期末試験 1　t，$q = q(t)$，$\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$ に依存する関数 $f(t, q, \dot{q})$ の汎関数 $I[q] = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, q, \dot{q}) dt$ を考える．$f = \dot{q}^2$ のとき，次の問いに答えなさい．

(1)　$\dfrac{\partial f}{\partial q}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial \dot{q}}$ をそれぞれ求めなさい．

(2)　$\delta I = 0$ となる $q(t)$ の一般解を求めなさい．

(3)　$t = 0$ で $q(0) = 2$，$\dot{q}(0) = 3$ のとき，$q(t)$ を求めなさい．

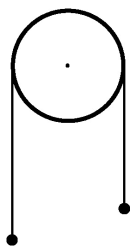
期末試験 2　ラグランジアンが $\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dfrac{1}{2} k \left(x^2 + y^2\right)$（ただし，$m$ と k は定数）と表される運動について，x と y のそれぞれについて，ラグランジュ方程式から得られる式を求めなさい．

期末試験 3　鉛直方向にのみ運動する質点（質量 m）がある．地面から高さを y，質点の速度を $\dot{y}$，重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい．

(1)　質点の運動エネルギー $K(\dot{y})$ を書きなさい．
(2)　重力による質点の位置エネルギー $U(y)$ を書きなさい．ただし，地面での位置エネルギーを 0 とする．
(3)　この運動のラグランジアン $\mathcal{L}(y, \dot{y})$ を書きなさい．

期末試験 4　質点 1（質量 m_1）と質点 2（質量 m_2）を伸縮しない軽い糸でつなぎ，その糸を滑車にかけた．質点 1 の鉛直下方向への変位を x とすると，運動エネルギーは $K = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2$，位置エネルギーは $U = -(m_1 - m_2)gx$（ここで，g は重力加速度の大きさ）で表される．x を一般化座標とし，次の問いに答えなさい．ただし，糸は滑車面をすべらないものとして，また左右の糸に加わる張力は等しいものとする．

(1)　一般化運動量 p を求めなさい．
(2)　この運動のハミルトニアン $\mathcal{H}(x, p)$ を求めなさい．
(3)　$\dot{x}$ を，g，m_1，m_2，p のうち必要なものを用いてそれぞれ表しなさい．
(4)　$\dot{p}$ を，g，m_1，m_2，p のうち必要なものを用いてそれぞれ表しなさい．
(5)　質点 1 の加速度 $\ddot{x}$ を，g，m_1，m_2 を用いてそれぞれ求めなさい．



期末試験 5　2 次元極座標系 (r,θ) で，位置エネルギーが r にのみ依存する質点（質量 m）を考える．位置エネルギーを $U(r)$ として，次の問いに答えなさい．なお，デカルト座標 (x,y) と極座標 (r,θ) の間には $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ の関係がある．

(1)　$\dot{x}$ を r，$\dot{r}$，θ，$\dot{\theta}$ を用いて表しなさい．

(2)　運動エネルギーが $K(r,\dot{r},\dot{\theta})=\dfrac{1}{2}m\left[\dot{r}^2+\left(r\dot{\theta}\right)^2\right]$ と表されることを示しなさい．

(3)　r についてのラグランジュ方程式を求め，それぞれの項の意味を書きなさい．

(4)　θ についてのラグランジュ方程式を求め，関係する物理法則の名称を記しなさい．

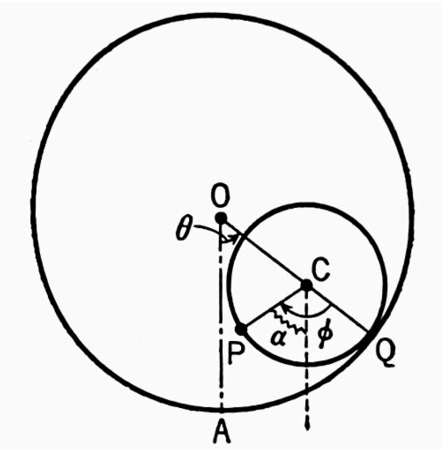
期末試験 6　半径 a，質量 m の円筒が，軸を水平にして固定された半径 R の円筒面の内側で，すべることなく転がる．内側の円筒の質量中心 C の回転角は，外側の円筒の中心 O と最下点 A を結ぶ線分を基準線として θ で表す．また，内側の円筒の角速度を $\dot{\alpha}$ で表す．内側の円筒の運動エネルギーは $\frac{1}{2}m(R-a)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2$，重力に関する位置エネルギーは $(R-a)mg(1-\cos\theta)$（ただし，g は重力加速度の大きさ）で表される．以下では，円筒の軸のまわりの慣性モーメントは $I=\frac{1}{2}ma^2$ で表されること，$a\alpha=(R-a)\theta$ が成り立つこと，そして運動方程式が $\ddot{\theta}=-\omega^2\theta$ で表される単振動の周期が $\frac{2\pi}{\omega}$ となることは既知としなさい．

(1)　運動エネルギーが $\frac{3}{4}m(R-a)^2\dot{\theta}^2$ と表されることを示しなさい．

(2)　θ を一般化座標として，ラグランジアンを，a，g，m，R，θ，$\dot{\theta}$ を用いて表しなさい．

(3)　$\ddot{\theta}$ を，a，g，R，θ を用いて表しなさい．

(4)　最下点 A 近傍での微小振動について，周期を求めなさい．



解答例

期末試験 1　t，$q = q(t)$，$\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$ に依存する関数 $f(t, q, \dot{q})$ の汎関数 $I[q] = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, q, \dot{q})dt$ を考える．$f = \dot{q}^2$ のとき，次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial q}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial \dot{q}}$ をそれぞれ求めなさい．

(2) $\delta I = 0$ となる $q(t)$ の一般解を求めなさい．

(3) $t = 0$ で $q(0) = 2$，$\dot{q}(0) = 3$ のとき，$q(t)$ を求めなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial q} = 0$ ， $\dfrac{\partial f}{\partial \dot{q}} = 2\dot{q}$

(2) $\delta I = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial q} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}\dot{q} = 0$

この微分方程式の一般解は，積分定数を A, B として $q(t) = At + B$

(3) $q(0) = B$ より $B = 2$

$\dot{q}(t) = A$ より $A = 3$.　以上より $q(t) = 3t + 2$ //

期末試験 2　ラグランジアンが $\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dfrac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$（ただし，$m$ と k は定数）と表される運動について，x と y のそれぞれについて，ラグランジュ方程式から得られる式を求めなさい．

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx$ ， $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ ， $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -ky$ ， $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$ より

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow -kx - \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \quad \therefore\ m\ddot{x} = -kx$

対称性より y も同じ式なので $m\ddot{y} = -ky$

期末試験 3　鉛直方向にのみ運動する質点（質量 m）がある．地面から高さを y，質点の速度を $\dot{y}$，重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい．

(1)　質点の運動エネルギー $K(\dot{y})$ を書きなさい．
(2)　重力による質点の位置エネルギー $U(y)$ を書きなさい．ただし，地面での位置エネルギーを 0 とする．
(3)　この運動のラグランジアン $\mathcal{L}(y, \dot{y})$ を書きなさい．

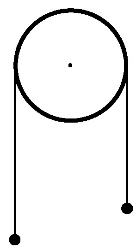
(1)　$K(\dot{y}) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$

(2)　$U(y) = mgy$

(3)　$\mathcal{L} = K - U = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - mgy$

期末試験 4　質点 1（質量 m_1）と質点 2（質量 m_2）を伸縮しない軽い糸でつなぎ，その糸を滑車にかけた．質点 1 の鉛直下方向への変位を x とすると，運動エネルギーは $K = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2$，位置エネルギーは $U = -(m_1 - m_2)gx$（ここで，g は重力加速度の大きさ）で表される．x を一般化座標とし，次の問いに答えなさい．ただし，糸は滑車面をすべらないものとして，また左右の糸に加わる張力は等しいものとする．

(1)　一般化運動量 p を求めなさい．
(2)　この運動のハミルトニアン $\mathcal{H}(x, p)$ を求めなさい．
(3)　$\dot{x}$ を，g，m_1，m_2，p のうち必要なものを用いてそれぞれ表しなさい．
(4)　$\dot{p}$ を，g，m_1，m_2，p のうち必要なものを用いてそれぞれ表しなさい．
(5)　質点 1 の加速度 $\ddot{x}$ を，g，m_1，m_2 を用いてそれぞれ求めなさい．



(1)　$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2) g x$ より

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x}$$

(2)
$$\mathcal{H} = \dot{x}p - \mathcal{L} = \frac{p^2}{m_1 + m_2} - \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 - m_2) g x$$
$$= \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 - m_2) g x$$

(3)(4) 正準方程式より　$\dot{x} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dfrac{p}{m_1 + m_2}$，$\dot{p} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = (m_1 - m_2) g$

(5)
$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{m_1 + m_2}\right) = \frac{\dot{p}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

期末試験 5　2 次元極座標系 (r, θ) で，位置エネルギーが r にのみ依存する質点（質量 m）を考える．位置エネルギーを $U(r)$ として，次の問いに答えなさい．なお，デカルト座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の間には $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ の関係がある．

(1)　$\dot{x}$ を r，$\dot{r}$，θ，$\dot{\theta}$ を用いて表しなさい．

(2)　運動エネルギーが $K(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right]$ と表されることを示しなさい．

(3)　r についてのラグランジュ方程式を求め，それぞれの項の意味を書きなさい．

(4)　θ についてのラグランジュ方程式を求め，関係する物理法則の名称を記しなさい．

(1) $\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \cdot \dot{\theta}$

(2) $\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta \cdot \dot{\theta}$

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left\{\left(\dot{r}^2\cos^2\theta - 2\dot{r}r\cos\theta\sin\theta \cdot \dot{\theta} + r^2\sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2\right) + \left(\dot{r}^2\sin^2\theta + 2\dot{r}r\cos\theta\sin\theta \cdot \dot{\theta} + r^2\cos^2\theta \cdot \dot{\theta}^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + r^2\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\right\} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \quad \blacksquare$$

(3) $\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r)$ より

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$，$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$．よって

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \Rightarrow mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} - m\ddot{r} = 0$$

第1項は遠心力，第2項は保存力，第3項は慣性力．

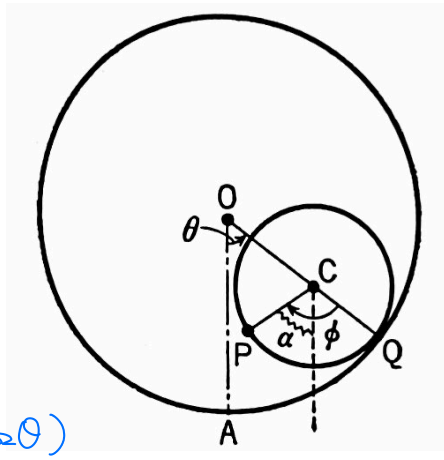
(4) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$，$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$．よって

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \quad \therefore mr^2\dot{\theta}^2 = \text{一定}.$$

これは角運動量保存則を表す.

期末試験 6　半径 a，質量 m の円筒が，軸を水平にして固定された半径 R の円筒面の内側で，すべることなく転がる．内側の円筒の質量中心 C の回転角は，外側の円筒の中心 O と最下点 A を結ぶ線分を基準線として θ で表す．また，内側の円筒の角速度を $\dot{\alpha}$ で表す．内側の円筒の運動エネルギーは $\frac{1}{2}m(R-a)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2$，重力に関する位置エネルギーは $(R-a)mg(1-\cos\theta)$（ただし，g は重力加速度の大きさ）で表される．以下では，円筒の軸のまわりの慣性モーメントは $I=\frac{1}{2}ma^2$ で表されること，$a\alpha=(R-a)\theta$ が成り立つこと，そして運動方程式が $\ddot{\theta}=-\omega^2\theta$ で表される単振動の周期が $\frac{2\pi}{\omega}$ となることは既知としなさい．

(1)　運動エネルギーが $\frac{3}{4}m(R-a)^2\dot{\theta}^2$ と表されることを示しなさい．
(2)　θ を一般化座標として，ラグランジアンを，a，g，m，R，θ，$\dot{\theta}$ を用いて表しなさい．
(3)　$\ddot{\theta}$ を，a，g，R，θ を用いて表しなさい．
(4)　最下点 A 近傍での微小振動について，周期を求めなさい．



(1)　$\alpha=\frac{R-a}{a}\theta$ より　$\dot{\alpha}=\frac{R-a}{a}\dot{\theta}$.　よって

$$\frac{1}{2}m(R-a)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ma^2\cdot\left(\frac{R-a}{a}\right)^2\dot{\theta}^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)m(R-a)^2\dot{\theta}^2=\frac{3}{4}m(R-a)^2\dot{\theta}^2$$

(2)　$$\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta})=\frac{3}{4}m(R-a)^2\dot{\theta}^2-(R-a)mg(1-\cos\theta)$$

(3)　$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=-(R-a)mg\sin\theta$，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=\frac{3}{2}m(R-a)^2\dot{\theta}$ より

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)=0\Rightarrow-(R-a)mg\sin\theta-\frac{d}{dt}\left\{\frac{3}{2}m(R-a)^2\dot{\theta}\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}m(R-a)^2\ddot{\theta}=-(R-a)mg\sin\theta\quad\therefore\ \ddot{\theta}=-\frac{2g}{3(R-a)}\sin\theta$$

(4)　微小振動では $\sin\theta\approx\theta$．よって (3) の式は

$$\ddot{\theta}=-\frac{2g}{3(R-a)}\theta$$

これは単振動の微分方程式なので，$\omega=\sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}$ として

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{3(R-a)}{2g}}$$ //