子には何も相互作用が加わらないとき，次の問いに答えなさい．ただし，プランク定数を h，電子の質量を M としなさい．

(1)　時刻 t，位置 x での波動関数を $\psi(x, t)$ とする．$x \leq 0$，$a \leq x$ での $\psi(x, t)$ の値はいくらか．
(2)　電子が取りうる運動量 p_n（n は自然数）を求めなさい．
(3)　電子のエネルギー準位 E_n（n は自然数）を求めなさい．

(1)　$x \leq 0$, $a \leq x$ では存在しないので $|\psi(x,t)|^2 = 0$ $\therefore$ $\psi(x,t) = 0$ //

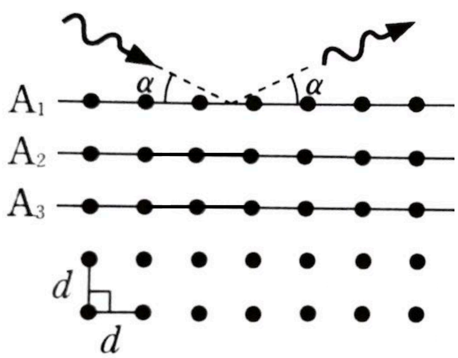
(2)　波長を λ_n とすると　$\lambda_n = \frac{2a}{n}$　$(n = 1, 2, 3, \dots)$

よって　$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{hn}{2a}$ //

(3)　$E_n = \frac{p_n^2}{2M} = \frac{1}{2M}\left(\frac{hn}{2a}\right)^2 = \frac{h^2}{8a^2 M} n^2$ //

中間試験 5　図は結晶断面の模式図で，原子が間隔 d で並んでいる．紙面に垂直な方向についても同様に原子が配列している．プランク定数を h，電子の質量を M，電荷素量を e として，次の問いに答えなさい．

(1)　静止している電子を電圧 V で加速したとき，電子のドブロイ波長を求めなさい．
(2)　図のように，波長 λ の電子線を A_1，A_2，... の格子面と角度 α をなす方向から入射させると強い回折が生じた．回折の条件を書きなさい．ただし，A_1 と A_2 で反射した光のみを考慮しなさい．



(1)　エネルギーの原理より

$\frac{1}{2}Mv^2 - 0 = eV$　$\therefore$ $v = \sqrt{\frac{2eV}{M}}$

よってドブロイ波長は　$\lambda = \frac{h}{Mv} = \frac{h}{\sqrt{2eMV}}$ //

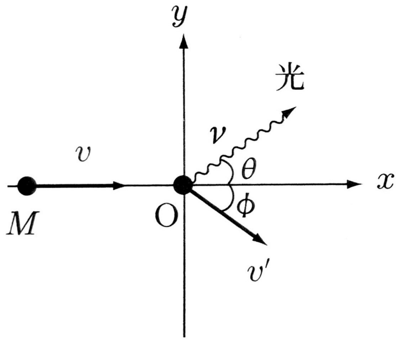
(2)　となりあう面で反射された波の経路差は

$2d\sin\alpha$．よって強めあう条件は

$$2d\sin\alpha = n\lambda \quad (n = 1, 2, \dots)$$

中間試験 6　運動している水素原子からの光の放出を考える．光を放出した地点を原点とし，放出前の水素原子の運動に沿って x 軸をとる．図のように，光は x 軸と角 θ をなす方向に放出され，光を放出した後の水素原子は x 軸と角 ϕ をなす方向に運動した．水素原子中の電子が，放出前は第 2 励起状態であったのに対して，放出後は基底状態となっていたとき，次の問いに答えなさい．ただし，プランク定数を h，光速を c，水素原子の質量を M，放出前の水素原子の速さを v，放出後の水素原子の速さを v'，放出された光の振動数を ν としなさい．

(1)　放出された光（光子）の運動量の大きさを書きなさい．
(2)　運動量保存の法則を表す式を，x 方向と y 方向のそれぞれについて書きなさい．
(3)　放出後の水素原子の運動エネルギーを，ν，θ，c，h，M，v を用いて表しなさい．
(4)　水素原子が静止しているとき，第 2 励起状態から基底状態に電子が遷移する際に振動数 ν_0 の光を放出する．$h\nu \ll Mc^2$ のとき，ν_0/ν を θ，c，v で表しなさい．



(1)　$p = \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{h\nu}{c}$ 〃

(2)　x方向：$Mv = Mv'\cos\phi + \dfrac{h\nu}{c}\cos\theta$

y方向：$0 = \dfrac{h\nu}{c}\sin\theta - Mv'\sin\phi$

(3)　$\cos\phi = \dfrac{1}{Mv'}\left(Mv - \dfrac{h\nu}{c}\cos\theta\right)$，$\sin\phi = \dfrac{h\nu}{cMv'}\sin\theta$ より

$$\frac{1}{M^2v'^2}\left(Mv - \frac{h\nu}{c}\cos\theta\right)^2 + \frac{h^2\nu^2}{c^2M^2v'^2}\sin^2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow K' = \frac{1}{2}Mv'^2 = \frac{1}{2M}\left(Mv - \frac{h\nu}{c}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2M}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2\sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{h\nu v}{c}\cos\theta + \frac{h^2\nu^2}{2Mc^2}$$ 〃

(4)　エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}Mv^2 + E_3 = \frac{1}{2}Mv'^2 + E_1 + h\nu$$

（∵ $E_3 - E_1 = h\nu_0$，(3)）

$$\Leftrightarrow h\nu_0 = -\frac{h\nu v}{c}\cos\theta + \frac{h^2\nu^2}{2Mc^2} + h\nu$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu_0}{\nu} = 1 - \frac{v}{c}\cos\theta + \frac{h\nu}{2Mc^2}$$

$h\nu \ll Mc^2$ より $\dfrac{h\nu}{2Mc^2} \ll 1$．∴ $\dfrac{\nu_0}{\nu} = 1 - \dfrac{v}{c}\cos\theta$