

**中間試験 1** 次の問に答えなさい。

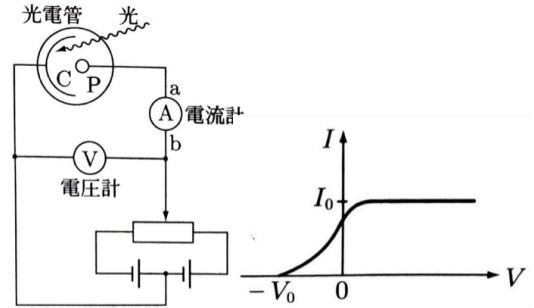
- (1) 制動放射について説明しなさい。
- (2) エネルギー量子仮説での光のエネルギーを, 自然数  $n$ , プランク定数  $h$ , 振動数  $\nu$  を用いて表しなさい。
- (3) 光量子仮説での運動量を, ディラック定数  $h$ , 角振動数  $\omega$ , 波数  $k$  のうち必要なものを用いて表しなさい。
- (4) 原子モデルにおける軌道について説明しなさい。
- (5) ドブROI波長を, プランク定数  $h$ , 質量  $M$ , 速さ  $v$  を用いて表しなさい。
- (6) 時刻  $t$ , 位置  $x$  での波動関数  $\psi(x, t)$  として, ボルンの規則を説明しなさい。

.....

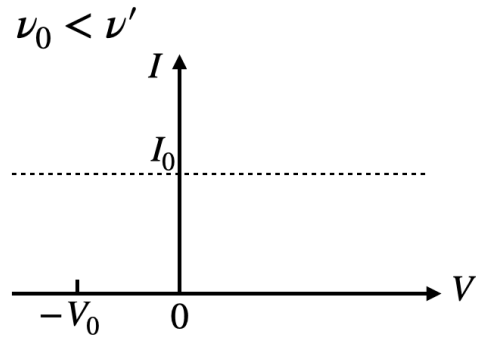
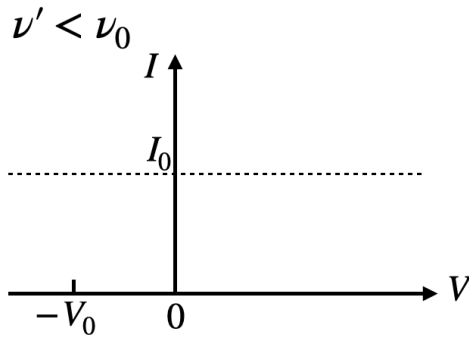
[以下の空欄は自由に用いなさい。解答を書く場合はどの問題の解答かを明記すること]

**中間試験 2** 図で示す回路について、振動数  $\nu$  の光を陰極 C に照射したところ、陰極 C に対する陽極 P の電位差  $V$  と電流の関係は図のようになった。電気素量を  $e$  として、次の問いに答えなさい。

- (1) 陰極から飛び出す電子の運動エネルギーの最大値を求めなさい。
- (2) 照射する光を、強さは同じで振動数が  $\nu'$  (ただし、 $\nu' < \nu$ ) の光に変える。光電効果が起こる境界となる振動数 (限界振動数) を  $\nu_0$  とするとき、 $\nu' < \nu_0$  と  $\nu_0 < \nu'$  のそれぞれについて、電流電圧特性の概形を  $I$ - $V$  グラフで表しなさい。答えが明確になるように太めの線で描くこと。



(2)の回答は以下のグラフに書き込みなさい。



**中間試験 3** 水素原子が発する光のスペクトルの振動数  $\nu$  は、定数  $A$ 、エネルギー準位を表す自然数  $n, m$  (ただし、 $n > m$ ) を用いて  $\nu = A \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$  と表される。以下では、プランク定数を  $h$  としなさい。

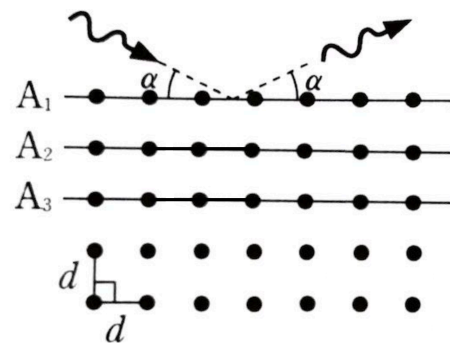
- (1) 電子が 4 番目のエネルギー準位から 2 番目のエネルギー準位に遷移するときに出される光の波長を、光速の大きさ  $c$  と  $A$  を用いて表しなさい。
- (2)  $n$  番目のエネルギー準位にある電子のエネルギーは、 $E_n = -\frac{\alpha^2 M c^2}{2n^2}$  (ただし、 $M$  は電子の質量、 $\alpha$  は正の定数) と書ける。このとき、 $\alpha$  を  $c, M, h, A$  を用いて表しなさい。

**中間試験 4**  $x$  軸上を動く 1 個の電子を考える。電子は、 $x = -a$  と  $x = a$  にある壁に閉じ込められており、 $x < -a$  と  $a < x$  では電子の波動関数が 0 である。 $-a < x < a$  の領域での電子には何も相互作用が加わらないとき、次の問いに答えなさい。ただし、プランク定数を  $h$ 、電子の質量を  $M$  としなさい。

- (1) 電子の波動関数が 0 であることが何を意味するのかを説明しなさい。
- (2) 電子が取りうる運動量  $p_n$  ( $n$  は自然数) を求めなさい。
- (3) 電子のエネルギー準位  $E_n$  ( $n$  は自然数) を求めなさい。

**中間試験 5** 図は結晶断面の模式図で、原子が間隔  $d$  で並んでいる。紙面に垂直な方向についても同様に原子が配列している。プランク定数を  $h$ 、電子の質量を  $M$ 、電荷素量を  $e$  として、次の問いに答えなさい。

- (1) 等速直線運動していた電子を、その進行方向に電圧  $V$  で加速する。加速される前の速さを  $v_0$  として、加速された後の電子のドブロイ波長を、 $e$ ,  $h$ ,  $M$ ,  $v_0$ ,  $V$  を用いて表しなさい。
- (2) 図のように、波長  $\lambda$  の電子を  $A_1, A_2, \dots$  の格子面と角度  $\alpha$  をなす方向から入射させると強い回折が生じた。回折の条件が  $2d \sin \alpha = n\lambda$  (ただし、 $n$  は自然数) と表せることを説明しなさい。

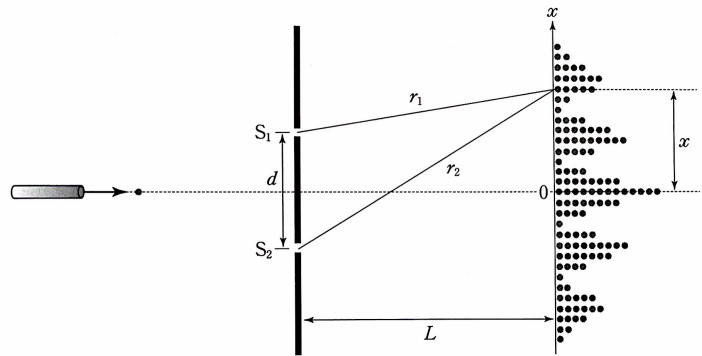


**中間試験 6** 図のような二重スリットの実験を考える．スクリーン上の位置  $x$  に到達する電子について，スリット  $S_1$  を通過した電子の波動関数を  $\psi_1$ ，スリット  $S_2$  を通過した電子の波動関数を  $\psi_2$  とする．これらは，

$$\psi_1 = a_1 \exp \left[ i \left( \alpha + \frac{pr_1}{\hbar} \right) \right], \quad \psi_2 = a_2 \exp \left[ i \left( \alpha + \frac{pr_2}{\hbar} \right) \right] \quad (\text{なお, } \exp[a] = e^a \text{ である})$$

と表される．ここで， $p$  は電子の運動量の大きさ， $\alpha$ ， $a_1$ ， $a_2$  は実定数を表す．

- (1) スクリーン上で電子を見出す確率分布  $|\psi_1 + \psi_2|^2$  が， $a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \left[ \frac{p}{\hbar}(r_2 - r_1) \right]$  となることを示しなさい．ただし，実数  $\theta$  についての式  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  は証明なしに用いて良い．
- (2)  $d$  と  $x$  が  $L$  より十分に小さいとき，確率分布が極大となる位置は  $\frac{L\lambda}{d}n$  (ただし， $n$  は整数， $\lambda$  は電子の波長) と近似できることを示しなさい．なお，実数  $\delta$  (ただし  $|\delta| \ll 1$ ) についての近似式  $\sqrt{1+\delta} \simeq 1 + \frac{\delta}{2}$  は証明なしに用いて良い．



# 解答例

2024 年度 量子力学 I (鳴海担当分)

番号:

名前:

中間試験 1 次の問に答えなさい。

- (1) 制動放射について説明しなさい。
- (2) エネルギー量子仮説での光のエネルギーを、自然数  $n$ , プランク定数  $h$ , 振動数  $\nu$  を用いて表しなさい。
- (3) 光量子仮説での運動量を、ディラック定数  $\hbar$ , 角振動数  $\omega$ , 波数  $k$  のうち必要なものを用いて表しなさい。
- (4) 原子モデルにおける軌道について説明しなさい。
- (5) ドブロイ波長を、プランク定数  $h$ , 質量  $M$ , 速さ  $v$  を用いて表しなさい。
- (6) 時刻  $t$ , 位置  $x$  での波動関数  $\psi(x, t)$  として、ボルの規則を説明しなさい。

(1) 荷電粒子が加速運動するとエネルギーを放出すること

(2)  $nh\nu$

(3)  $\hbar k$

(4) ボーアの原子モデルで量子条件を満たす円周

(5)  $\frac{h}{Mv}$

(6) 粒子が位置  $x$  時刻  $t$  に見出される確率が  $|\psi(x, t)|^2$  に比例する。

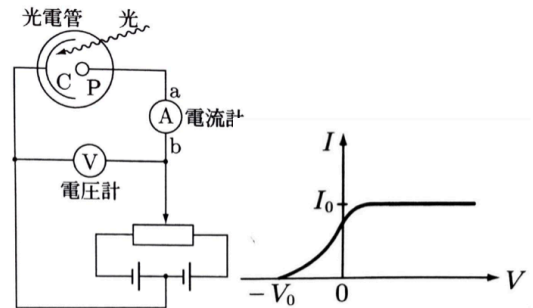
[以下の空欄は自由に用いなさい。解答を書く場合はどの問題の解答かを明記すること]

**中間試験 2** 図で示す回路について、振動数  $\nu$  の光を陰極 C に照射したところ、陰極 C に対する陽極 P の電位差  $V$  と電流の関係は図のようになった。電気素量を  $e$  として、次の問いに答えなさい。

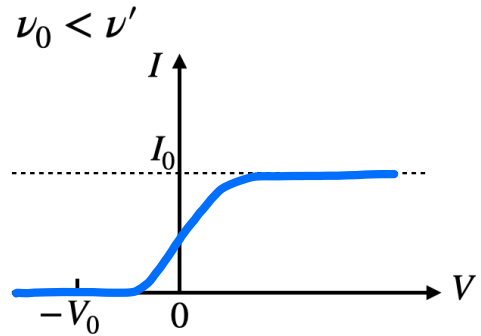
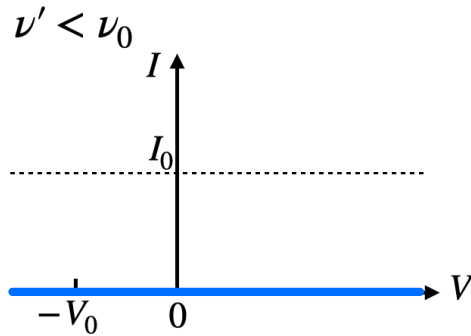
- (1) 陰極から飛び出す電子の運動エネルギーの最大値を求めなさい。
- (2) 照射する光を、強さは同じで振動数が  $\nu'$  (ただし、 $\nu' < \nu$ ) の光に変える。光電効果が起こる境界となる振動数 (限界振動数) を  $\nu_0$  とするとき、 $\nu' < \nu_0$  と  $\nu_0 < \nu'$  のそれぞれについて、電流電圧特性の概形を  $I$ - $V$  グラフで表しなさい。答えが明確になるように太めの線で描くこと。

(1)  $V$  が  $-V_0$  のとき最大の運動エネルギーをもった電子が陽極に到達するので、

$$-eV_0 = 0 - K \quad \therefore K = eV_0$$



(2) の回答は以下のグラフに書き込みなさい。



**中間試験 3** 水素原子が発する光のスペクトルの振動数  $\nu$  は、定数  $A$ 、エネルギー準位を表す自然数  $n, m$  (ただし、 $n > m$ ) を用いて  $\nu = A \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$  と表される。以下では、プランク定数を  $h$  としなさい。

- (1) 電子が 4 番目のエネルギー準位から 2 番目のエネルギー準位に遷移するとき放出される光の波長を、光速の大きさ  $c$  と  $A$  を用いて表しなさい。
- (2)  $n$  番目のエネルギー準位にある電子のエネルギーは、 $E_n = -\frac{\alpha^2 M c^2}{2n^2}$  (ただし、 $M$  は電子の質量、 $\alpha$  は正の定数) と書ける。このとき、 $\alpha$  を  $c, M, h, A$  を用いて表しなさい。

$$(1) \quad \nu = A \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = \frac{3A}{16}. \quad c = \nu \lambda \text{ より} \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{16c}{3A}$$

$$(2) \quad \text{振動数条件より} \quad \nu = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{\alpha^2 M c^2}{2h} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{よって} \quad A = \frac{\alpha^2 M c^2}{2h} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2hA}{M c^2}}$$

**中間試験 4**  $x$  軸上を動く 1 個の電子を考える。電子は、 $x = -a$  と  $x = a$  にある壁に閉じ込められており、 $x < -a$  と  $a < x$  では電子の波動関数が 0 である。 $-a < x < a$  の領域での電子には何も相互作用が加わらないとき、次の問いに答えなさい。ただし、プランク定数を  $h$ 、電子の質量を  $M$  としなさい。

- (1) 電子の波動関数が 0 であることが何を意味するのかを説明しなさい。
- (2) 電子が取りうる運動量  $p_n$  ( $n$  は自然数) を求めなさい。
- (3) 電子のエネルギー準位  $E_n$  ( $n$  は自然数) を求めなさい。

(1) 電子が存在しないことを表す。

(2) 波動関数の連続性より  $x = \pm a$  で節となる。

$$\text{このことから } \lambda_n = \frac{4a}{n} \text{ と表せるので } p_n = \frac{h}{\lambda_n} n$$

$$(3) E_n = \frac{p_n^2}{2M} = \frac{h^2}{32a^2M} n^2$$

**中間試験 5** 図は結晶断面の模式図で、原子が間隔  $d$  で並んでいる。紙面に垂直な方向についても同様に原子が配列している。プランク定数を  $h$ 、電子の質量を  $M$ 、電荷素量を  $e$  として、次の問いに答えなさい。

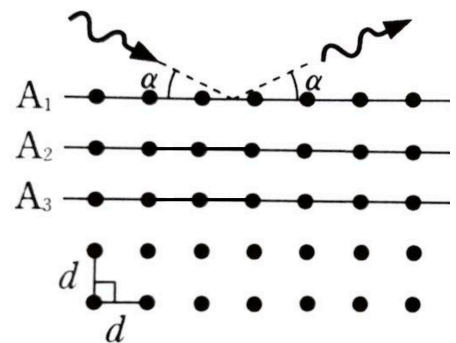
- (1) 等速直線運動していた電子を、その進行方向に電圧  $V$  で加速する。加速される前の速さを  $v_0$  として、加速された後の電子のドブロイ波長を、 $e$ ,  $h$ ,  $M$ ,  $v_0$ ,  $V$  を用いて表しなさい。
- (2) 図のように、波長  $\lambda$  の電子を  $A_1, A_2, \dots$  の格子面と角度  $\alpha$  をなす方向から入射させると強い回折が生じた。回折の条件が  $2d \sin \alpha = n\lambda$  (ただし、 $n$  は自然数) と表せることを説明しなさい。

(1) エネルギーの原理から

$$eV = \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2$$

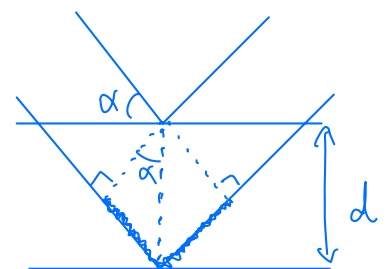
$$v = \sqrt{\frac{2eV}{M} + v_0^2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{Mv} = \frac{h}{\sqrt{2eMv + (Mv_0)^2}}$$



(2) となりあう面を反射させた波の経路差 (右図の太線) は  $2d \sin \alpha$ 。  
経路差が波長の自然数倍になると強い回折が生じるので強めあう条件は

$$2d \sin \alpha = n\lambda \quad (n: \text{自然数})$$



中間試験 6 図のような二重スリットの実験を考える。スクリーン上の位置  $x$  に到達する電子について、スリット  $S_1$  を通過した電子の波動関数を  $\psi_1$ 、スリット  $S_2$  を通過した電子の波動関数を  $\psi_2$  とする。これらは、

$$\psi_1 = a_1 \exp \left[ i \left( \alpha + \frac{pr_1}{\hbar} \right) \right], \quad \psi_2 = a_2 \exp \left[ i \left( \alpha + \frac{pr_2}{\hbar} \right) \right] \quad (\text{なお, } \exp[a] = e^a \text{ である})$$

と表される。ここで、 $p$  は電子の運動量の大きさ、 $\alpha$ 、 $a_1$ 、 $a_2$  は実定数を表す。

- (1) スクリーン上で電子を見出す確率分布  $|\psi_1 + \psi_2|^2$  が、 $a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \left[ \frac{p}{\hbar}(r_2 - r_1) \right]$  となることを示しなさい。ただし、実数  $\theta$  についての式  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  は証明なしに用いて良い。
- (2)  $d$  と  $x$  が  $L$  より十分に小さいとき、確率分布が極大となる位置は  $\frac{L\lambda}{d}n$  (ただし、 $n$  は整数、 $\lambda$  は電子の波長) と近似できることを示しなさい。なお、実数  $\delta$  (ただし  $|\delta| \ll 1$ ) についての近似式  $\sqrt{1+\delta} \simeq 1 + \frac{\delta}{2}$  は証明なしに用いて良い。

$$(1) |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^* + |\psi_2|^2$$

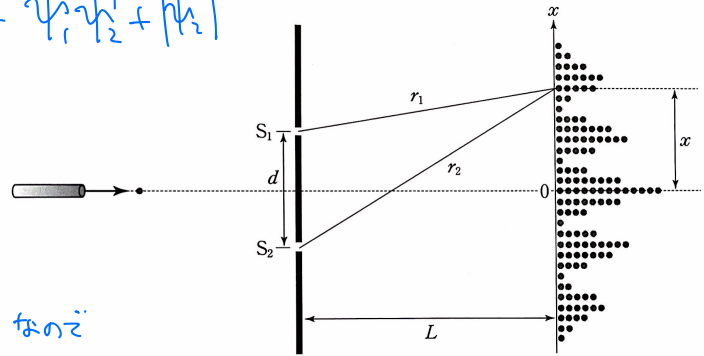
$$|\psi_1|^2 = a_1^2, \quad |\psi_2|^2 = a_2^2$$

$$\psi_1^* \psi_2 = a_1 a_2 \exp \left[ \frac{i p}{\hbar} (r_2 - r_1) \right]$$

$$\psi_1 \psi_2^* = a_1 a_2 \exp \left[ \frac{i p}{\hbar} (r_1 - r_2) \right] \text{ となる}$$

$$\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^* = a_1 a_2 \left\{ \exp \left[ \frac{i p}{\hbar} (r_2 - r_1) \right] + \exp \left[ -\frac{i p}{\hbar} (r_2 - r_1) \right] \right\} = 2a_1 a_2 \cos \left[ \frac{p}{\hbar} (r_2 - r_1) \right]$$

$$\text{以上より } |\psi_1 + \psi_2|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \left[ \frac{p}{\hbar} (r_2 - r_1) \right]$$



$$(2) \text{ 干渉項に関するものは } \cos \left[ \frac{p}{\hbar} (r_2 - r_1) \right] \text{ が極大となるのは } \frac{p}{\hbar} (r_2 - r_1) = 2n\pi \dots \textcircled{*}$$

$$r_1 = \sqrt{L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2} = L \sqrt{1 + \left(\frac{x}{L} - \frac{d}{2L}\right)^2}, \quad r_2 = L \sqrt{1 + \left(\frac{x}{L} + \frac{d}{2L}\right)^2} \text{ となる}$$

$$x \ll L \text{ かつ } d \ll L \text{ のとき}$$

$$r_1 \approx L \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} - \frac{d}{2L} \right)^2 \right] = L \left[ 1 + \frac{x^2}{2L^2} - \frac{xd}{2L^2} + \frac{d^2}{8L^2} \right]$$

$$r_2 \approx L \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} + \frac{d}{2L} \right)^2 \right] = L \left[ 1 + \frac{x^2}{2L^2} + \frac{xd}{2L^2} + \frac{d^2}{8L^2} \right]$$

$$\text{よって } r_2 - r_1 \approx L \cdot \frac{xd}{L^2} = \frac{xd}{L}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \text{ より } \textcircled{*} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{xd}{L} = 2n\pi \quad \textcircled{\circ} \quad x = \frac{L\lambda}{d} n$$