小テスト 1　次の問いに答えなさい．

(1) 量子力学的な粒子はフェルミオンかボゾンのいずれかに分類される．このことの原因となっている原理を書きなさい．

(2) 状態数 $\Omega(E)$ の定義を書きなさい．

(3) 自由電子モデルでは，電子が原子核や他の電子から受ける相互作用をどのように扱うか説明しなさい．

(4) 占有数 n_j の定義を書きなさい．

(5) 金属中の自由電子の運動について，規則的に並んだ原子核から受ける影響について説明しなさい．

[以下の空欄は自由に用いなさい．解答を書く場合はどの問題の解答かを明記すること]

小テスト 2　1 次元領域 $-L \leq x \leq L$ の中を質量 m の電子が自由に運動している．なお，運動量演算子は $\hat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{d}{dx}$ で表されることを既知として良い．

(1) 時間依存しないシュレディンガー方程式を，ハミルトニアンを $\hat{\mathcal{H}}$，定常状態の波動関数を $\varphi(x)$，エネルギー固有値を E を用いて書きなさい．

(2) 粒子が領域外に出ないとき，$\varphi(x) = C\cos\left(\dfrac{n\pi}{2L}x\right)$（ただし，$C$ は定数，n は自然数）と書けることを理由とともに説明しなさい．

(3) エネルギー固有値 E を，$\hbar$，L，m，n を用いて表しなさい．

小テスト 3　立方体（体積 V）の中の電子を 3 次元自由電子モデル[a]で扱う．

(1) 波数ベクトルが $\boldsymbol{k} = \dfrac{2\pi}{V^{\frac{1}{3}}}\boldsymbol{n}$（ただし，$\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ で，n_x，n_y，n_z は整数）であることを踏まえ，一つのエネルギー固有状態が 3 次元波数空間で占める体積を書きなさい．

(2) エネルギーが $\varepsilon = a|\boldsymbol{k}|^2$（ただし，$a$ は定数）で表されるとき，状態数 $\Omega(\varepsilon)$ を，ε，a，V で表しなさい．

(3) 状態密度 $D(\varepsilon)$ を，ε，a，V で表しなさい．

[a] 系は等方的とし，境界条件は周期境界条件とする．

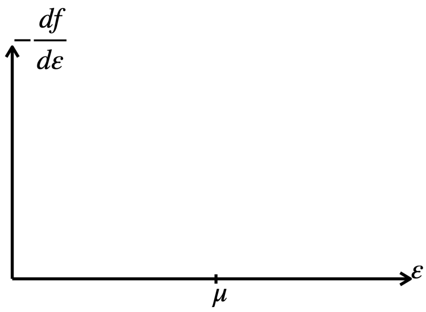
小テスト 4　フェルミ分布関数 $f(\varepsilon) = \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$（ただし，$\varepsilon \geq 0$）を含む積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon$ を考える．ただし，β は逆温度で μ は正の定数とする．

(1) $G(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^\varepsilon g(\varepsilon')d\varepsilon'$ とするとき，$I = -\displaystyle\int_0^\infty \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}G(\varepsilon)d\varepsilon$ となることを示しなさい．

(2) 次に，$G(\varepsilon) \simeq G(\mu) + (\varepsilon-\mu)G'(\mu) + \dfrac{1}{2}(\varepsilon-\mu)^2G''(\mu)$ と近似するが，このように考える根拠を $-\dfrac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ のグラフの概形を示しながら説明しなさい．

(3) 低温（つまり，β が十分に大きい）では $I \simeq \displaystyle\int_0^\mu g(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6\beta^2}g'(\mu)$ と近似できることを示しなさい．ただし，$\displaystyle\int_0^\infty (\varepsilon-\mu)^2\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}d\varepsilon = -\frac{\pi^2}{3\beta^2}$ は既知としなさい．

(4) 状態密度が $D(\varepsilon) = \alpha\sqrt{\varepsilon}$（ただし，$\alpha$ は定数）のとき，低温での粒子数の平均値 $\langle N\rangle$ を求めなさい．



小テスト 5　格子振動による抵抗率 ρ_L は，Θ をデバイ温度として

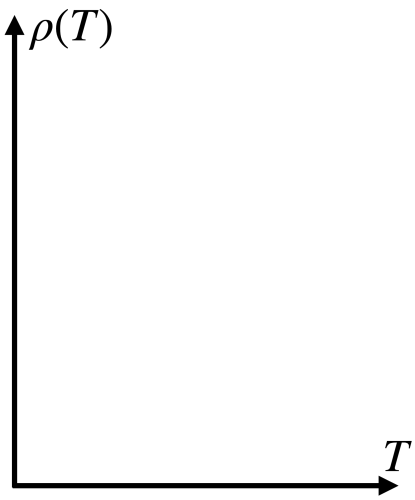
$$\rho_L(T) = \frac{CT^5}{\Theta^5}\int_0^{\Theta/T} \frac{x^5}{(e^x-1)(1-e^{-x})}dx \quad \text{(ここで，}C\text{ は定数)}$$

で表される．以下では，$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^n}{(e^x-1)(1-e^{-x})}dx \simeq n!$ であることは既知としなさい．

(1)　デバイ温度よりも十分に低温であるとき，上式を計算し，$\rho_L(T)$ を求めなさい．

(2)　デバイ温度よりも十分に高温であるとき，上式を計算し，$\rho_L(T)$ を求めなさい．

(3)　格子振動と不純物により散乱が生じているデバイスの抵抗率を $\rho_1(T)$ とする．また，同じ物質でより不純物密度が大きいデバイスの抵抗率を $\rho_2(T)$ とする．$\rho_1(T)$ と $\rho_2(T)$ の概形をグラフに描きなさい．



小テスト 1　次の問いに答えなさい．

(1) 量子力学的な粒子はフェルミオンかボゾンのいずれかに分類される．このことの原因となっている原理を書きなさい．
(2) 状態数 $\Omega(E)$ の定義を書きなさい．
(3) 自由電子モデルでは，電子が原子核や他の電子から受ける相互作用をどのように扱うか説明しなさい．
(4) 占有数 n_j の定義を書きなさい．
(5) 金属中の自由電子の運動について，規則的に並んだ原子核から受ける影響について説明しなさい．

(1) 同じ内部状態をとる同種粒子は原理的に区別できない.

(2) エネルギーが E 以下であるエネルギー固有状態の総数

(3) 相互作用をすべて無視する

(4) エネルギー固有状態 j を占めている粒子の個数.

(5) 電子の波動性により，規則的に並んだ原子核による散乱の結果生じる波と干渉することで運動量は保存する.

[以下の空欄は自由に用いなさい．解答を書く場合はどの問題の解答かを明記すること]

小テスト 2　1 次元領域 $-L \leq x \leq L$ の中を質量 m の電子が自由に運動している．なお，運動量演算子は $\hat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{d}{dx}$ で表されることを既知として良い．

(1)　時間依存しないシュレディンガー方程式を，ハミルトニアンを $\hat{\mathcal{H}}$，定常状態の波動関数を $\varphi(x)$，エネルギー固有値を E を用いて書きなさい．

(2)　粒子が領域外に出ないとき，$\varphi(x) = C\cos\left(\dfrac{n\pi}{2L}x\right)$（ただし，$C$ は定数，n は自然数）と書けることを理由とともに説明しなさい．

(3)　エネルギー固有値 E を，$\hbar$，L，m，n を用いて表しなさい．

(1)　$\hat{\mathcal{H}}\varphi(x) = E\varphi(x) \quad \cdots ①$

(2)　粒子が領域外にでないとき，$x<-L$, $L<x$ で波動関数は 0.
波動関数の連続性より $\varphi(\pm L)=0$. 領域内では $\hat{\mathcal{H}} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}$
なので ① は単振動型の微分方程式となる．境界条件を満たす解
は 波長が $\dfrac{4L}{n}$ なので，$\varphi(x) = C\cos kx = C\cos\left(\dfrac{n\pi}{2L}x\right)$ と表される。

(3)　$\varphi(x) = C\cos\left(\dfrac{n\pi}{2L}x\right)$ では $\hat{\mathcal{H}}\varphi = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{n\pi}{2L}\right)^2\varphi$
① と比較することで　$E = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}n^2$。

小テスト 3　立方体（体積 V）の中の電子を 3 次元自由電子モデル[a]で扱う．

(1)　波数ベクトルが $\boldsymbol{k} = \dfrac{2\pi}{V^{\frac{1}{3}}}\boldsymbol{n}$（ただし，$\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ で，n_x，n_y，n_z は整数）であることを踏まえ，一つのエネルギー固有状態が 3 次元波数空間で占める体積を書きなさい．

(2)　エネルギーが $\varepsilon = a|\boldsymbol{k}|^2$（ただし，$a$ は定数）で表されるとき，状態数 $\Omega(\varepsilon)$ を，ε，a，V で表しなさい．

(3)　状態密度 $D(\varepsilon)$ を，ε，a，V で表しなさい．

[a] 系は等方的とし，境界条件は周期境界条件とする．

(1)　$\dfrac{(2\pi)^3}{V}$

(2)　$\Omega(\varepsilon) = 2\cdot\dfrac{\frac{4}{3}\pi k^3}{(2\pi)^3/V} = \dfrac{Vk^3}{3\pi^2} = \dfrac{V\cdot\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2 a^{\frac{3}{2}}}$

(3)　$D(\varepsilon) = \dfrac{d\Omega}{d\varepsilon} = \dfrac{V}{2\pi^2 a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\varepsilon}$

小テスト 4　フェルミ分布関数 $f(\varepsilon)=\dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$（ただし，$\varepsilon\geq 0$）を含む積分 $I=\int_0^\infty f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon$ を考える．ただし，β は逆温度で μ は正の定数とする．

(1) $G(\varepsilon)=\int_0^\varepsilon g(\varepsilon')d\varepsilon'$ とするとき，$I=-\int_0^\infty \dfrac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}G(\varepsilon)d\varepsilon$ となることを示しなさい．

(2) 次に，$G(\varepsilon)\simeq G(\mu)+(\varepsilon-\mu)G'(\mu)+\dfrac{1}{2}(\varepsilon-\mu)^2G''(\mu)$ と近似するが，このように考える根拠を $-\dfrac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ のグラフの概形を示しながら説明しなさい．

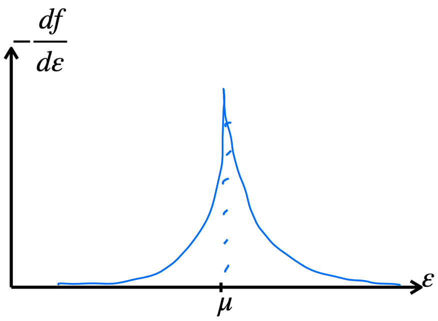
(3) 低温（つまり，β が十分に大きい）では $I\simeq\int_0^\mu g(\varepsilon)d\varepsilon+\dfrac{\pi^2}{6\beta^2}g'(\mu)$ と近似できることを示しなさい．ただし，$\int_0^\infty(\varepsilon-\mu)^2\dfrac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}d\varepsilon=-\dfrac{\pi^2}{3\beta^2}$ は既知としなさい．

(4) 状態密度が $D(\varepsilon)=\alpha\sqrt{\varepsilon}$（ただし，$\alpha$ は定数）のとき，低温での粒子数の平均値 $\langle N\rangle$ を求めなさい．

(1) 部分積分より $I=\Big[f(\varepsilon)G(\varepsilon)\Big]_0^\infty-\int_0^\infty\dfrac{df}{d\varepsilon}G(\varepsilon)d\varepsilon$

$f(\varepsilon)\to 0$ $(\varepsilon\to\infty)$ と $G(\varepsilon)=0$ より第1項は0.　$\therefore$ $I=-\int_0^\infty\dfrac{df}{d\varepsilon}G(\varepsilon)d\varepsilon$

(2) $-\dfrac{df}{d\varepsilon}$ は右図のように $\varepsilon\fallingdotseq\mu$ で大きな値をとるので，$-\int\dfrac{df}{d\varepsilon}G(\varepsilon)d\varepsilon$ を計算する際には $\varepsilon=\mu$ のまわりで展開する．



(3) (1)と(2)より

$$I\simeq-\int_0^\infty\frac{df}{d\varepsilon}G(\mu)d\varepsilon-\int_0^\infty\frac{df}{d\varepsilon}(\varepsilon-\mu)G'(\mu)d\varepsilon-\int_0^\infty\frac{df}{d\varepsilon}\frac{(\varepsilon-\mu)^2}{2}G''(\mu)d\varepsilon$$

$\int_0^\infty\dfrac{df}{d\varepsilon}=-1$ より，第1項は $G(\mu)=\int_0^\mu g(\varepsilon)d\varepsilon$.

第2項は，$\dfrac{df}{d\varepsilon}\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$ より積分範囲を $-\infty\sim\infty$ と考える．このとき，奇関数なので 0.

第3項は　$-\dfrac{G''(\mu)}{2}\int_0^\infty\dfrac{df}{d\varepsilon}(\varepsilon-\mu)^2d\varepsilon=\dfrac{\pi^2G''(\mu)}{6\beta^2}$　　以上より $I\simeq\int_0^\mu g(\varepsilon)d\varepsilon+\dfrac{\pi^2}{6\beta^2}g'(\mu)$

(4) $\langle N\rangle=\int_0^\infty f(\varepsilon)D(\varepsilon)d\varepsilon$ より，(3)で $g(\varepsilon)=D(\varepsilon)$ とすればよい．

$\int_0^\mu D(\varepsilon)d\varepsilon=\dfrac{2\alpha}{3}\Big[\varepsilon^{\frac{3}{2}}\Big]_0^\mu=\dfrac{2\alpha}{3}\mu^{\frac{3}{2}}$，　$D'(\varepsilon)=\dfrac{\alpha\pi^2}{12\beta^2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ より　$\langle N\rangle\simeq\dfrac{2\alpha}{3}\mu^{\frac{3}{2}}+\dfrac{\alpha\pi^2}{12\beta^2}\mu^{-\frac{1}{2}}$.

小テスト 5　格子振動による抵抗率 ρ_L は，Θ をデバイ温度として

$$\rho_L(T) = \frac{CT^5}{\Theta^5}\int_0^{\Theta/T}\frac{x^5}{(e^x-1)(1-e^{-x})}dx \quad \text{(ここで，}C\text{ は定数)}$$

で表される．以下では，$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^n}{(e^x-1)(1-e^{-x})}dx \simeq n!$ であることは既知としなさい．

(1)　デバイ温度よりも十分に低温であるとき，上式を計算し，$\rho_L(T)$ を求めなさい．

(2)　デバイ温度よりも十分に高温であるとき，上式を計算し，$\rho_L(T)$ を求めなさい．

(3)　格子振動と不純物により散乱が生じているデバイスの抵抗率を $\rho_1(T)$ とする．また，同じ物質でより不純物密度が大きいデバイスの抵抗率を $\rho_2(T)$ とする．$\rho_1(T)$ と $\rho_2(T)$ の概形をグラフに描きなさい．

(1)　低温では

$$\rho_L = \frac{CT^5}{\Theta^5}\int_0^{\infty}\frac{x^5}{(e^x-1)(1-e^{-x})}dx = \frac{CT^5}{\Theta^5}5! = \frac{120C}{\Theta^5}T^5$$

(2) 高温では　積分変数 x は十分に小さな値となるので

$e^x - 1 \fallingdotseq x$，　$1-e^{-x} \fallingdotseq x$　と近似できる．よって

$$\rho_L = \frac{CT^5}{\Theta^5}\int_0^{\frac{\Theta}{T}}x^3dx = \frac{CT^5}{4\Theta^5}\cdot\left[x^4\right]_0^{\frac{\Theta}{T}} = \frac{C}{4\Theta}T$$

(3)　ρ_L は低温で T^5 に，高温で T に比例．不純物由来の抵抗は T に依存せず，不純物密度に依存する．よって ρ_2 は ρ_1 を上に平行移動したものとなり，右のように表される．