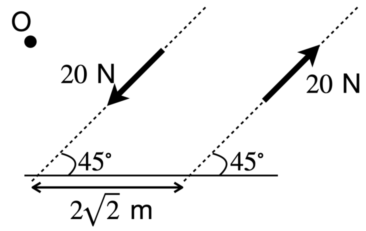
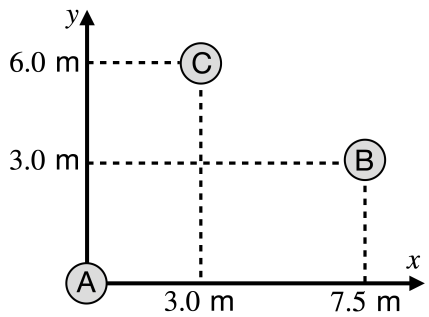
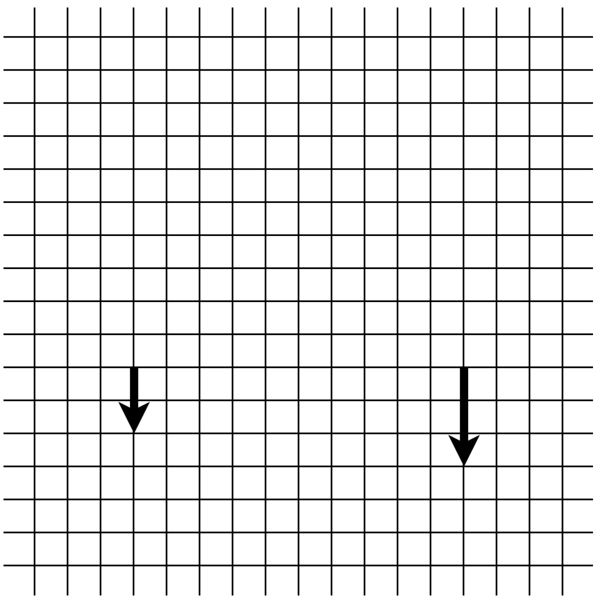
中間試験 1　図に示す二つの力について，点 O を中心とする力のモーメントの合計を求めよ．ただし，紙面手前方向を z 方向とする．



中間試験 2　質点 A, B, C（質量はそれぞれ 3.0 kg，2.0 kg，5.0 kg）が，質点 A を原点とする座標上（図）で配置されている．この質点系の質量中心の位置を求めなさい．

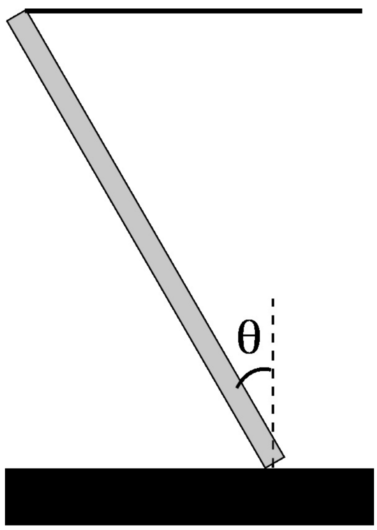


中間試験 3　作用線が互いに平行で同じ方向を向く二つの力について，力を合成する方法を説明しなさい．



中間試験 4　一様な棒 (長さ L，質量 M) が，水平方向に糸で引っ張られることで，あらい水平面上で鉛直方向に角 θ 傾いて静止している．床からの垂直抗力を N，摩擦力を R，張力を T として次の問いに答えなさい．ただし，重力加速度の大きさを g としなさい．

(1) 棒に作用する力をすべて図に書き込みなさい．どのベクトルがどの力なのか分かるように書くこと．
(2) 水平方向と鉛直方向の並進運動のつりあいの式をそれぞれ書きなさい．
(3) 回転に関するつりあいの式を書きなさい．
(4) 摩擦力 R を，g，M，θ を用いて表しなさい．



中間試験 5　2.0 kg の剛体について，質量中心を通る軸 A まわりの慣性モーメントを測定したら 10 kg·m^2 であった．軸 A と平行な軸 B があり，軸 A と軸 B は 5.0 m 離れている．次の問に答えなさい．

(1) 軸 B まわりの慣性モーメントを求めなさい．
(2) 軸 B を回転中心として，-12 N·m の力のモーメントが加わるとき，時刻 t での軸 B のまわりの角加速度を求めなさい．
(3) 軸 B を回転中心として，-12 N·m の力のモーメントが加わるとき，時刻 t での軸 B のまわりの角速度を求めなさい．ただし，$t = 0$ での角速度を 7.0 rad/s とする．

中間試験 6　半径 a のうすい円板（以下，大円板と呼ぶ）から，大円板の中心 O から $a/2$ 離れた位置を中心とする半径 $a/4$ の円板（以下，小円板と呼ぶ）を四つ切り抜いた物体（図）を考える．切り抜かれた後の物体の質量を M として，次の問に答えなさい．ただし，以下で考える軸は全て紙面に垂直とする．なお，半径 r，質量 m のうすい円板について，質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\dfrac{mr^2}{2}$ で表される.

(1)　物体の密度（面密度）σ を求めなさい．

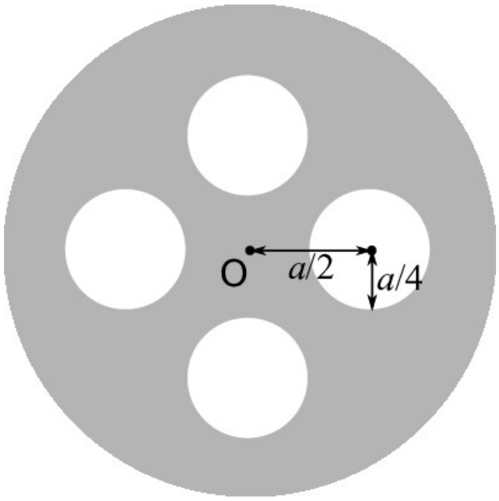
(2)　大円板の質量を M を用いて表しなさい．

(3)　小円板の質量を M を用いて表しなさい．

(4)　大円板について，点 O を通る軸まわりの慣性モーメントを M と a を用いて表しなさい．

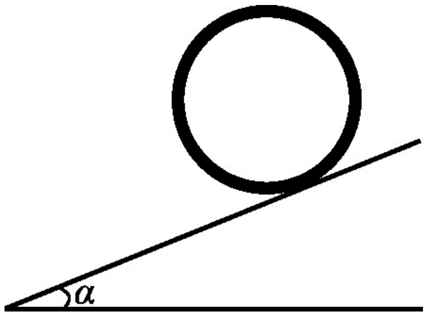
(5)　一つの小円板について，点 O を通る軸まわりの慣性モーメントを M と a を用いて表しなさい．

(6)　切り抜かれた後の物体について，点 O を通る軸まわりの慣性モーメントを求めなさい．



中間試験 7　水平と α の角をなすあらい斜面がある．球（質量 M，半径 a）を斜面上に静かに置くと，最大傾斜線に沿って転がった．斜面方向の球の速度を v，角速度を ω，球に加わる垂直抗力を N，球に加わる摩擦力を R，重力加速度の大きさを g とする．なお，質量 m，半径 r の球について，中心を通る軸のまわりの慣性モーメントは $I_M = \dfrac{2}{5}mr^2$ である．

(1)　すべらずに転がるとき，a，v，ω の間に成り立つ関係式を書きなさい．
(2)　N を，g，M，α を用いて表しなさい．
(3)　斜面方向の並進に関する運動方程式を書きなさい．
(4)　球の回転に関する運動方程式を書きなさい．
(5)　R を，g，M，α を用いて表しなさい．
(6)　静止摩擦係数を μ とするとき，すべらないための条件を求めなさい．



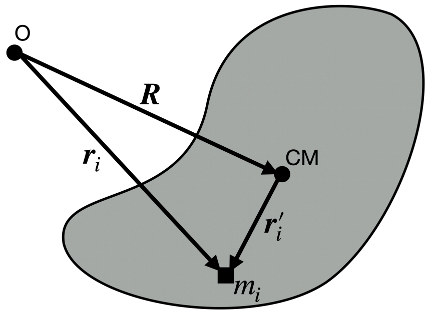
中間試験 8　剛体（質量 M）の質量中心（図の CM）の位置を $\boldsymbol{R}$ とする．剛体を構成する i 番目の質点（質量 m_i）について，その位置を $\boldsymbol{r}_i$，質量中心からの変位を $\boldsymbol{r}'_i$ とする．

(1) $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{r}_i$，$\boldsymbol{r}'_i$ の間に成り立つ関係式を書きなさい．

(2) $\displaystyle\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{0}$ を示しなさい．

(3) i 番目の質点の角運動量を $\boldsymbol{l}_i$ とすると，$\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{r}_i \times \left(m_i \dfrac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \right)$ が成り立つ．このことを踏まえ，剛体の角運動量 $\boldsymbol{L}$ が $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \times M\dfrac{d\boldsymbol{R}}{dt} + \displaystyle\sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \left(m_i \dfrac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt} \right)$ と書けることを示しなさい．

(4) 太陽を回転中心としたときの地球の角運動量がどのように表されるのかを，「自転」と「公転」というキーワードを用いて簡潔に説明しなさい．



【このページは空白です．ここに回答を書く場合は，どの問題の回答かを明記してください.】

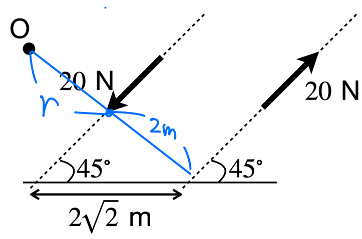
解答例

中間試験 1　図に示す二つの力について，点 O を中心とする力のモーメントの合計を求めよ．ただし，紙面手前方向を z 方向とする．

xy平面上の力なので 力のモーメントはz成分のみ.

図のようにrとおくと, 力のモーメントの合計は

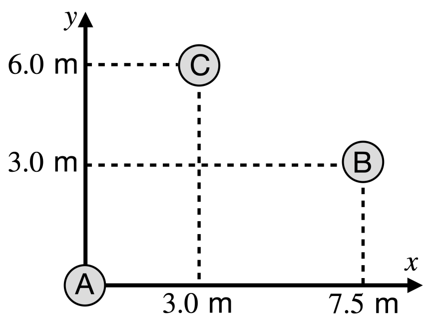
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r\cdot 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (r+2)\cdot 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40\ \mathrm{N\cdot m} \end{pmatrix}$$



中間試験 2　質点 A, B, C（質量はそれぞれ 3.0 kg，2.0 kg，5.0 kg）が，質点 A を原点とする座標上（図）で配置されている．この質点系の質量中心の位置を求めなさい．

$$x_M = \frac{3.0\times 0 + 2.0\times 7.5 + 5.0\times 3.0}{3.0+2.0+5.0} = 3.0$$

$$y_M = \frac{3.0\times 0 + 2.0\times 3.0 + 5.0\times 6.0}{3.0+2.0+5.0} = 3.6$$



$\therefore\ \boldsymbol{r}_M = (3.0\,\mathrm{m},\ 3.6\,\mathrm{m})$

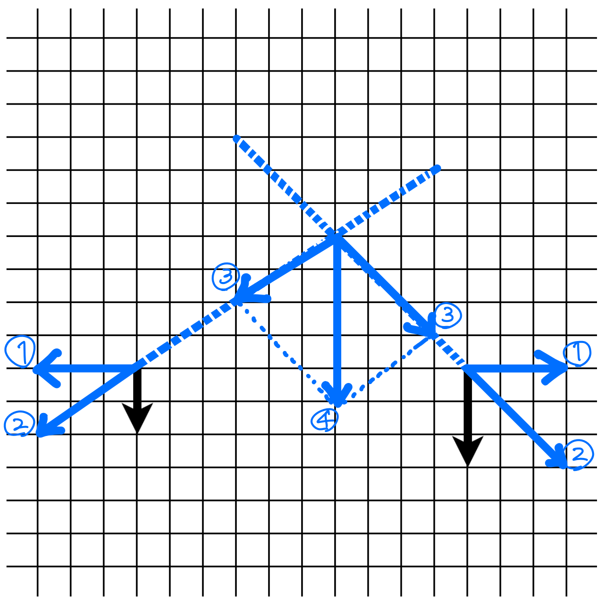
中間試験 3　作用線が互いに平行で同じ方向を向く二つの力について，力を合成する方法を説明しなさい．

① 合力が 0 の力を仮想的に加える

② 左右それぞれで, ①の力と元の力の合力をつくる

③ ②の力の作用線が交わるところに②の力を移動（∵作用線の定理）

④ ③の力の合力が元の力を合成した力.



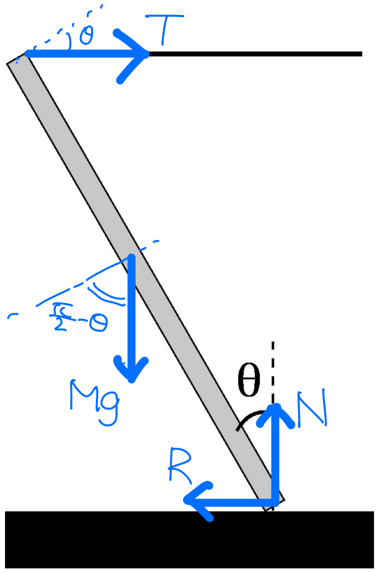
中間試験 4　一様な棒 (長さ L，質量 M) が，水平方向に糸で引っ張られることで，あらい水平面上で鉛直方向に角 θ 傾いて静止している．床からの垂直抗力を N，摩擦力を R，張力を T として次の問いに答えなさい．ただし，重力加速度の大きさを g としなさい．

(1)　棒に作用する力をすべて図に書き込みなさい．どのベクトルがどの力なのか分かるように書くこと．

(2)　水平方向と鉛直方向の並進運動のつりあいの式をそれぞれ書きなさい．

(3)　回転に関するつりあいの式を書きなさい．

(4)　摩擦力 R を，g，M，θ を用いて表しなさい．



(1) 右図のとおり

(2) 水平方向：$T = R$ …①，鉛直方向：$Mg = N$ …②

(3) 床との接点を回転中心とみなすと，

$$\frac{L}{2}Mg\sin\theta - LT\cos\theta = 0 \quad \cdots ③$$

(4) ③より $T = \frac{1}{2}Mg\tan\theta$

よって ①より $R = \frac{1}{2}Mg\tan\theta$ //

中間試験 5　2.0 kg の剛体について，質量中心を通る軸 A まわりの慣性モーメントを測定したら 10 kg·m^2 であった．軸 A と平行な軸 B があり，軸 A と軸 B は 5.0 m 離れている．次の問に答えなさい．

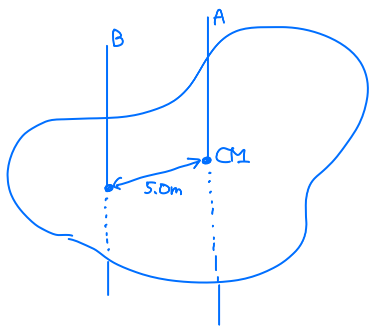
(1)　軸 B まわりの慣性モーメントを求めなさい．

(2)　軸 B を回転中心として，-12 N·m の力のモーメントが加わるとき，時刻 t での軸 B のまわりの角加速度を求めなさい．

(3)　軸 B を回転中心として，-12 N·m の力のモーメントが加わるとき，時刻 t での軸 B のまわりの角速度を求めなさい．ただし，$t = 0$ での角速度を 7.0 rad/s とする．

(1) 平行軸の定理より

$$I_B = 10 + 2.0 \times 5.0^2 = 60 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \text{ //}$$



(2)

$$\alpha = \frac{N}{I_B} = \frac{-12}{60} = -0.20 \text{ rad/s}^2 \text{ //}$$

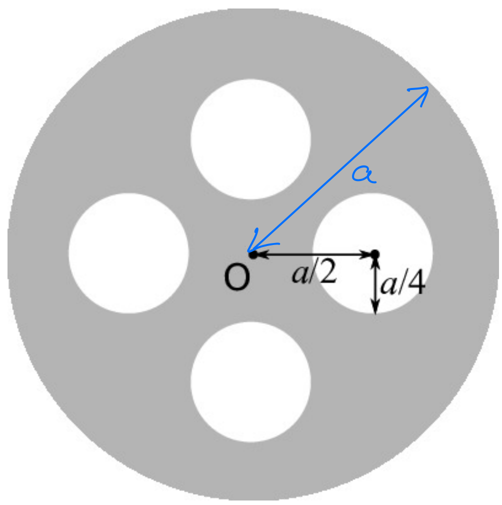
(3)

$$\omega(t) = \omega(0) + \int_0^t \alpha\, dt = 7.0 - 0.20t \ [\text{rad/s}]$$

2024 年度 応用物理学Ⅰ（鳴海担当分）　　番号:　　名前:

中間試験 6　半径 a のうすい円板（以下，大円板と呼ぶ）から，大円板の中心 O から $a/2$ 離れた位置を中心とする半径 $a/4$ の円板（以下，小円板と呼ぶ）を四つ切り抜いた物体（図）を考える．切り抜かれた後の物体の質量を M として，次の問に答えなさい．ただし，以下で考える軸は全て紙面に垂直とする．なお，半径 r，質量 m のうすい円板について，質量中心を通り板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\dfrac{mr^2}{2}$ で表される．

(1)　物体の密度（面密度）σ を求めなさい．
(2)　大円板の質量を M を用いて表しなさい．
(3)　小円板の質量を M を用いて表しなさい．
(4)　大円板について，点 O を通る軸まわりの慣性モーメントを M と a を用いて表しなさい．
(5)　一つの小円板について，点 O を通る軸まわりの慣性モーメントを M と a を用いて表しなさい．
(6)　切り抜かれた後の物体について，点 O を通る軸まわりの慣性モーメントを求めなさい．



(1) $\sigma = \dfrac{M}{\pi a^2 - 4\cdot\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{4M}{3\pi a^2}$

(2) $M_{大} = \pi a^2 \cdot \sigma = \dfrac{4}{3}M$

(3) $M_{小} = \dfrac{\pi a^2}{16}\cdot\sigma = \dfrac{1}{12}M$

(※ $M_{大} - 4M_{小} = M$)

(4) $I_{大} = \dfrac{1}{2}M_{大}\cdot a^2 = \dfrac{2}{3}Ma^2$

(5) $I_{小} = \dfrac{1}{2}M_{小}\cdot\left(\dfrac{a}{4}\right)^2 + M_{小}\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{128}Ma^2$

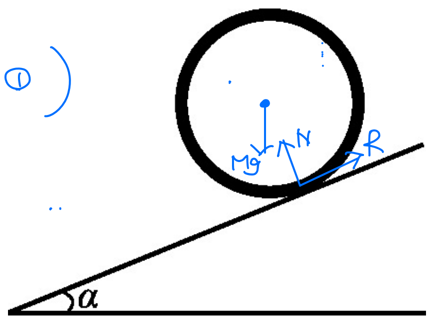
(6) $I = I_{大} - 4I_{小} = \dfrac{2}{3}Ma^2 - \dfrac{3}{32}Ma^2$

$= \dfrac{64-9}{96}Ma^2 = \dfrac{55}{96}Ma^2$

中間試験 7　水平と α の角をなすあらい斜面がある．球（質量 M，半径 a）を斜面上に静かに置くと，最大傾斜線に沿って転がった．斜面方向の球の速度を v，角速度を ω，球に加わる垂直抗力を N，球に加わる摩擦力を R，重力加速度の大きさを g とする．なお，質量 m，半径 r の球について，中心を通る軸のまわりの慣性モーメントは $I_M = \frac{2}{5}mr^2$ である．

(1)　すべらずに転がるとき，a，v，ω の間に成り立つ関係式を書きなさい．
(2)　N を，g，M，α を用いて表しなさい．
(3)　斜面方向の並進に関する運動方程式を書きなさい．
(4)　球の回転に関する運動方程式を書きなさい．
(5)　R を，g，M，α を用いて表しなさい．
(6)　静止摩擦係数を μ とするとき，すべらないための条件を求めなさい．

(1) $v = a\omega$ // $\left(\Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = a\frac{d\omega}{dt} \cdots ① \right)$



(2) 斜面に垂直方向の力のつりあいより

$$N = Mg\cos\alpha \quad //$$

(3) $M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\alpha - R \cdots ②$

(4) 球の慣性モーメントは $\frac{2}{5}Ma^2$ なので

$$\frac{2}{5}Ma^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = aR \quad // \quad \left(\Leftrightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{5R}{2aM} \cdots ③ \right)$$

(5) ①, ②, ③ を R, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ を未知変数とする連立方程式と考えると，

① に ② と ③ を代入することで，

$$① \Leftrightarrow g\sin\alpha - \frac{R}{M} = a \cdot \frac{5R}{2aM} \Leftrightarrow Mg\sin\alpha = \frac{7}{2}R$$

$$\therefore R = \frac{2}{7}Mg\sin\alpha \quad //$$

(6) すべらない条件は $R \leq \mu N$

よって $\frac{2}{7}Mg\sin\alpha \leq \mu Mg\cos\alpha$ 　$\therefore \tan\alpha \leq \frac{7}{2}\mu$ //

中間試験 8　剛体（質量 M）の質量中心（図の CM）の位置を $\boldsymbol{R}$ とする．剛体を構成する i 番目の質点（質量 m_i）について，その位置を $\boldsymbol{r}_i$，質量中心からの変位を $\boldsymbol{r}_i'$ とする．

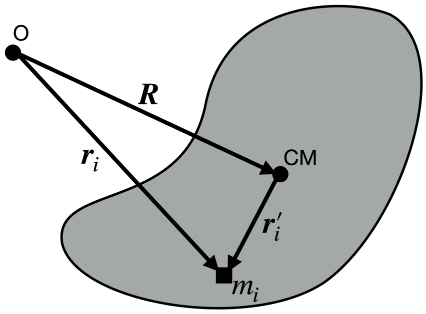
(1) $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{r}_i$，$\boldsymbol{r}_i'$ の間に成り立つ関係式を書きなさい．

(2) $\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{0}$ を示しなさい．

(3) i 番目の質点の角運動量を $\boldsymbol{l}_i$ とすると，$\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{r}_i \times \left(m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right)$ が成り立つ．このことを踏まえ，剛体の角運動量 $\boldsymbol{L}$ が $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \times M\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} + \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \left(m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt}\right)$ と書けることを示しなさい．

(4) 太陽を回転中心としたときの地球の角運動量がどのように表されるのかを，「自転」と「公転」というキーワードを用いて簡潔に説明しなさい．

(1) $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i'$



(2) $$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' = \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R})$$
$$= \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}\sum_i m_i \quad \cdots ⊛$$
$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} \text{ より } ⊛ = \boldsymbol{0} \quad ▨$$

(3) $$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{l}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \sum_i (\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}_i') \times \left\{m_i \frac{d(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}_i')}{dt}\right\}$$
$$= \sum_i \boldsymbol{R}\times m_i\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} + \sum_i \boldsymbol{R}\times m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt} + \sum_i \boldsymbol{r}_i'\times m_i\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} + \sum_i \boldsymbol{r}_i'\times m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt}$$

第1項は，iを含むのが m_i だけなので $\sum_i m_i = M$ より $\sum_i \boldsymbol{R}\times M\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}$

第2項は，(1)の両辺をtで微分すると $\sum_i m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt} = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{0}$.

第3項は，(1)より $\boldsymbol{0}$．以上より

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}\times M\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} + \sum_i \boldsymbol{r}_i'\times m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt} \quad ▨$$

(4) (3)で得られた式は，系の角運動量が質量中心を質量Mの質点とみなすときの角運動量と，質量中心まわりの角運動量の和で書けることを示している．地球にあてはめると，太陽のまわりの公転の角運動量と自転の角運動量の和が太陽のまわりの角運動量となる。