中間試験 1　次の問いに答えなさい．

(1) 波（もしくは波動）とはどういう現象か説明しなさい．

(2) 波動方程式を書きなさい．ただし，位置 x，時刻 t での変位を $u(x,t)$，位相速度を v としなさい．

(3) 角振動数 ω と波数 k の関係を何と言うか答えなさい．

(4) 定在波における腹について説明しなさい．

(5) 人が聞くことのできる振動数のおおよその範囲を答えなさい．

(6) 可視光の波長のおおよその範囲を答えなさい．

中間試験 2　位相速度 v の正弦波 $u(x,t) = \cos(x - vt)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ を求めなさい．

(2) 変位 $u(x,t)$ が波動方程式を満たすことを示しなさい．

中間試験 3　変位 $u(x,t)$ [m] が $u(x,t)=2\sin\{3(t-x)\}$ で表される正弦波について，振幅 A [m]，波数 k [m^{-1}]，角周波数 ω [s^{-1}]，周期 T [s]，位相速度 v [m/s] はいくらか．ただし，円周率は π としなさい．

中間試験 4　角振動数が $\omega=\sqrt{gk+\dfrac{\gamma}{\rho}k^3}$（ただし，$k$ は波数，g は重力加速度の大きさ，γ は表面張力，ρ は密度）で表される波について，次の問いに答えなさい．

(1)　群速度を求めなさい．

(2)　群速度と位相速度の大小関係について説明しなさい．

中間試験 5　長さ L，線密度 λ の弦を，両端を固定して張力 T で張る．

(1)　定在波のとりうる波長を L，λ，自然数 n を用いて表しなさい．

(2)　弦の固有振動数を求めなさい．ただし，弦を伝わる位相速度は $\sqrt{T/\lambda}$ で表されることは既知としなさい．

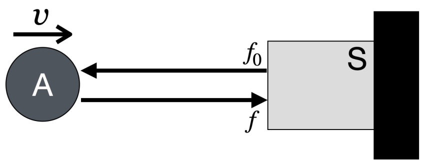
(3)　基準振動の音の高さを，L や λ を変えずに 2 倍にするにはどうすれば良いか説明しなさい．

中間試験 6　光を発生・受信する装置 S がある．S に向かって速さ v で近づく物体 A に対して光を発したところ，S は A からの反射光を受信した．発信光 (振動数 f_0) と反射光（振動数 f）の差 $f - f_0$ を Δf とする．

(1)　光速を c とすると，$f = \dfrac{c+v}{c-v} f_0$ が成り立つ．このことから，Δf を f_0，c ,v を用いて表しなさい．

(2)　$v \ll c$ のとき，$v = \dfrac{c}{2f_0}\Delta f$ となることを示しなさい．

(3)　物体 A と装置 S を用いて光速度 c を求める方法を簡潔に説明しなさい．

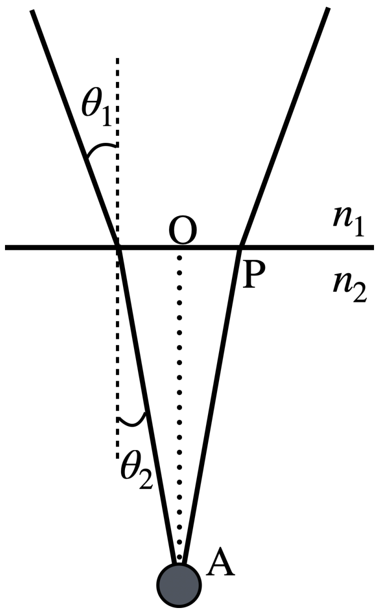


中間試験 7　観察者の媒質 (屈折率 n_1) と物体が存在する媒質（屈折率 n_2）が異なる場合，物体の深さが実際の深さとは異なって見える．物体の実際の深さを D として，次の問いに答えなさい．

(1)　図は $\theta_1 > \theta_2$ の状態を示している．このとき，n_1 と n_2 の大小関係を説明しなさい．

(2)　見かけの深さを d とするとき，$d = \dfrac{n_1}{n_2} D$ となることを示しなさい．ただし，$\tan\theta_1 \simeq \sin\theta_1$，$\tan\theta_2 \simeq \sin\theta_2$ が成り立つものとする．

(3)　実際の深さが 2.0 m である物体について，$n_1 = 1.50$，$n_2 = 1.00$ のとき，見かけの深さはいくらか．



中間試験 8　弾性体の棒 (密度 ρ，断面積 S) の一端に棒に沿った向きに力を加えると，棒に縦波が発生する．縦波の変位が満たす方程式を考えるため，わずかに離れた二つの垂直断面 P,Q に挟まれた小部分（長さ $L_0 = \Delta x$）の運動を考える．以下では，棒に沿って x 軸をとり，力が加わる前の P の位置を x（つまり，Q の位置は $x+\Delta x$）とする．また，力が加わる瞬間を時刻 0 とし，時刻 t，位置 x での棒の縦方向の変位を $u(x,t)$ とする．

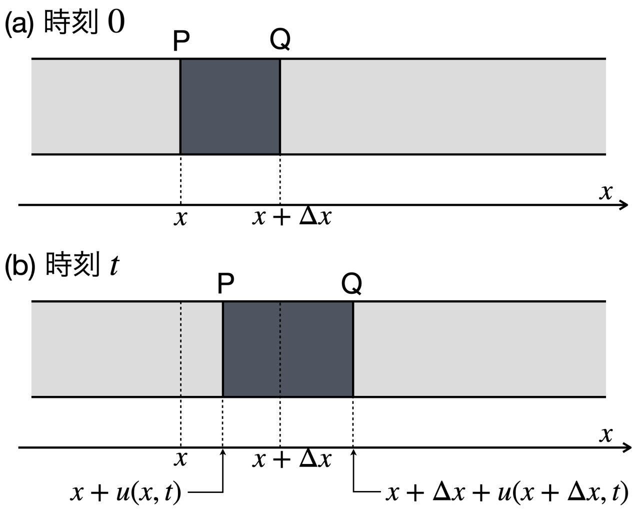
(1) 小部分の質量を ρ，S，Δx を用いて表しなさい．

(2) 時刻 t での小部分の長さ $L(t)$ を $u(x,t)$ と $u(x+\Delta x,t)$，Δx を用いて表しなさい．

(3) 小物体の伸びの割合 $\dfrac{L(t)-L_0}{L_0}$ が，$\Delta x \to 0$ で $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ となることを示しなさい．

(4) 棒に加わる応力 $\dfrac{F(x,t)}{S}$ は，ヤング率 E を用いて $\dfrac{F(x,t)}{S} = E\dfrac{L(t)-L_0}{L_0}$ と表される．このことを用いて，$u(x,t)$ が $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{E}{\rho}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ を満たすことを示しなさい．

(5) 弾性体の棒を伝わる縦波の位相速度を ρ と E を用いて表しなさい．



解答例

中間試験 1　次の問いに答えなさい．

(1) 波（もしくは波動）とはどういう現象か説明しなさい．
(2) 波動方程式を書きなさい．ただし，位置 x，時刻 t での変位を $u(x,t)$，位相速度を v としなさい．
(3) 角振動数 ω と波数 k の関係を何と言うか答えなさい．
(4) 定在波における腹について説明しなさい．
(5) 人が聞くことのできる振動数のおおよその範囲を答えなさい．
(6) 可視光の波長のおおよその範囲を答えなさい．

(1) 振動が周囲の振動を引き起こして振動が伝わる現象．

(2) $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

(3) 分散関係

(4) 定在波において変位が最大の点．

(5) 20 Hz ～ 20 kHz

(6) 380 nm ～ 770 nm

中間試験 2　位相速度 v の正弦波 $u(x,t) = \cos(x - vt)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ を求めなさい．
(2) 変位 $u(x,t)$ が波動方程式を満たすことを示しなさい．

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\sin(x - vt)$,　$\dfrac{\partial u}{\partial t} = v\sin(x - vt)$

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\cos(x - vt)$,　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -v^2\cos(x - vt)$　より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left[-\cos(x - vt)\right] = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

中間試験 3　変位 $u(x,t)$ [m] が $u(x,t) = 2\sin\{3(t-x)\}$ で表される正弦波について，振幅 A [m]，波数 k [m^{-1}]，角周波数 ω [s^{-1}]，周期 T [s]，位相速度 v [m/s] はいくらか．ただし，円周率は π としなさい．

正弦波　$A\sin(\omega t - kx + \phi)$ と比較することで

$A = 2\,\mathrm{m}$, $k = 3\,\mathrm{m}^{-1}$, $\omega = 3\,\mathrm{s}^{-1}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ より $T = \dfrac{2\pi}{3}\,\mathrm{s}$. また, $v = \dfrac{\omega}{k}$ より $v = 1\,\mathrm{m/s}$

中間試験 4　角振動数が $\omega = \sqrt{gk + \dfrac{\gamma}{\rho}k^3}$（ただし，$k$ は波数，g は重力加速度の大きさ，γ は表面張力，ρ は密度）で表される波について，次の問いに答えなさい．

(1)　群速度を求めなさい．
(2)　群速度と位相速度の大小関係について説明しなさい．

(1)　$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + \frac{3\gamma}{\rho}k^2}{2\sqrt{gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3}} \quad \left(= \frac{1}{2\omega}\left(g + \frac{3\gamma}{\rho}k^2\right)\right)$$

(2)　位相速度 $v_p = \dfrac{\omega}{k}$ との大小関係を比較.

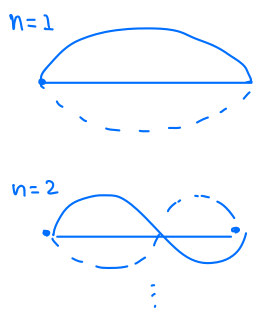
$$v_g - v_p = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2}g + \frac{3\gamma}{2\rho}k^2 - \frac{\omega^2}{k}\right) = \frac{1}{2\omega}\left(-g + \frac{\gamma}{\rho}k^2\right)$$

よって　$|k| \leq \sqrt{\dfrac{\rho g}{\gamma}}$ では $v_g \leq v_p$,　$|k| \geq \sqrt{\dfrac{\rho g}{\gamma}}$ では $v_g \geq v_p$.

中間試験 5　長さ L，線密度 λ の弦を，両端を固定して張力 T で張る．

(1)　定在波のとりうる波長を L，λ，自然数 n を用いて表しなさい．
(2)　弦の固有振動数を求めなさい．ただし，弦を伝わる位相速度は $\sqrt{T/\lambda}$ で表されることは既知としなさい．
(3)　基準振動の音の高さを，L や λ を変えずに 2 倍にするにはどうすれば良いか説明しなさい．

(1)　$\dfrac{2L}{n}$　$(n = 1, 2, \ldots)$



(2)　$f_n = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\lambda}}$

(3)　基準振動は $n=1$ なので　$f_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\lambda}}$

2倍にするには 張力を4倍にすれば良い.

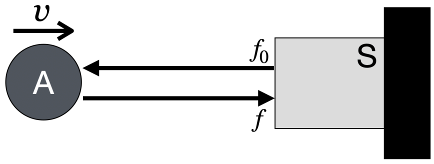
中間試験 6　光を発生・受信する装置 S がある．S に向かって速さ v で近づく物体 A に対して光を発したところ，S は A からの反射光を受信した．発信光 (振動数 f_0) と反射光（振動数 f）の差 $f - f_0$ を Δf とする．

(1)　光速を c とすると，$f = \dfrac{c+v}{c-v} f_0$ が成り立つ．このことから，Δf を f_0，c ,v を用いて表しなさい．

(2)　$v \ll c$ のとき，$v = \dfrac{c}{2f_0}\Delta f$ となることを示しなさい．

(3)　物体 A と装置 S を用いて光速度 c を求める方法を簡潔に説明しなさい．

(1)　$f - f_0 = \left\{ \dfrac{c+v}{c-v} - 1 \right\} f_0 = \dfrac{2v}{c-v} f_0$ //



(2)　$v \ll c$ では　$c - v \approx c$ とできるので

$\Delta f = \dfrac{2v}{c} f_0$　∴ $v = \dfrac{c\Delta f}{2f_0}$

(3)　$c = \dfrac{2f_0}{\Delta f} v$ なので，物体 A の速度 v と f_0 を決まった値にしておいて，Δf を測定すれば c を求めることができる．

中間試験 7　観察者の媒質 (屈折率 n_1) と物体が存在する媒質（屈折率 n_2）が異なる場合，物体の深さが実際の深さとは異なって見える．物体の実際の深さを D として，次の問いに答えなさい．

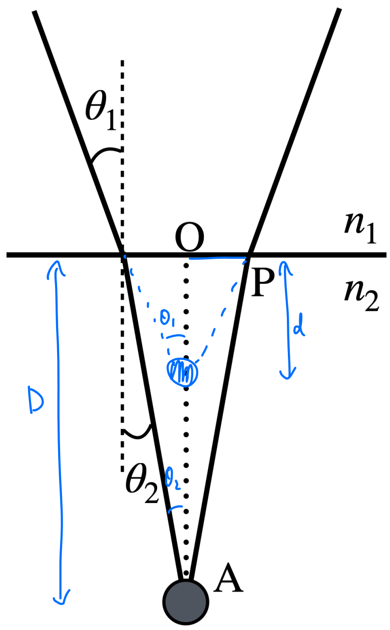
(1)　図は $\theta_1 > \theta_2$ の状態を示している．このとき，n_1 と n_2 の大小関係を説明しなさい．

(2)　見かけの深さを d とするとき，$d = \dfrac{n_1}{n_2} D$ となることを示しなさい．ただし，$\tan\theta_1 \simeq \sin\theta_1$，$\tan\theta_2 \simeq \sin\theta_2$ が成り立つものとする．

(3)　実際の深さが 2.0 m である物体について，$n_1 = 1.50$，$n_2 = 1.00$ のとき，見かけの深さはいくらか．

(1)　屈折の法則より $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. $\Leftrightarrow \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$.

$\theta_1 > \theta_2$ より $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} > 1$ なので $\dfrac{n_2}{n_1} > 1$　∴ $n_2 > n_1$ //



(2)　$OP = d\tan\theta_1 = D\tan\theta_2$

$\theta_1 \ll 1$ かつ $\theta_2 \ll 1$ では　$OP \approx d\sin\theta_1 \approx D\sin\theta_2$

よって　$d = \dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} D = \dfrac{n_1}{n_2} D$　(∵ 屈折の法則)

(3)　$d = \dfrac{1.50}{1.00} \times 2.0 = 3.0$ m //

中間試験 8　弾性体の棒 (密度 ρ，断面積 S) の一端に棒に沿った向きに力を加えると，棒に縦波が発生する．縦波の変位が満たす方程式を考えるため，わずかに離れた二つの垂直断面 P,Q に挟まれた小部分（長さ $L_0 = \Delta x$）の運動を考える．以下では，棒に沿って x 軸をとり，力が加わる前の P の位置を x（つまり，Q の位置は $x+\Delta x$）とする．また，力が加わる瞬間を時刻 0 とし，時刻 t，位置 x での棒の縦方向の変位を $u(x,t)$ とする．

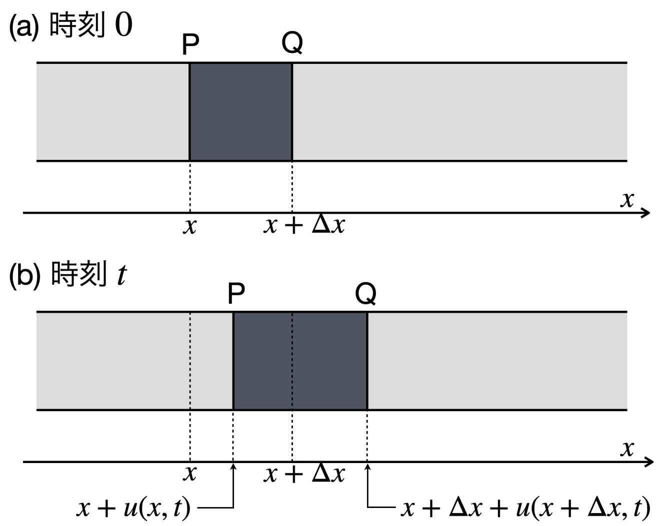
(1)　小部分の質量を ρ，S，Δx を用いて表しなさい．

(2)　時刻 t での小部分の長さ $L(t)$ を $u(x,t)$ と $u(x+\Delta x,t)$，Δx を用いて表しなさい．

(3)　小物体の伸びの割合 $\dfrac{L(t)-L_0}{L_0}$ が，$\Delta x \to 0$ で $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ となることを示しなさい．

(4)　棒に加わる応力 $\dfrac{F(x,t)}{S}$ は，ヤング率 E を用いて $\dfrac{F(x,t)}{S} = E\dfrac{L(t)-L_0}{L_0}$ と表される．このことを用いて，$u(x,t)$ が $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{E}{\rho}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ を満たすことを示しなさい．

(5)　弾性体の棒を伝わる縦波の位相速度を ρ と E を用いて表しなさい．



(1)　$\rho S \Delta x$

(2)　$L(t) = x+\Delta x + u(x+\Delta x,t) - (x + u(x,t))$

$= u(x+\Delta x,t) - u(x,t) + \Delta x$

(3)　$L(t) - L_0 = u(x+\Delta x,t) - u(x,t)$

よって $\dfrac{L(t)-L_0}{L_0} = \dfrac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}$

$\to \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

(4)　$F(x,t) = ES\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ より 運動方程式は 運動中に小部分の質量の変化を無視し，小部分の位置を Pの位置で代表させることより，

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = ES\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)$$

$$\to ES\,\Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (\Delta x \to 0)$$

よって $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{E}{\rho}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$

(5)　(4)の式は波動方程式なので 位相速度 v_p は

$v_p^2 = \dfrac{E}{\rho}$　∴ $v_p = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$