期末試験 1　次の問に答えなさい．ただし，ディラック定数を $\hbar$ としなさい．

(1) 量子系の状態は何を用いて表されるか答えなさい．

(2) 量子系の可観測量（オブザーバブル）は何を用いて表されるか答えなさい．

(3) 量子系を測定するとどうなると考えられるか．「固有値」,「固有状態」という言葉を用いて説明しなさい．

(4) 位置 x での波動関数を $\psi(x)$ とするとき，ボルンの規則について説明しなさい．

(5) シュレディンガー表現での定常状態のシュレディンガー方程式を書きなさい．ただし，ハミルトニアンを $\hat{H}$，定常状態の波動関数を $\varphi(x)$，エネルギー固有値を E としなさい．

期末試験 2　行列 $\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$（ただし，$\epsilon > 0$）について，次の問に答えなさい．

(1) 固有値を小さい順に E_1，E_2 とするとき，E_1 を求めなさい．

(2) 固有値 E_1 に属する固有状態 $|1\rangle$ を求めなさい．

期末試験 3　物理量 $\hat{A}$ を測定したところ，n 個の測定値 a_1，a_2，$\ldots, a_n$ が得られた．測定値 a_i に対応する固有状態を $|a_i\rangle$（$i = 1, 2, \ldots, n$）として，状態が $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \psi(a_i)\,|a_i\rangle$ と表現できるとき，次の問に答えなさい．

(1)　$\psi(a_1) = \dfrac{1-\sqrt{2}i}{100}$，$\psi(a_2) = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{20}$ であるとき，測定値として a_2 を得る確率はいくらか．

(2)　測定値の期待値を，$\psi(a_i)$，a_i（$i = 1, 2, \ldots, n$）を用いて表しなさい．

期末試験 4　エネルギー固有値を E_n，E_n に対するエネルギー固有状態を $|n\rangle$ とするとき，次の問に答えなさい．ただし，初期状態が $\sum_n \varphi_n\,|n\rangle$ であるとき，時刻 t での状態が $|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n\,|n\rangle$ と表されることは既知として良い．

(1)　$\langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle = \sum_n \varphi_n^*\varphi_n$ を示しなさい．

(2)　任意の t で $\langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle = 1$ となることを示しなさい..

期末試験 5　領域 $-\dfrac{L}{2} \leq x \leq \dfrac{L}{2}$ で 1 次元運動する質量 m の粒子を考える．領域内での粒子は相互作用を受けないとして，次の問いに答えなさい．

(1) 粒子の位置を $\hat{x}$，運動量を $\hat{p}$ で表すとき，領域内のハミルトニアン $\hat{H}$ を，m と $\hat{p}$ を用いて表しなさい．

(2) シュレディンガー表現を採用するとき，エネルギー固有値を E，エネルギー固有状態の波動関数を $\varphi(x)$ として，定常状態でのシュレディンガー方程式を書きなさい．なお，シュレディンガー表現では運動量演算子は，ディラック定数 $\hbar$ を用いて $\hat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ で表される．

(3) $\varphi(x)$ の一般解を $\varphi(x) = A\cos kx + B\sin kx$（ただし，$A$ と B は定数）と表すとき，k を E，m，$\hbar$ を用いて表しなさい．ただし，単振動の運動方程式 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$ の一般解が $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$（ただし，$A$ と B は定数）であることは既知としなさい．

境界条件から，k と E の値は離散的の値をとる．以下では，そのことを明示的に示すために，k を k_n，E を E_n（ただし，$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$）と書く．

(4) k_n，n，L の間の関係式を求めなさい．

(5) E_n を $\hbar$，L，m，n を用いて表しなさい．

期末試験 6　シュレディンガー表現によるシュレディンガー方程式 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t)$ について，変数分離解 $\psi(x,t) = f(t)g(x)$ を仮定する．

(1)　$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{g(x)}\frac{d^2g(x)}{dx^2} + V(x)\quad\cdots$ (i) が成り立つことを示しなさい．

(2)　式 (i) から，定数 C を用いて $\frac{df(t)}{dt} = -i\frac{C}{\hbar}f(t)\quad\cdots$ (ii)，$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]g(x) = Cg(x)\quad\cdots$ (iii) が得られることを説明しなさい．

(3)　式 (ii) から $f(t)$ を求めなさい．ただし，$f(0) = 1$ としなさい．

(4)　式 (iii) の表式と定常状態のシュレディンガー方程式を比較することで，定数 C や関数 $g(x)$ がどのような意味をもつか説明しなさい．

解答例

2023 年度 量子力学 I (鳴海担当分)　　　番号:　　　名前:

期末試験 1　次の問に答えなさい．ただし，ディラック定数を $\hbar$ としなさい．

(1) 量子系の状態は何を用いて表されるか答えなさい．
(2) 量子系の可観測量（オブザーバブル）は何を用いて表されるか答えなさい．
(3) 量子系を測定するとどうなると考えられるか．「固有値」，「固有状態」という言葉を用いて説明しなさい．
(4) 位置 x での波動関数を $\psi(x)$ とするとき，ボルンの規則について説明しなさい．
(5) シュレディンガー表現での定常状態のシュレディンガー方程式を書きなさい．ただし，ハミルトニアンを $\hat{H}$，定常状態の波動関数を $\varphi(x)$，エネルギー固有値を E としなさい．

(1) 状態ベクトル

(2) 演算子

(3) 可観測量に対応する演算子の固有値の1つが測定値として得られ，その固有値に属する固有状態に変化する．

(4) $|\psi(x)|^2$ が位置 x での存在確率に比例する．

(5) $\hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x)$

期末試験 2　行列 $\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$（ただし，$\epsilon > 0$）について，次の問に答えなさい．

(1) 固有値を小さい順に E_1，E_2 とするとき，E_1 を求めなさい．
(2) 固有値 E_1 に属する固有状態 $|1\rangle$ を求めなさい．

(1) 固有方程式より $\begin{vmatrix} -E & \varepsilon \\ \varepsilon & -E \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow E = \pm\varepsilon$　$\therefore E_1 = -\varepsilon$.

(2) $-\varepsilon$ に属する固有ベクトル $|1\rangle$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと

$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\therefore x + y = 0$　　$x = C$ とおくと $y = -C$

規格化することにより　$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 〃

期末試験 3　物理量 $\hat{A}$ を測定したところ，n 個の測定値 a_1，a_2，$\dots, a_n$ が得られた．測定値 a_i に対応する固有状態を $|a_i\rangle$（$i = 1, 2, \dots, n$）として，状態が $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \psi(a_i)\,|a_i\rangle$ と表現できるとき，次の問に答えなさい．

(1)　$\psi(a_1) = \dfrac{1-\sqrt{2}i}{100}$，$\psi(a_2) = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{20}$ であるとき，測定値として a_2 を得る確率はいくらか．

(2)　測定値の期待値を，$\psi(a_i)$，a_i（$i = 1, 2, \dots, n$）を用いて表しなさい．

(1) $|\psi(a_2)|^2 = \dfrac{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{20^2} = \dfrac{1}{100}$ 〃

(2) a_i を測定する確率が $|\psi(a_i)|^2$ なので期待値の定義から

$$\sum_{i=1}^{n} a_n |\psi(a_i)|^2$$ 〃

期末試験 4　エネルギー固有値を E_n，E_n に対するエネルギー固有状態を $|n\rangle$ とするとき，次の問に答えなさい．ただし，初期状態が $\sum_n \varphi_n |n\rangle$ であるとき，時刻 t での状態が $|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n |n\rangle$ と表されることは既知として良い．

(1)　$\langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle = \sum_n \varphi_n^* \varphi_n$ を示しなさい．

(2)　任意の t で $\langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle = 1$ となることを示しなさい．.

(1) $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \sum_n \sum_m \varphi_n^* \varphi_m e^{i\frac{E_n - E_m}{\hbar}t} \langle n|m\rangle \cdots ⊗$

$\langle n|m\rangle = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$ より　　$⊗ = \sum_n \varphi_n^* \varphi_n$ ▨

(2) $\sum_n \varphi_n^* \varphi_n$ は ボルンの規則から 確率の総和を表しており 値は 1．よって (1) より $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$ は t に依らず 1 となる．

期末試験 5　領域 $-\dfrac{L}{2} \leq x \leq \dfrac{L}{2}$ で 1 次元運動する質量 m の粒子を考える．領域内での粒子は相互作用を受けないとして，次の問いに答えなさい．

(1) 粒子の位置を $\hat{x}$，運動量を $\hat{p}$ で表すとき，領域内のハミルトニアン $\hat{H}$ を，m と $\hat{p}$ を用いて表しなさい．

(2) シュレディンガー表現を採用するとき，エネルギー固有値を E，エネルギー固有状態の波動関数を $\varphi(x)$ として，定常状態でのシュレディンガー方程式を書きなさい．なお，シュレディンガー表現では運動量演算子は，ディラック定数 $\hbar$ を用いて $\hat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ で表される．

(3) $\varphi(x)$ の一般解を $\varphi(x) = A\cos kx + B\sin kx$（ただし，$A$ と B は定数）と表すとき，k を E，m，$\hbar$ を用いて表しなさい．ただし，単振動の運動方程式 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$ の一般解が $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$（ただし，$A$ と B は定数）であることは既知としなさい．

境界条件から，k と E の値は離散的の値をとる．以下では，そのことを明示的に示すために，k を k_n，E を E_n（ただし，$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$）と書く．

(4) k_n，n，L の間の関係式を求めなさい．

(5) E_n を $\hbar$，L，m，n を用いて表しなさい．

(1) $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m}$　　(2) $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = E\varphi(x)$

(3) (2)を変形すると $\dfrac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = -\dfrac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x)$

これを単振動型の微分方程式と比較することで $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ //

(4) 領域外に粒子は存在しないので $\varphi(-\frac{L}{2}) = \varphi(\frac{L}{2}) = 0$

一般解に代入すると，$A\cos(-\frac{kL}{2}) + B\sin(-\frac{kL}{2}) = A\cos(\frac{kL}{2}) + B\sin(\frac{kL}{2}) = 0$

左の等号より $B=0$．右の等号と $A \neq 0$ より $\cos(\frac{kL}{2}) = 0$

よって $\dfrac{kL}{2} = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (nは整数)　　$\therefore k_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{L}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

※ ここで，$\cos(-\theta) = \cos\theta$ なので $k_n \geq 0$ のみ考慮すれば良い．

よって n の範囲は 0以上の整数で OK.

(5) $E_n = \dfrac{(\hbar k_n)^2}{2m} = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(2n+1)^2$ //

期末試験 6　シュレディンガー表現によるシュレディンガー方程式 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t)$ について，変数分離解 $\psi(x,t) = f(t)g(x)$ を仮定する．

(1)　$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{g(x)}\frac{d^2g(x)}{dx^2} + V(x)$　$\cdots$(i) が成り立つことを示しなさい．

(2)　式 (i) から，定数 C を用いて $\frac{df(t)}{dt} = -i\frac{C}{\hbar}f(t)$　$\cdots$(ii)，$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]g(x) = Cg(x)$　$\cdots$(iii) が得られることを説明しなさい．

(3)　式 (ii) から $f(t)$ を求めなさい．ただし，$f(0) = 1$ としなさい．

(4)　式 (iii) の表式と定常状態のシュレディンガー方程式を比較することで，定数 C や関数 $g(x)$ がどのような意味をもつか説明しなさい．

(1) シュレディンガー方程式に $\psi = f(t)g(x)$ を代入：$i\hbar\, g(x)\frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}f(t)\frac{d^2g}{dx^2} + V(x)f(t)g(x)$

両辺を $f(t)g(x)$ で割ると，$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{g(x)}\frac{d^2g(x)}{dx^2} + V(x)$ ■

(2) (1)の式は左辺が t にのみ依存し，右辺が x にのみ依存する．
よって任意の t，x でこの式が成り立つには，両辺とも t にも x にも依存してはならない．つまり定数．その定数を C とおくと，

$$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df}{dt} = C \Rightarrow \frac{df}{dt} = -i\frac{C}{\hbar}f(t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{g}\frac{d^2g}{dx^2} + V(x) = C \Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]g(x) = C\,g(x)$$ ■

(3) $\frac{df}{dt} = -i\frac{C}{\hbar}f \Rightarrow \int\frac{1}{f}df = -i\frac{C}{\hbar}\int dt \Leftrightarrow \log|f| = -i\frac{C}{\hbar}t + A$
(Aは定数)

よって $f(t) = Be^{-i\frac{C}{\hbar}t}$ (Bは定数)．$f(0) = 1$ より $B = 1$　$\therefore f(t) = e^{-i\frac{C}{\hbar}t}$ //

(4) 定常状態のシュレディンガー方程式 $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\varphi(x) = E\varphi(x)$ と比較することで，定数 C はエネルギー固有値 E，$g(x)$ は波動関数 $\varphi(x)$ に対応する。