期末試験 1　次の問に答えなさい．

(1) 3 次元極座標系でのハミルトニアンを，粒子の質量 m，運動量の動径成分 $\hat{p}_r$，軌道角運動量 $\hat{\boldsymbol{L}}$，位置エネルギー $V(r, \theta, \phi)$ を用いて表しなさい．

(2) 3 次元中心力場では，波動関数 $\varphi(\boldsymbol{r})$ がどのような表式で一般的に表されるか簡潔に説明しなさい．

(3) 3 次元クーロン場において，波動関数を定める量子数の名称をすべて答えなさい．

(4) 正常ゼーマン効果について，「磁場」,「縮退」というキーワードを用いて説明しなさい．

期末試験 2　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}$ について，$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$ を示しなさい．

期末試験 3　軌道角運動量 $\hat{\boldsymbol{L}}$，球面調和関数 $Y_l^{m_l}(\theta,\phi)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $l=1, m_l=1$ では $Y_1^1(\theta,\phi) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$ と表される．このとき，$\hat{\boldsymbol{L}}$ の z 成分 $\hat{L}_z$ について，$\hat{L}_z Y_1^1(\theta,\phi)$ を，$\hbar$ と $Y_1^1(\theta,\phi)$ を用いて表しなさい．なお，$\hat{L}_z = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ であることは既知としなさい．

(2) $l=1, m_l=0$ では $Y_1^0(\theta,\phi) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}\cos\theta$ と表される．このとき，$\hat{\boldsymbol{L}}^2 Y_1^0(\theta,\phi)$ を，$\hbar$ と $Y_1^0(\theta,\phi)$ を用いて表しなさい．なお，$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = -\hbar^2\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$ であることをは既知としなさい．

期末試験 4　上向きスピンの状態を $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，下向きスピンの状態を $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表すとき，スピン $\hat{\boldsymbol{s}} = (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z)$ は，$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\hat{s}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$，$\hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と書ける．

(1)　交換関係 $[\hat{s}_x, \hat{s}_y] = i\hbar\hat{s}_z$ を示しなさい．

(2)　$\hat{s}_z |\uparrow\rangle$ を計算し，その結果が意味することを説明しなさい．

(3)　$\hat{s}_\pm = \hat{s}_x \pm i\hat{s}_y$（複合同順）とする．$\hat{s}_+ |\uparrow\rangle$，$\hat{s}_+ |\downarrow\rangle$，$\hat{s}_- |\uparrow\rangle$，$\hat{s}_- |\downarrow\rangle$ を計算し，それらの結果から $\hat{s}_+$ と $\hat{s}_-$ がどういった役割を果たす演算子なのか説明しなさい．

期末試験 5　電子を，表面に負の電荷が一様に帯電している球体とみなす．

(1) 球体が自転しているとき，球体の赤道上の表面速度を，球体の質量 m_e，球体の半径 r_e，角運動量 L を用いて表しなさい．ただし，球体の慣性モーメント $I = \dfrac{2}{5} m_e r_e^2$，赤道上の表面速度 v と角速度 ω の関係 $v = r_e \omega$，角速度と角運動量 L の関係 $L = I\omega$ は既知としなさい．

(2) この球体の自転の角運動量が $\dfrac{\hbar}{2}$ に等しいとき，球体の赤道上の表面速度を，m_e，r_e，ディラック定数 $\hbar$ を用いて表しなさい．

(3) 表面速度は光速度 c よりも小さい．球体の半径 r_e が満たすべき条件を求めなさい．

(4) 電子の質量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg，光速度 $c = 3.00 \times 10^{8}$ m/s，ディラック定数 $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$，陽子の半径 $r_p = 8.8 \times 10^{-16}$ m が知られている[a]．電子の半径は知られていないが，陽子よりは小さいと考えられている．以上を踏まえ，スピンを球体の自転として説明することの妥当性を説明しなさい．

[a] 陽子の半径については，現在までにいくつかの測定値が報告されているが，ここでは知られている値のうち大きな値を記している．

解答例

2024 年度 量子力学 II (鳴海担当分)　　番号:　　名前:

期末試験 1　次の問に答えなさい．

(1) 3 次元極座標系でのハミルトニアンを，粒子の質量 m，運動量の動径成分 $\hat{p}_r$，軌道角運動量 $\hat{\boldsymbol{L}}$，位置エネルギー $V(r,\theta,\phi)$ を用いて表しなさい．

(2) 3 次元中心力場では，波動関数 $\varphi(\boldsymbol{r})$ がどのような表式で一般的に表されるか簡潔に説明しなさい．

(3) 3 次元クーロン場において，波動関数を定める量子数の名称をすべて答えなさい．

(4) 正常ゼーマン効果について，「磁場」，「縮退」というキーワードを用いて説明しなさい．

(1) $\hat{\mathcal{H}} = \dfrac{\hat{p}_r^2}{2m} + \dfrac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{2mr^2} + V(r,\theta,\phi)$

(2) r にのみ依存する関数 $R(r)$ と球面調和関数 $Y_\ell^{m_\ell}(\theta,\phi)$ を用いて $\varphi(\boldsymbol{r}) = R(r)Y_\ell^{m_\ell}(\theta,\phi)$ と表せる．

(3) 主量子数，方位量子数，磁気量子数

(4) 磁場をかけることで縮退が解けて $\mu_B B$ の等間隔に並んだエネルギー準位があらわれる現象

期末試験 2　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}$ について，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$ を示しなさい．

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$ より $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2 = (a_x b_y - a_y b_x)^2$

$= a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - 2a_x a_y b_x b_y$

$|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 = (a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2) = \underline{a_x^2 b_x^2} + a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 + \underline{a_y^2 b_y^2}$

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 = (a_x b_x + a_y b_y)^2 = \underline{a_x^2 b_x^2} + \underline{a_y^2 b_y^2} - 2a_x a_y b_x b_y$

$\Rightarrow |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 = a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - 2a_x a_y b_x b_y = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$ ■

期末試験 3　軌道角運動量 $\hat{\boldsymbol{L}}$，球面調和関数 $Y_l^{m_l}(\theta,\phi)$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　$l=1, m_l=1$ では $Y_1^1(\theta,\phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$ と表される．このとき，$\hat{\boldsymbol{L}}$ の z 成分 $\hat{L}_z$ について，$\hat{L}_z Y_1^1(\theta,\phi)$ を，$\hbar$ と $Y_1^1(\theta,\phi)$ を用いて表しなさい．なお，$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}$ であることは既知としなさい．

(2)　$l=1, m_l=0$ では $Y_1^0(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$ と表される．このとき，$\hat{\boldsymbol{L}}^2 Y_1^0(\theta,\phi)$ を，$\hbar$ と $Y_1^0(\theta,\phi)$ を用いて表しなさい．なお，$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$ であることをは既知としなさい．

(1)
$$\hat{L}_z Y_1^1(\theta,\phi) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}\right)$$
$$= -\frac{\hbar}{2i}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\cdot\frac{\partial e^{i\phi}}{\partial\phi} = -\frac{\hbar}{2i}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\; i\, e^{i\phi}$$
$$= \hbar\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}\right) = \hbar Y_1^1(\theta,\phi)$$

(2)
$$\hat{L}^2 Y_1^0(\theta,\phi) = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta} + 0\right]$$
$$= \frac{\hbar^2}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sin^2\theta}{\partial\theta}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{1}{\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta = \hbar^2\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$
$$= 2\hbar^2\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta = 2\hbar^2 Y_1^0(\theta,\phi)$$

※ この問題は $\hat{L}^2 Y_l^{m_l} = \hbar^2 l(l+1) Y_l^{m_l}$, $\hat{L}_z Y_l^{m_l} = \hbar m_l Y_l^{m_l}$
を確かめる問題.

期末試験 4　上向きスピンの状態を $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，下向きスピンの状態を $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表すとき，スピン $\hat{\boldsymbol{s}} = (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z)$ は，$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\hat{s}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$，$\hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と書ける．

(1)　交換関係 $[\hat{s}_x, \hat{s}_y] = i\hbar\hat{s}_z$ を示しなさい．

(2)　$\hat{s}_z|\uparrow\rangle$ を計算し，その結果が意味することを説明しなさい．

(3)　$\hat{s}_\pm = \hat{s}_x \pm i\hat{s}_y$（複合同順）とする．$\hat{s}_+|\uparrow\rangle$，$\hat{s}_+|\downarrow\rangle$，$\hat{s}_-|\uparrow\rangle$，$\hat{s}_-|\downarrow\rangle$ を計算し，それらの結果から $\hat{s}_+$ と $\hat{s}_-$ がどういった役割を果たす演算子なのか説明しなさい．

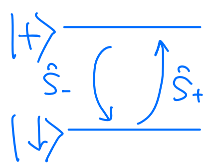
(1)
$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = \hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x$$
$$= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\left\{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\} = \hbar \cdot \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\hbar\hat{S}_z$$

(2)
$$\hat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$$

これは $|\uparrow\rangle$ が $\hat{S}_z$ の固有状態で，測定値が $\frac{\hbar}{2}$ であることを表す．

(3)
$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{S}_+|\uparrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_-|\uparrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar|\downarrow\rangle \\ \hat{S}_+|\downarrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar|\uparrow\rangle \\ \hat{S}_-|\downarrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$



よって $\hat{S}_+$ は下向きスピンを上向きスピンに，$\hat{S}_-$ は上向きスピンを下向きスピンに変換して $\hbar$ 倍する演算子　※昇降演算子と呼ばれる

期末試験 5　電子を，表面に負の電荷が一様に帯電している球体とみなす．

(1) 球体が自転しているとき，球体の赤道上の表面速度を，球体の質量 m_e，球体の半径 r_e，角運動量 L を用いて表しなさい．ただし，球体の慣性モーメント $I = \frac{2}{5}m_e r_e^2$，赤道上の表面速度 v と角速度 ω の関係 $v = r_e\omega$，角速度と角運動量 L の関係 $L = I\omega$ は既知としなさい．

(2) この球体の自転の角運動量が $\frac{\hbar}{2}$ に等しいとき，球体の赤道上の表面速度を，m_e，r_e，ディラック定数 $\hbar$ を用いて表しなさい．

(3) 表面速度は光速度 c よりも小さい．球体の半径 r_e が満たすべき条件を求めなさい．

(4) 電子の質量 $m_e = 9.11\times10^{-31}$ kg，光速度 $c = 3.00\times10^{8}$ m/s，ディラック定数 $\hbar = 1.05\times10^{-34}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$，陽子の半径 $r_p = 8.8\times10^{-16}$ m が知られている[a]．電子の半径は知られていないが，陽子よりは小さいと考えられている．以上を踏まえ，スピンを球体の自転として説明することの妥当性を説明しなさい．

[a] 陽子の半径については，現在までにいくつかの測定値が報告されているが，ここでは知られている値のうち大きな値を記している．

(1) $v = r_e\omega = r_e\frac{L}{I} = r_e\frac{5L}{2m_e r_e^2} = \frac{5L}{2m_e r_e}$ //

(2) $L = \frac{\hbar}{2}$ を代入すると，$v = \frac{5\hbar}{4m_e r_e}$

(3) $v < c$ より $\frac{5\hbar}{4m_e r_e} < c \iff r_e > \frac{5\hbar}{4m_e c}$

(4) (3)より

$$r_e > \frac{5\times1.05\times10^{-34}}{4\times9.11\times10^{-31}\times3.00\times10^{8}} = 4.80\times10^{-13}\ \mathrm{m}$$

これは $r_p = 8.8\times10^{-16}$ m より大きいので電子が陽子より小さいということと矛盾する。

以上より，スピンを球体の自転と考えることは不適切．