期末試験 1 次の問に答えなさい．ただし，ディラック定数を $\hbar$ としなさい．

(1) 状態ベクトルについて説明しなさい．

(2) 量子系の可観測量（オブザーバブル）は何を用いて表されるか答えなさい．

(3) 固有状態について，「固有ベクトル」と「測定」という言葉を用いて説明しなさい．

(4) 位置 x での波動関数を $\psi(x)$ として，ボルンの規則について説明しなさい．

(5) シュレディンガー表現での定常状態のシュレディンガー方程式を書きなさい．ただし，ハミルトニアンを $\hat{H}$，定常状態の波動関数を $\varphi(x)$，エネルギー固有値を E としなさい．

期末試験 2 行列 $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えなさい．

(1) 固有値を小さい順に σ_-，σ_+ とするとき，σ_- と σ_+ を求めなさい．

(2) 固有値 σ_+ に属する固有状態を $|+\rangle$ とする．$|+\rangle$ を求めなさい．

期末試験 3　物理量 $\hat{A}$ を測定したところ，2 個の測定値 a_1 と a_2 が得られた．測定値 a_i（$i = 1, 2$）に対応する固有状態を $|a_i\rangle$ として，状態が $|\psi\rangle = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}|a_1\rangle - \dfrac{\sqrt{3}}{2}|a_2\rangle$ と表現できるとき，次の問に答えなさい．

(1)　測定値として a_1 を得る確率はいくらか．

(2)　$\langle\psi|$ を $\langle a_1|$ と $\langle a_2|$ を用いて表しなさい．

(3)　$a_1 = -1, a_2 = 1$ のとき $\left\langle \psi \middle| \hat{A} \middle| \psi \right\rangle$ はいくらか．なお，$\langle a_1 \,|\, a_1\rangle = \langle a_2 \,|\, a_2\rangle = 1$，$\langle a_1 \,|\, a_2\rangle = \langle a_2 \,|\, a_1\rangle = 0$ は断りなく用いて良い．

期末試験 4　エネルギー固有値を E_n，E_n に対するエネルギー固有状態を $|n\rangle$ として，次の問に答えなさい．

(1)　時刻 t での状態 $|\psi(t)\rangle = \displaystyle\sum_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n|n\rangle$ はシュレディンガー方程式を満たすことを示しなさい．

(2)　$\langle\psi(t) \,|\, \psi(t)\rangle = \displaystyle\sum_n \varphi_n^* \varphi_n$ を示しなさい．ただし，$\langle m \,|\, n\rangle$ が，$m = n$ のときに 1，$m \neq n$ のときに 0 であることは既知としなさい．

(3)　任意の t で $\langle\psi(t) \,|\, \psi(t)\rangle = 1$ となることを示しなさい．

期末試験 5　領域 $0 \leq x \leq L$ で 1 次元運動する質量 m の粒子を考える．領域内での粒子は相互作用を受けないとして，次の問いに答えなさい．

(1) 粒子の位置を $\hat{x}$，運動量を $\hat{p}$ で表すとき，領域内のハミルトニアン $\hat{H}$ を，m と $\hat{p}$ を用いて表しなさい．

(2) シュレディンガー表現での定常状態でのシュレディンガー方程式を，エネルギー固有値 E，エネルギー固有状態の波動関数 $\varphi(x)$ を用いて書きなさい．なお，シュレディンガー表現での運動量演算子が $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ であることは既知としなさい．

(3) $\varphi(x)$ の一般解を $\varphi(x) = A\cos kx + B\sin kx$（ただし，$A$ と B は複素定数）と表すとき，k を E, m, $\hbar$ を用いて表しなさい．ただし，単振動の運動方程式 $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$ の一般解が $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ であることは既知としなさい．

境界条件から，k と E の値は離散的の値をとる．以下では，そのことを明示的に示すために，k を k_n，E を E_n（ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$）と書く．

(4) k_n，n，L の間の関係式を求めなさい．

(5) E_n を $\hbar$，L，m，n を用いて表しなさい．

(6) 領域内に必ず粒子が存在することから，領域内の $\varphi(x)$ を求めなさい．

期末試験 6 シュレディンガー表現での波動関数を，実関数 $A(x,t)$ と $W(x,t)$ を用いて $\psi(x,t) = A(x,t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}W(x,t)\right]$ と表す．相互作用を受けずに運動する粒子（質量 m）について，次の問いに答えなさい．

(1) シュレディンガー方程式に $\psi(x,t)$ を代入して実部と虚部に分けて整理することで，

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2mA}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = 0$$

を示しなさい．なお，シュレディンガー表現での運動量演算子が $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ であることは既知としなさい．

(2) 相互作用を受けずに運動する粒子では，$W(x,t) = px - Et$（ここで，p は運動量，E はエネルギー固有値を表す）と書ける．$\frac{\partial W}{\partial x}$ を，p，x，E，t のうち必要なものを用いて表しなさい．

(3) 力学的エネルギーを H とする．このとき，$\hbar \to 0$ の極限で，相互作用を受けずに運動する粒子についてのハミルトン・ヤコビ方程式 $\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0$ が成り立つことを示しなさい．

解答例

2024 年度 量子力学 I (鳴海担当分)　　番号:　　名前:

期末試験 1　次の問に答えなさい．ただし，ディラック定数を $\hbar$ としなさい．

(1) 状態ベクトルについて説明しなさい．
(2) 量子系の可観測量（オブザーバブル）は何を用いて表されるか答えなさい．
(3) 固有状態について，「固有ベクトル」と「測定」という言葉を用いて説明しなさい．
(4) 位置 x での波動関数を $\psi(x)$ として，ボルンの規則について説明しなさい．
(5) シュレディンガー表現での定常状態のシュレディンガー方程式を書きなさい．ただし，ハミルトニアンを $\hat{H}$，定常状態の波動関数を $\varphi(x)$，エネルギー固有値を E としなさい．

(1) 量子系の状態を表すベクトルで複素数を成分とし規格化されている.

(2) 演算子

(3) 固有ベクトルによって表される状態で，状態は測定により得られた固有値に対応する固有状態に変化する.

(4) 位置 x で観測される確率は $|\psi(x)|^2$ で表されるという原理.

(5) $\hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x)$

期末試験 2　行列 $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えなさい．

(1) 固有値を小さい順に σ_-，σ_+ とするとき，σ_- と σ_+ を求めなさい．
(2) 固有値 σ_+ に属する固有状態を $|+\rangle$ とする．$|+\rangle$ を求めなさい．

(1) 固有方程式 $|\hat{\sigma}_x - \lambda I| = 0$ より $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

$\therefore$ $\sigma_+ = 1$, $\sigma_- = -1$

(2) $\hat{\sigma}_x |+\rangle = 1 \cdot |+\rangle$　　$|+\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\therefore$ $-x + y = 0$.　　$x = c$ とおくと $y = c$　　よって $|+\rangle = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{2}$ なので $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とすれば規格化できる.

よって $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

期末試験 3　物理量 $\hat{A}$ を測定したところ，2 個の測定値 a_1 と a_2 が得られた．測定値 a_i ($i=1,2$) に対応する固有状態を $|a_i\rangle$ として，状態が $|\psi\rangle = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}|a_1\rangle - \dfrac{\sqrt{3}}{2}|a_2\rangle$ と表現できるとき，次の問に答えなさい．

(1)　測定値として a_1 を得る確率はいくらか．

(2)　$\langle\psi|$ を $\langle a_1|$ と $\langle a_2|$ を用いて表しなさい．

(3)　$a_1=-1, a_2=1$ のとき $\left\langle \psi \middle| \hat{A} \middle| \psi \right\rangle$ はいくらか．なお，$\langle a_1 | a_1\rangle = \langle a_2 | a_2\rangle = 1$，$\langle a_1 | a_2\rangle = \langle a_2 | a_1\rangle = 0$ は断りなく用いて良い．

(1) $$\left|\frac{1+\sqrt{3}i}{4}\right|^2 = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{4^2} = \frac{1+3}{16} = \frac{1}{4}$$

(2) $$\langle\psi| = |\psi\rangle^* = \frac{1-\sqrt{3}i}{4}\langle a_1| - \frac{\sqrt{3}}{2}\langle a_2|$$

(3) $$\hat{A}|\psi\rangle = \frac{1+\sqrt{3}i}{4}\hat{A}|a_1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{A}|a_2\rangle = -\frac{1+\sqrt{3}i}{4}|a_1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|a_2\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \frac{(1-\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}{4^2} + \frac{\sqrt{3}^2}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

期末試験 4　エネルギー固有値を E_n，E_n に対するエネルギー固有状態を $|n\rangle$ として，次の問に答えなさい．

(1)　時刻 t での状態 $|\psi(t)\rangle = \displaystyle\sum_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n|n\rangle$ はシュレディンガー方程式を満たすことを示しなさい．

(2)　$\langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle = \displaystyle\sum_n \varphi_n^*\varphi_n$ を示しなさい．ただし，$\langle m\,|\,n\rangle$ が，$m=n$ のときに 1，$m\neq n$ のときに 0 であることは既知としなさい．

(3)　任意の t で $\langle\psi(t)\,|\,\psi(t)\rangle = 1$ となることを示しなさい．

(1) $$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = i\hbar\sum_n\left(-i\frac{E_n}{\hbar}\right)e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n|n\rangle = \sum_n E_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n|n\rangle \text{ より}$$

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n\hat{H}|n\rangle = \sum_n E_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n|n\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$$

(2) $$\langle\psi(t)| = \sum_m e^{i\frac{E_m}{\hbar}t}\varphi_m^*\langle m| \text{ より}$$

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \sum_m\sum_n e^{i\frac{E_m-E_n}{\hbar}t}\varphi_m^*\varphi_n\langle m|n\rangle = \sum_n\varphi_n^*\varphi_n$$

$$\because\ \langle m|n\rangle = \begin{cases}1 & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$

(3) (2)より $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$ は t に依存しない．

$\sum_n \varphi_n^*\varphi_n$ は，$|\varphi_n|^2$ が確率であることから，その総和 $\sum_n|\varphi_n|^2$ は 1．

以上より $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$ は任意の時刻で $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$

期末試験 5　領域 $0 \le x \le L$ で 1 次元運動する質量 m の粒子を考える．領域内での粒子は相互作用を受けないとして，次の問いに答えなさい．

(1) 粒子の位置を $\hat{x}$，運動量を $\hat{p}$ で表すとき，領域内のハミルトニアン $\hat{H}$ を，m と $\hat{p}$ を用いて表しなさい．

(2) シュレディンガー表現での定常状態でのシュレディンガー方程式を，エネルギー固有値 E，エネルギー固有状態の波動関数 $\varphi(x)$ を用いて書きなさい．なお，シュレディンガー表現での運動量演算子が $\hat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ であることは既知としなさい．

(3) $\varphi(x)$ の一般解を $\varphi(x) = A\cos kx + B\sin kx$（ただし，$A$ と B は複素定数）と表すとき，k を E，m，$\hbar$ を用いて表しなさい．ただし，単振動の運動方程式 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$ の一般解が $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ であることは既知としなさい．

境界条件から，k と E の値は離散的の値をとる．以下では，そのことを明示的に示すために，k を k_n，E を E_n（ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$）と書く．

(4) k_n，n，L の間の関係式を求めなさい．

(5) E_n を $\hbar$，L，m，n を用いて表しなさい．

(6) 領域内に必ず粒子が存在することから，領域内の $\varphi(x)$ を求めなさい．

(1) $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m}$　　(2) $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} = E\varphi(x)$

(3) (2)は x を独立変数とする単振動型の運動方程式なので

$\varphi(x) = A\cos\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x + B\sin\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x$.　よって　$k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

(4) 領域外のポテンシャルは ∞ とみなせるので，領域外で存在する確率は0.
波動関数は連続なので境界条件として $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ が言える.

(2)より　$\varphi(0) = A$　なので境界条件より $A=0$. $\Rightarrow \varphi(x) = B\sin kx$.

また $\varphi(L) = B\sin kL$ なので境界条件より $kL = n\pi$　$(n = 1, 2, \cdots)$

注: $n=0$ のとき $k=0$ より $\varphi(x)=0$. これは粒子が存在しないことになるので $n=0$は除外

$\therefore\ k_n = \dfrac{n\pi}{L}$.

(5) $k_n = \dfrac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar} \Leftrightarrow E_n = \dfrac{(\hbar k_n)^2}{2m} = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$.

(6) 題意より　$\displaystyle\int_0^L |\varphi(x)|^2 dx = 1$.

$\displaystyle\int_0^L \varphi(x)\,dx = |B|^2\int_0^L \sin^2 k_n x\,dx = |B|^2\int_0^L \frac{1-\cos 2k_n x}{2}dx = \frac{L}{2}|B|^2$　$\therefore\ |B| = \sqrt{\frac{2}{L}}$

よって　$\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$　(← これに大きさ1の複素定数をかけたものもOK)

期末試験 6 シュレディンガー表現での波動関数を，実関数 $A(x,t)$ と $W(x,t)$ を用いて $\psi(x,t) = A(x,t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}W(x,t)\right]$ と表す．相互作用を受けずに運動する粒子（質量 m）について，次の問いに答えなさい．

(1) シュレディンガー方程式に $\psi(x,t)$ を代入して実部と虚部に分けて整理することで，

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2mA}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = 0$$

を示しなさい．なお，シュレディンガー表現での運動量演算子が $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ であることは既知としなさい．

(2) 相互作用を受けずに運動する粒子では，$W(x,t) = px - Et$（ここで，p は運動量，E はエネルギー固有値を表す）と書ける．$\frac{\partial W}{\partial x}$ を，p，x，E，t のうち必要なものを用いて表しなさい．

(3) 力学的エネルギーを H とする．このとき，$\hbar \to 0$ の極限で，相互作用を受けずに運動する粒子についてのハミルトン・ヤコビ方程式 $\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0$ が成り立つことを示しなさい．

(1) $i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\hbar\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}A\cdot\frac{\partial W}{\partial t}\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}W\right]$ …①

また，$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\exp\left[\frac{i}{\hbar}W\right]\right) = \left[\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{i}{\hbar}\frac{\partial W}{\partial x}\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}W\right]$

$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A\exp\left[\frac{i}{\hbar}W\right]\right) = \left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{i}{\hbar}A\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar}\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1}{\hbar^2}A\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right\}\exp\left[\frac{i}{\hbar}W\right]$ より

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A\exp\left[\frac{i}{\hbar}W\right]\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{\hbar^2}A\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right\} + \frac{i}{\hbar}\left\{2\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + A\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right\}\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}W\right] \quad \cdots ②$$

①=② として実部に着目すると，$\psi \neq 0 \Leftrightarrow A \neq 0$ より

$$-A\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{A}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2mA}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = 0$$

(2) $W = px - Et$ の両辺を x で偏微分すると $\frac{\partial W}{\partial x} = p$

(3) (1)の式で $\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}$ は運動エネルギーで，相互作用を受けない（⇔位置エネルギーが0）なので $\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = H$ である．

$\hbar \to 0$ の古典極限で $\frac{\hbar^2}{2mA}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \to 0$ より $\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0$