中間試験 1　次の問に答えなさい．

(1) 1 次元束縛状態についてエネルギー固有値に関する性質を説明しなさい．

(2) 調和振動子における零点振動エネルギーを，ディラック定数 $\hbar$ と角振動数 ω を用いて表しなさい．

(3) 位置 x，時刻 t での確率密度を $\rho(x,t)$，流束密度を $j(x,t)$ とするとき，連続の式を書きなさい．

(4) トンネル効果について説明しなさい．

(5) エネルギーバンドとバンドギャップについて説明しなさい．

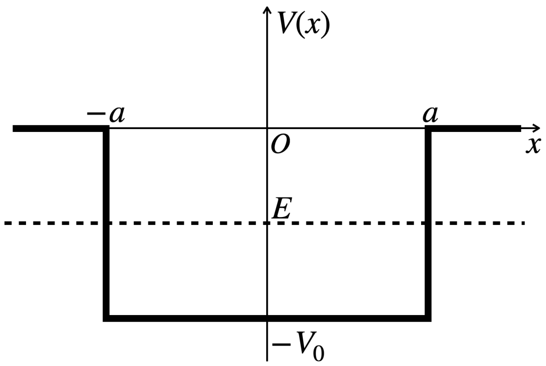
[以下の空欄は自由に用いなさい．解答を書く場合はどの問題の解答かを明記すること]

中間試験 2　図のような井戸型ポテンシャルの中で運動する粒子（質量 m，エネルギー固有値 E，ただし $-V_0 < E < 0$）について考える．$x < -a$，$-a < x < a$，$a < x$ のそれぞれの領域での波動関数を $\varphi_{\mathrm{L}}(x)$，$\varphi(x)$，$\varphi_{\mathrm{R}}(x)$ とする．以下では，$k = \dfrac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$，$\rho = \dfrac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ としなさい．

(1)　$\varphi_{\mathrm{L}}(x)$，$\varphi(x)$，$\varphi_{\mathrm{R}}(x)$ の一般解を書きなさい．ただし，用いる積分定数は全部で四つとすること．

(2)　波動関数の連続性から，ρ と k の間の関係式を二つ求めなさい．

(3)　$\varphi_L(x)$ および $\varphi_R(x)$ を踏まえて，この系で見られる量子力学特有の性質について説明しなさい．



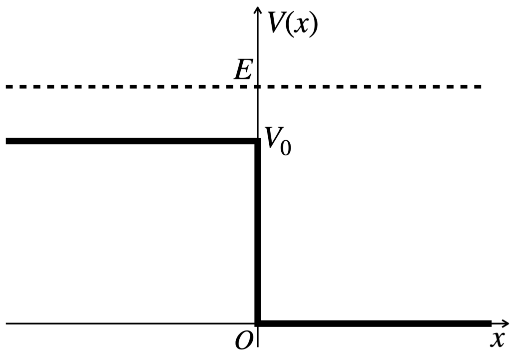
中間試験 3　図のような階段ポテンシャル $V(x)$ に対して，粒子（質量 m，エネルギー固有値 E）が $x \to \infty$ から入射している．$V_0 < E$ のとき，領域 $x < 0$，$x > 0$ の波動関数はそれぞれ $\varphi_1(x) = Ae^{-ik_1x}$，$\varphi_2(x) = Be^{ik_2x} + Ce^{-ik_2x}$ $\left(ただし, k_1 = \dfrac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}, k_2 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, A, B, C \text{ は積分定数}\right)$ と表される．

(1) A/C，B/C を，それぞれ k_1 と k_2 を用いて表しなさい．

(2) 項 Ae^{-ik_1x}，Be^{ik_2x}，Ce^{-ik_2x} に対応する確率流密度 $j_A(x)$，$j_B(x)$，$j_C(x)$ をそれぞれ求めなさい．なお，波動関数 $\varphi(x)$ に対応する確率流密度 $j(x)$ は $j(x) = \dfrac{\hbar}{2im}\left\{\varphi^*(x)\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x} - \dfrac{\partial\varphi^*(x)}{\partial x}\varphi(x)\right\}$ と表される．

(3) 反射率 r_R を k_1，k_2 を用いて表しなさい．

(4) 透過率を r_T とするとき，$r_\mathsf{R} + r_\mathsf{T} = 1$ となることを示しなさい．



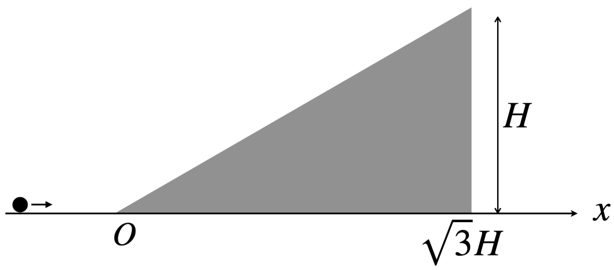
中間試験 4　水平面に置かれた高さ H の斜面台（傾斜角 30°）に向かって，質量 m，エネルギー E の小球を左から打ち込む．斜面台は固定されており，水平面および斜面はなめらかとする．以下では，図のように x 軸を設定し，重力加速度の大きさを g としなさい．

(1)　$0 \leq x \leq \sqrt{3}H$ での重力についてのポテンシャルエネルギー $V(x)$ を求めなさい．

(2)　$V(x)$ の最大値を V_0 とする．V_0 を，g，m，H を用いて表しなさい．

(3)　この粒子の運動を，ポテンシャル $V(x)$ 中の量子力学的粒子の運動とみなす．このとき，透過率の近似式（ガモフの透過因子）$r_\mathsf{T} \simeq \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{\sqrt{3}H/2}^{\sqrt{3}H}\sqrt{2m\,(V(x)-E)}dx\right]$ を用いて，$E = \frac{V_0}{2}$ での r_T を，$\hbar$，g，m，H を用いて表しなさい．

(4)　$H = 1.0$ m，$m = 1.0$ kg での透過率 r_T はいくらか．$g = 9.8$ m/s^2，$\hbar = 1.1 \times 10^{-34}$ J·s としなさい．



解答例

2024 年度 量子力学 II (鳴海担当分)　　番号:　　名前:

中間試験 1　次の問に答えなさい．

(1) 1 次元束縛状態についてエネルギー固有値に関する性質を説明しなさい．

(2) 調和振動子における零点振動エネルギーを，ディラック定数 $\hbar$ と角振動数 ω を用いて表しなさい．

(3) 位置 x，時刻 t での確率密度を $\rho(x,t)$，流束密度を $j(x,t)$ とするとき，連続の式を書きなさい．

(4) トンネル効果について説明しなさい．

(5) エネルギーバンドとバンドギャップについて説明しなさい．

(1) エネルギー固有値は縮退しない.

(2) $\frac{1}{2}\hbar\omega$

(3) $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}$

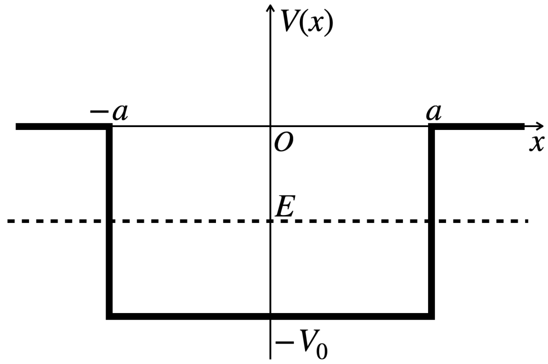
(4) 障壁よりも低いエネルギー固有値であるにもかかわらず，障壁を透過する現象

(5) 値をとることが許されるエネルギーの範囲をエネルギーバンドといい，値をとることが禁止されたエネルギーの範囲をバンドギャップという.

[以下の空欄は自由に用いなさい．解答を書く場合はどの問題の解答かを明記すること]

中間試験 2 図のような井戸型ポテンシャルの中で運動する粒子（質量 m，エネルギー固有値 E，ただし $-V_0 < E < 0$）について考える．$x < -a$，$-a < x < a$，$a < x$ のそれぞれの領域での波動関数を $\varphi_{\mathrm{L}}(x)$，$\varphi(x)$，$\varphi_{\mathrm{R}}(x)$ とする．以下では，$k = \dfrac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$，$\rho = \dfrac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ としなさい．

(1) $\varphi_{\mathrm{L}}(x)$，$\varphi(x)$，$\varphi_{\mathrm{R}}(x)$ の一般解を書きなさい．ただし，用いる積分定数は全部で四つとすること．
(2) 波動関数の連続性から，ρ と k の間の関係式を二つ求めなさい．
(3) $\varphi_L(x)$ および $\varphi_R(x)$ を踏まえて，この系で見られる量子力学特有の性質について説明しなさい．



(1) $x \to \pm\infty$ で粒子は存在しないので

$$\begin{cases} \varphi_L(x) = Ae^{\rho x} \\ \varphi(x) = B\cos kx + C\sin kx \\ \varphi_R(x) = De^{-\rho x} \end{cases}$$

(A, B, C, D は積分定数)

(2) 波動関数の連続性から

$\varphi_L(-a) = \varphi(-a) \Rightarrow Ae^{-\rho a} = B\cos ka - C\sin ka$ … ①

$\varphi_L'(-a) = \varphi'(-a) \Rightarrow A\rho e^{-\rho a} = Bk\sin ka + Ck\cos ka$ … ②

$\varphi(a) = \varphi_R(a) \Rightarrow B\cos ka + C\sin ka = De^{-\rho a}$ … ③

$\varphi'(a) = \varphi_R'(a) \Rightarrow -Bk\sin ka + Ck\cos ka = -D\rho e^{-\rho a}$ … ④

①,②より $\rho = \dfrac{B\sin ka + C\cos ka}{B\cos ka - C\sin ka}k$　③,④より $\rho = \dfrac{B\sin ka - C\cos ka}{B\cos ka + C\sin ka}k$ //

(3) (2)より $(B\sin ka + C\cos ka)(B\cos ka + C\sin ka) = (B\sin ka - C\cos ka)(B\cos ka - C\sin ka)$

$\Leftrightarrow BC = 0$.　$B = C = 0$ は $\varphi = 0$ となって不適なので $B = 0$ or $C = 0$.

よって ① および ③ から，$A \neq 0$ かつ $D \neq 0$，つまり $\varphi_L(x) \neq 0$ かつ $\varphi_R(x) \neq 0$.

$x < -a$，$a < x$ の領域では，古典的には粒子が存在しえないが，量子力学的には粒子が存在する可能性を示している。

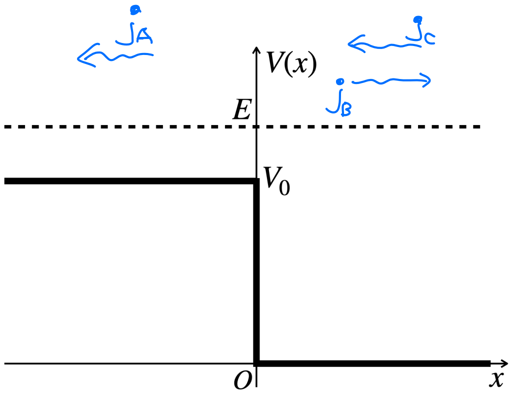
中間試験 3　図のような階段ポテンシャル $V(x)$ に対して，粒子（質量 m，エネルギー固有値 E）が $x \to \infty$ から入射している．$V_0 < E$ のとき，領域 $x < 0$，$x > 0$ の波動関数はそれぞれ $\varphi_1(x) = Ae^{-ik_1 x}$，$\varphi_2(x) = Be^{ik_2 x} + Ce^{-ik_2 x}$ $\left(\text{ただし}, k_1 = \dfrac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}, k_2 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, A, B, C \text{ は積分定数}\right)$ と表される．

(1) A/C，B/C を，それぞれ k_1 と k_2 を用いて表しなさい．

(2) 項 $Ae^{-ik_1 x}$，$Be^{ik_2 x}$，$Ce^{-ik_2 x}$ に対応する確率流密度 $j_A(x)$，$j_B(x)$，$j_C(x)$ をそれぞれ求めなさい．なお，波動関数 $\varphi(x)$ に対応する確率流密度 $j(x)$ は $j(x) = \dfrac{\hbar}{2im}\left\{\varphi^*(x)\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x} - \dfrac{\partial\varphi^*(x)}{\partial x}\varphi(x)\right\}$ と表される．

(3) 反射率 r_{R} を k_1，k_2 を用いて表しなさい．

(4) 透過率を r_{T} とするとき，$r_{\mathrm{R}} + r_{\mathrm{T}} = 1$ となることを示しなさい．



(1) 波動関数の連続性より

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \Rightarrow A = B + C \\ \varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) \Rightarrow -ik_1 A = ik_2 B - ik_2 C \end{cases}$$

これらを連立して解くことで

$$\frac{A}{C} = \frac{2k_2}{k_2 + k_1}, \quad \frac{B}{C} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \quad /\!/$$

(2)

$$j_A(x) = \frac{\hbar}{2im}\left\{(A^* e^{ik_1 x})\frac{\partial(Ae^{-ik_1 x})}{\partial x} - \frac{\partial(A^* e^{ik_1 x})}{\partial x}(Ae^{-ik_1 x})\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2im}|A|^2\left\{e^{ik_1 x}(-ik_1)e^{-ik_1 x} - ik_1 e^{ik_1 x}\cdot e^{-ik_1 x}\right\} = -\frac{\hbar k_1}{m}|A|^2$$

$j_B(x)$ は $j_A(x)$ で $k_1 \to -k_2$，$A \to B$ と置きかえたものなので $j_B(x) = \dfrac{\hbar k_2}{m}|B|^2$

$j_C(x)$ は $j_A(x)$ で $k_1 \to k_2$，$A \to C$ と置きかえたものなので $j_C(x) = -\dfrac{\hbar k_2}{m}|C|^2$ //

(3)

$$r_R = \frac{|j_B(x)|}{|j_C(x)|} = \frac{|B|^2}{|C|^2} = \frac{(k_2 - k_1)^2}{(k_2 + k_1)^2}$$

(4)

$$r_T = \frac{|j_A(x)|}{|j_C(x)|} = \frac{k_1}{k_2}\frac{|A|^2}{|C|^2} = \frac{k_1}{k_2}\cdot\frac{4k_2^2}{(k_2 + k_1)^2} = \frac{4k_1 k_2}{(k_2 + k_1)^2}$$

$$\Rightarrow r_R + r_T = \frac{(k_2^2 - 2k_2 k_1 + k_1^2) + 4k_1 k_2}{(k_2 + k_1)^2} = \frac{k_2^2 + 2k_1 k_2 + k_1^2}{(k_2 + k_1)^2} = 1$$

中間試験 4　水平面に置かれた高さ H の斜面台（傾斜角 30°）に向かって，質量 m，エネルギー E の小球を左から打ち込む．斜面台は固定されており，水平面および斜面はなめらかとする．以下では，図のように x 軸を設定し，重力加速度の大きさを g としなさい．

(1) $0 \le x \le \sqrt{3}H$ での重力についてのポテンシャルエネルギー $V(x)$ を求めなさい．

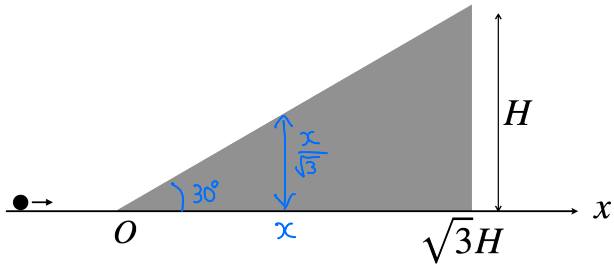
(2) $V(x)$ の最大値を V_0 とする．V_0 を，g，m，H を用いて表しなさい．

(3) この粒子の運動を，ポテンシャル $V(x)$ 中の量子力学的粒子の運動とみなす．このとき，透過率の近似式（ガモフの透過因子）$r_\mathrm{T} \simeq \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{\sqrt{3}H/2}^{\sqrt{3}H}\sqrt{2m\,(V(x)-E)}dx\right]$ を用いて，$E = \frac{V_0}{2}$ での r_T を，$\hbar$，g，m，H を用いて表しなさい．

(4) $H = 1.0$ m，$m = 1.0$ kg での透過率 r_T はいくらか．$g = 9.8$ m/s^2，$\hbar = 1.1\times10^{-34}$ J·s としなさい．

(1) x での高さは $\frac{x}{\sqrt{3}}$ なので

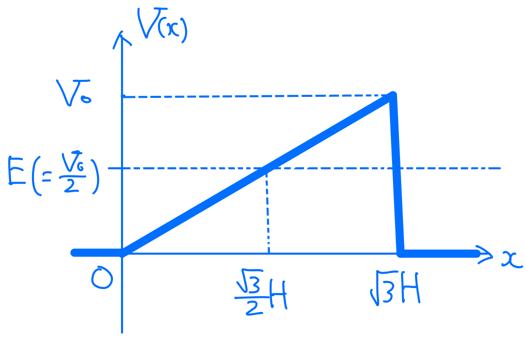
$$V(x) = \frac{mgx}{\sqrt{3}}$$



(2) (1) で $x = \sqrt{3}H$ を代入して

$$V_0 = mgH.$$

(3) $V(x)$ は右の通り．左から $E = \frac{V_0}{2}$ の粒子が入射するとき，透過率は



$$r_\mathrm{T} \simeq \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}H}^{\sqrt{3}H}\sqrt{2m\left(\frac{mgx}{\sqrt{3}}-\frac{V_0}{2}\right)}\,dx\right]$$

$\frac{mg}{\sqrt{3}}x - \frac{V_0}{2} = y$ とおくと積分は

$$\sqrt{2m}\int_0^{\frac{mgH}{2}} y^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{mg}dy = \sqrt{\frac{6}{m}}\cdot\frac{1}{g}\cdot\frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{mgH}{2}} = m\sqrt{\frac{gH^3}{3}}$$

$$\therefore\ r_\mathrm{T} \simeq \exp\left[-\frac{2m}{\hbar}\sqrt{\frac{gH^3}{3}}\right]$$

(4) $H = 1.0$ m，$m = 1.0$ kg，$g = 9.8$ m/s^2，$\hbar = 1.1\times10^{-34}$ J.s

を代入すると

$$r_\mathrm{T} \simeq \exp\left[-\frac{2\times1.0}{1.1\times10^{-34}}\sqrt{\frac{9.8\times1.0^3}{3}}\right] \fallingdotseq e^{-1.0\times10^{36}}$$